

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1090 / 2-80

18/3-80

P17 - 12924

Н.Д.Гагунашвили, С.Кшеминьски, В.Б.Приезжев

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЕ
8-ВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

1979

Гагунашвили Н. Д., Кшеминьски С., Приезжев В. Б. P17 - 12924

О статистической сумме 8-вершинной модели

Представлены результаты расчета статистической суммы 8-вершинной модели при значениях параметров, соответствующих модели непересекающихся контуров. Полученная статсумма используется для изучения термодинамических свойств модели.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Gagunashvili N.D., Krzeminski S., Priezzhev V.B.

P17 - 12924

On Partition Function of the Eight-Vertex Model

A result of calculating the partition function is presented for the eight-vertex model for parameter values corresponding to the non-intersecting contour model. The received partition function is used for studying thermodynamical properties of the model.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Статистическая сумма 8-вершинной модели вычислена Бакстером /1/ при значениях параметров $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$, удовлетворяющих условию

$$\omega_1 = \omega_2, \quad \omega_3 = \omega_4, \quad \omega_5 = \omega_6, \quad \omega_7 = \omega_8. \quad /1/$$

Другая область значений параметров, допускающих точное решение, определяется соотношением

$$\omega_1 \omega_2 + \omega_3 \omega_4 = \omega_5 \omega_6 + \omega_7 \omega_8, \quad /2/$$

которое называется условием свободных фермионов /2/. В этой заметке мы опишем результаты вычисления статсуммы $Z(\omega)$ 8-вершинной модели для значений ω_i , находящихся вне областей /1/ и /2/, а именно, для значений $\omega_1 = 0, \omega_2 = 1, \omega_3 = x, \omega_4 = y, \omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = \sqrt{xy}$, приводящих /рис. 1/ к модели замкнутых непересекающихся контуров /МНК/, известной также как вариант задачи о случайных блужданиях без самопересечений.

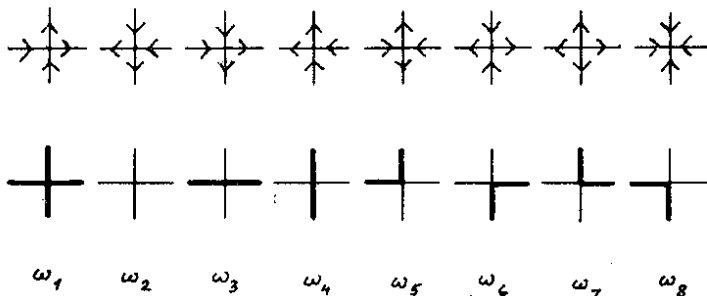


Рис. 1. Конфигурации стрелок /линий/, разрешенные в узлах 8-вершинной модели.

1. ОСНОВНАЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим вспомогательную модель /ВМ/ из области /2/ с параметрами

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = x, \quad \omega_4 = 2y, \quad \omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = \sqrt{xy}. \quad /3/$$

Выражение для статсуммы ВМ на двумерной квадратной решетке, состоящей из N узлов, может быть получено методом пфаффiana и имеет вид /3/:

$$Z_{\text{ВМ}}(x, y) = \exp \left\{ \frac{N}{8\pi^2} \iint_0^{2\pi} \ln [1 + x^2 + 4y^2 + 2x \cos \alpha + \dots + 4y \cos \beta (1 + x \cos \alpha)] d\alpha d\beta \right\}. \quad /4/$$

Замечая, что МНК и ВМ отличаются весом узла ω_4 , можно связать статсуммы этих моделей, если рассматривать МНК как ВМ с дефектами в узлах с индексом 4, принимая, что каждый дефект удваивает число конфигураций контуров. В работе /3/ выяснено, что плотность дефектов может служить малым параметром при вычислении статсуммы МНК. Ниже показано, как строится разложение по этому параметру.

Рассмотрим для простоты симметричный случай $x = y$. Непосредственно из вида статсуммы ВМ вытекает, что мы должны в этом случае положить $x \rightarrow \sqrt{2}x$, $y \rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}}$ в выражении /4/.

Обозначим через $G(n, \ell)$ число конфигураций контуров длины n , имеющих ℓ узлов с индексом 4. Тогда статсумма /4/ может быть записана в виде

$$Z_{\text{ВМ}} = \sum_{n, \ell} G(n, \ell) 2^\ell x^n. \quad /5/$$

Определим величины

$$\alpha(n) = \sum_{\ell} G(n, \ell) 2^\ell \quad /6/$$

и

$$\phi_n^\ell = \frac{G(n, \ell) 2^\ell}{\alpha(n)}. \quad /7/$$

Статсуммы МНК и ВМ принимают в этих обозначениях вид

$$Z_{\text{ВМ}}(x) = \sum_n \alpha(n) x^n, \quad /8/$$

$$Z(x) = \sum_n \alpha(n) \left(\sum_{\ell} \phi_n^\ell 2^{-\ell} \right) x^n = \sum_n g_n x^n, \quad /9/$$

где

$$g_n = \sum_{\ell} G(n, \ell).$$

Рассмотрим сумму $d(n)$, определенную выражением /6/. Пусть $d_n(i_1)$ означает вклад в эту сумму от конфигураций, имеющих в точке i_1 вершину типа /4/. Обозначим вообще через $d_n(i_1, i_2, \dots, i_r)$ вклад в сумму /6/ от конфигураций, имеющих вершину типа /4/ в точках i_1, \dots, i_r . Тогда выражение для числа конфигураций непересекающихся контуров длины n может быть получено с помощью комбинаторного принципа включения - исключения /4/:

$$g_n = d(n) - \frac{1}{2} \sum_{i_1} d_n(i_1) + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2!} \sum_{i_1 \neq i_2} d_n(i_1, i_2) + \dots \quad /10/$$

$$+ \dots \frac{(-1)^r}{2^r} \frac{1}{r!} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_r} d_n(i_1, i_2, \dots, i_r) + \dots$$

Умножим обе части равенства /10/ на x^n и просуммируем их по всем n . Получим

$$Z(x) = Z_{\text{BM}}(x) - \frac{1}{2} \sum_{i_1} \sum_n d_n(i_1) x^n + \frac{1}{2^2} \frac{1}{2!} \sum_{i_1 \neq i_2} \sum_n d_n(i_1, i_2) x^{n_1} \dots \quad /11/$$

Отношение $\sum_n d_n(i_1, i_2, \dots, i_r) x^n / Z_{\text{BM}}(x)$ определяет корреляционную функцию узлов типа /4/ в ВМ, которую в дальнейшем мы будем обозначать через $\langle i_1 \dots i_r \rangle_x$. С учетом этого обозначения имеем

$$Z(x) = Z_{\text{BM}}(x) \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{i_1} \langle i_1 \rangle_x + \dots + \frac{(-1)^r}{2^r r!} \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_r} \langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle_x + \dots \right] \quad /12/$$

Задача о вычислении корреляторов $\langle i_1, \dots, i_r \rangle$ в принципе не выходит за рамки стандартных расчетов методом пфаффиана /5/. Здесь мы приведем лишь результаты этих расчетов. Определим функции от координат узлов решетки (n, m) :

$$T(n, m) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} \frac{e^{-in\alpha} e^{-im\beta} [e^{-i\beta} (1 - 2x \cos \alpha + x^2)] + 2y(1 - x \cos \alpha)}{1 + x^2 + 4y^2 - 2x \cos \alpha + 4y \cos \beta (1 - x \cos \alpha)} da d\beta, \quad /13/$$

$$R(n, m) = \frac{-2xi}{(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} \frac{e^{-in\alpha} e^{-im\beta} \sin \alpha}{1 + x^2 + 4y^2 - 2x \cos \alpha + 4y \cos \beta (1 - x \cos \alpha)} da d\beta, \quad /14/$$

и две матрицы 4×4 :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & T(0, -1) - 1 & 0 & T(0, -2) \\ -T(0, -1) + 1 & 0 & -T(0, 0) & 0 \\ 0 & T(0, 0) & 0 & T(0, -1) - 1 \\ -T(0, -2) & 0 & -T(0, -1) + 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad /15/$$

$$Q(n,m) = \begin{bmatrix} R(n,m) & T(n,m-1) & R(n,m-1) & T(n,m-2) - \Delta_{n,0} \Delta_{m,1} \\ -T(n,m-1) & -R(n,m) & -T(n,m) & -R(n,m-1) \\ R(n,m-1) & T(n,m) & R(n,m) & T(n,m-1) \\ -T(n,m-2) + \Delta_{n,0} \Delta_{m,-1} & -R(n,m-1) & -T(n,m-1) & -R(n,m) \end{bmatrix} \quad /16/$$

Выражение для коррелятора $\langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle$ в точках $i_\ell \equiv (n_\ell, m_\ell)$ во введенных обозначениях имеет вид

$$\langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle = (\det M)^{1/2}, \quad /17/$$

где

$$M = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{Q}(n_2 - n_1, m_2 - m_1) & \dots & \hat{Q}(n_r - n_1, m_r - m_1) \\ \hat{Q}(n_1 - n_2, m_1 - m_2) & \hat{A} & \dots & \hat{Q}(n_r - n_2, m_r - m_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{Q}(n_1 - n_r, m_1 - m_r) & \hat{Q}(n_2 - n_r, m_2 - m_r) & \dots & \hat{A} \end{bmatrix} \quad /18/$$

Выражения /12/-/18/ являются формально точным решением МНК. Для выяснения характера особенностей термодинамических величин мы воспользуемся приближением, которое дает возможность представить статсумму МНК в более удобной для анализа форме.

Пользуясь формулами /8/ и /9/, запишем статсумму МНК $Z(x)$ в виде

$$Z(x) = \sum_n g(n) \left[\left(\sum_n \phi_n^\ell 2^{-\ell} \right)^{1/n} x \right]^n. \quad /19/$$

Введем "перенормированный" параметр

$$\tilde{x}(n) = x \left(\sum_n \phi_n^\ell 2^{-\ell} \right)^{1/n} \equiv x 2^{-\alpha(n)}$$

и заметим, что величина $\alpha(n)$ имеет смысл вероятности обнаружить узел типа /4/ в системе случайных непересекающихся контуров длины n . Считая, что в пределе $n \rightarrow \infty$ эта величина слабо зависит от плотности контуров на решетке, положим $\alpha(L) = \text{const}$ в окрестности критической точки /в следующем разделе будет показано, что в изучаемой модели существует одна критическая точка/. Тогда на основании /19/ имеем

$$Z(x) = Z_{\text{BM}}(\tilde{x}), \quad /20/$$

и, поскольку $\tilde{x} = x2^{-\alpha}$, особенности МНК совпадают с точностью до множителя с особенностями ВМ.

2. ТЕРМОДИНАМИКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Здесь мы рассмотрим термодинамические свойства вспомогательной модели, для простоты ограничившись симметричным случаем. Введем функцию $f_{\text{BM}}(x)$:

$$f_{\text{BM}}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_{\text{BM}}(x) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln [2a + 2b \cos \alpha + 2c \cos \beta + 2d \cos(\alpha - \beta) + 2e \cos(\alpha + \beta)] d\alpha d\beta, \quad /21/$$

где $2a = 1 + 4x^2$, $b = c = \sqrt{2}x$, $d = e = x^2$.

В работе Фана и Ву^[2] рассматривалась свободная энергия вида /21/, но с дополнительным условием $e = 0$. Используя формулу

$$\int_0^{2\pi} \ln [2A + 2B \cos \beta + 2C \sin \beta] d\beta = 2\pi \ln [A + (A^2 - B^2 - C^2)^{1/2}], \quad /22/$$

мы можем выполнить одно интегрирование:

$$f_{\text{BM}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \ln \{A(\alpha, x) + [\phi(\alpha, x)]^{1/2}\} d\alpha, \quad /23/$$

где

$$A(\alpha, x) = a + b \cos \alpha, \quad B(\alpha, x) = c + 2d \cos \alpha, \quad C(\alpha, x) = 0, \quad /24/$$

$$\phi(\alpha, x) = A^2 - B^2 - C^2 = 2x^2(1 - 2x^2) \cos^2 \alpha + \sqrt{2}x \cos \alpha + 4x^4 + \frac{1}{4}.$$

Из /23/ видно, что $f_{\text{BM}}(x)$ - аналитическая функция x за исключением точек, удовлетворяющих уравнению $\phi(\alpha, x) = 0$, в которых некоторые производные $f_{\text{BM}}(x)$ расходятся.

Из выражений /24/ следует, что $\phi(\alpha, x) \geq 0$. Критическую точку получим, приравнявая абсолютный минимум $\phi(\alpha, x)$ к нулю. Исходя из равенства

$$\frac{d\phi}{d\alpha} = -\sqrt{2}x \sin \alpha [1 + 2\sqrt{2}x(1 - 2x^2) \cos \alpha], \quad /25/$$

мы получаем три возможных экстремальных значения для $\phi(\alpha, x)$:

$$\phi(0, x) \equiv p^2 = \frac{1}{4}(2\sqrt{2x}+1)^2, \quad \phi(\pi, x) \equiv q^2 = \frac{1}{4}(2\sqrt{2x}-1)^2,$$

$$\phi(\alpha_0, x) \equiv x^2(4x^2-1)^2/2(2x^2-1),$$

/26/

где

$$\cos \alpha_0 = 1/2\sqrt{2x}(2x^2-1) \quad \text{для} \quad x \geq x_0 = (8\sqrt{2})^{-1/3} x$$

$$x \left\{ \left[1 + \left(\frac{22}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3} + \left[1 - \left(\frac{22}{27} \right)^{1/2} \right]^{1/3} \right\} \approx 0,7556.$$

Поскольку $x_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\phi(\alpha, x)$ больше нуля. Поэтому единственная возможность - это приравнять к нулю $\phi(\alpha, x)$. Отсюда получаем критическую точку $\text{BM } x_0 = 1/2\sqrt{2}$. Определим функцию $U(x)$ как производную f_{BM} по x :

$$U(x) = \frac{df_{\text{BM}}}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{B'}{B} + (A' - A \frac{B'}{B}) [\phi(\alpha, x)]^{-1/2} \right\} d\alpha =$$

$$= A_0 + A_1 I_1 + A_2 I_2 = \rho(x)/x,$$

/27/

где штрихи обозначают дифференцирование по x и

$$A_0 = \frac{1}{2\pi x} \int_0^\pi \frac{1+2\sqrt{2}\cos\alpha}{1+\sqrt{2x}\cos\alpha} d\alpha = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x(1-2x^2)^{1/2}} \quad \text{для} \quad x < x_2 < \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$= \frac{1}{x} \quad \text{для} \quad x > x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$A_2 = -\sqrt{2}, \quad A_3 = (4x^2-1)/2x,$$

/28/

а I_1, I_2 - определенные интегралы следующего вида:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos \alpha [\phi(\alpha, x)]^{-1/2} d\alpha = \frac{1}{\pi p} \int_0^\infty \frac{1-t^2}{1+t^2} [(h_1^2 t^2 + 1)(h_2^2 t^2 + 1)]^{-1/2} dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (1 + b \cos \alpha)^{-1} [\phi(\alpha, x)]^{-1/2} d\alpha =$$

/29/

$$= [\pi p(1+b)]^{-1} \int_0^\infty \frac{1+t^2}{1-gt} [(h_1^2 t^2 + 1)(h_2^2 t^2 + 1)]^{-1/2} dt,$$

где $g = (b-1)/(b+1)$, $h_1 = 2q$, $h_2 = 1/2p$. Интегралы I_1, I_2 выражаются через полные эллиптические интегралы первого и третьего рода. Определим новую переменную z следующим образом:

$$h_1 t = z(1-z^2)^{-1/2} \quad \text{для} \quad x > x_1 = \frac{1}{2},$$

$$h_2 t = z(1-z^2)^{-1/2} \quad \text{для} \quad x < x_1 = \frac{1}{2}.$$

Тогда легко найти

(i) для $x < x_1$

$$I_1 = \frac{2}{\pi(1-4p^2)} [(1+4p^2)K(k_1) - 8p^2 \Pi(\alpha_1^2, k_1)],$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi(1+b)(1+4gp^2)} [(1-4p^2)K(k_1) + 4p^2(1+g) \Pi(\alpha_2^2, k)],$$

/30/

где $k_1^2 = 1 - 16q^2 p^2$, $\alpha_1^2 = 1 - 4p^2$, $\alpha_2^2 = 1 + 4gp^2$;

(ii) для $x > x_1$

$$I_1 = \frac{2}{\pi(2b^2-1)(4q^2-1)} [(4q^2+1)K(k_2) - 2 \Pi(\alpha_3^2, k_2)],$$

$$I_2 = \frac{2}{\pi(b+1)(2b^2-1)(4q^2+g)} [(4q^2-1)K(k_2) + (g+1) \Pi(\alpha_4^2, k_2)], \quad /31/$$

где $k_2^2 = 1 - 1/16q^2 p^2$, $\alpha_3^2 = 1 - 1/4q^2$, $\alpha_4^2 = 1 + g/4q^2$.

В этих выражениях через K и Π обозначены полные эллиптические интегралы первого и третьего рода^{/6/} соответственно.

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi,$$

$$\Pi(\alpha^2, k) = \int_0^{\pi/2} (1 - \alpha^2 \sin^2 \phi)^{-1} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi.$$

Функция $U(x)$ связана со средним значением плотности узлов, занятых контурами во вспомогательной модели $\rho(x)$. Выражение для $\rho(x)$ было получено в работе^{/3/} и для симметричного случая имеет вид

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} \frac{4x^2 + \sqrt{2}x(\cos \alpha + \cos \beta) + 4x^2 \cos \alpha \cos \beta}{1 + 4x^2 + 2\sqrt{2}x(\cos \alpha + \cos \beta) + 4x^2 \cos \alpha \cos \beta} d\alpha d\beta. \quad /32/$$

Используя формулы /28/, /30/, /31/, а также тождества^{/6/}

$$(1 - \alpha^2)(k^2 - \alpha^2)\Pi(\alpha^2, k) + \alpha^2(1 - k^2)\Pi\left(\frac{k^2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2}, k\right) = k^2(1 - \alpha^2)K(k),$$

$$\Pi(\alpha^2, k) + \Pi\left(\frac{k^2}{\alpha^2}, k\right) = K(k) + \frac{\pi}{2}\alpha[(1 - \alpha^2)(\alpha^2 - k^2)]^{-1/2}, \quad /33/$$

справедливые для $0 < k^2 < \alpha^2 < 1$ или $0 < -\alpha^2 < \infty$, с учетом

$$k_1^2 = \alpha_1^2 \alpha_2^2, \quad \alpha_4^2(k_1^2 - \alpha_3^2) = k_2^2(1 - \alpha_3^2)$$

легко получить, что

(i) для $0 < x < x_1$

$$\rho(x) = 1 + \frac{2(2\sqrt{2x+1})^2}{\pi(\sqrt{2x+1})} \left[\frac{\sqrt{2x}K(k_1)}{2\sqrt{2x+1}} - \Pi(\alpha_1^2, k_1) \right], \quad /34a/$$

(ii) для $x_1 < x < x_2$

$$\rho(x) = 1 - \frac{2}{\pi(\sqrt{2x+1})(8x^2-1)} [\sqrt{2x}(2\sqrt{2x+1})K(k_2) - \Pi\left(\frac{k_2^2}{\alpha^2}, k_2\right)] , \quad /34б/$$

(iii) для $x > x_2$

$$\rho(x) = 1 + \frac{1}{\pi(\sqrt{2x-1})(8x^2-1)} [\Pi(\alpha^2, k_2) + \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}} \Pi(\alpha^2, k_2) - (2\sqrt{2x-1})K(k_2)] . \quad /34в/$$

Фазовый переход происходит в точке $x_c = 1/2\sqrt{2}$, когда $\alpha_1 = 0$, $k_1 = 1$. Поскольку K и Π расходятся как $\ln|x-x_c|$, когда $k_1 \rightarrow 1$, легко увидеть из /34а/, что в окрестности критической точки

$$\rho(x) \approx \rho(x_c) - \frac{4\sqrt{2}}{\pi}(x-x_c) \ln\sqrt{2}|x-x_c|, \quad \rho(x_c) = 1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} . \quad /35/$$

Следовательно, средняя плотность узлов, занятых контурами, непрерывна в критической точке. Легко проверить, что функция $\rho(x)$ также непрерывна и в точках x_1, x_2 , где мы имеем

$$\rho(x_1) = 2 - \sqrt{2}, \quad \rho(x_2) = 1 + \frac{1}{\pi} \left[K\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - 3E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \right] ,$$

E - полный эллиптический интеграл второго рода,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi .$$

График функции $\rho(x)$ представлен на рис. 2.

Из /35/ сразу видно, что $d\rho/dx$ расходится логарифмически в окрестности критической точки. Это можно доказать и прямым вычислением. После несложных, но трудоемких расчетов из /34/ получаем:

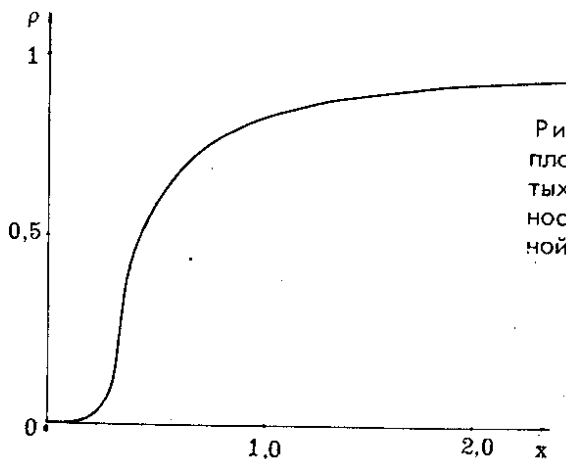


Рис. 2. Зависимость плотности узлов, занятых контурами, от активности во вспомогательной модели.

(i) для $0 < x < x_1$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{2\sqrt{2}(1+4\sqrt{2}x-8\sqrt{2}x^3)}{\pi(\sqrt{2}x+1)(1-4x^2)} K(k_1) +$$

$$+ \frac{4x^2(2\sqrt{2}x+1)^2 \Pi(\alpha_1^2, k_1) - (\sqrt{2}x-1)K(k_1)}{\pi x(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)^2} -$$

$$- \frac{E(k_1)}{\pi x(1-2x^2)(1-4x^2)}; \quad /36a/$$

(ii) для $x_1 < x < x_2$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{4x[\Pi(k_2^2/\alpha_4^2, k_2) - (4x^2-1)K(k_2)]}{\pi(2x^2-1)(\sqrt{2}x+1)(8x^2-1)} +$$

$$+ \frac{K(k_2) - (8x^2-1)^2 E(k_2)}{\pi x(2x^2-1)(4x^2-1)(8x^2-1)}; \quad /36b/$$

(iii) для $x > x_2$

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{(2\sqrt{2}x^3 - x^2 + \sqrt{2}x + 1)K(k_2)}{\pi x(2x^2-1)(\sqrt{2}x-1)(4x^2-1)(2\sqrt{2}x+1)} +$$

$$+ \frac{4x^2 K(k_2) - (8x^2 - 1) E(k_2)}{\pi x(2x^2 - 1)(4x^2 - 1)} - \quad /36в/$$

$$- \frac{2x[(\sqrt{2}x + 1) \Pi(\alpha_3^2, k_2) + (\sqrt{2}x - 1) \Pi(\alpha_4^2, k_2)]}{\pi(2x^2 - 1)^2(8x^2 - 1)}.$$

Окончательно имеем, что в окрестности критической точки

$$\frac{d\rho}{dx} \approx \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \ln|x - x_c|^{-1},$$

а в точках x_1, x_2 производная $d\rho/dx$ имеет вид

$$\frac{d\rho}{dx} \Big|_{x=x_1} = 2(2 - \sqrt{2}) \quad \text{и} \quad \frac{d\rho}{dx} \Big|_{x=x_2} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \left[3E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - K\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \right]$$

соответственно. Интересно отметить, что плотность узлов, занятых контурами, и ее производные имеют различный аналитический вид в областях $(0, x_1)$, (x_1, x_2) , (x_2, ∞) , хотя точки x_1 и x_2 не являются особыми точками.

Итак, возвращаясь к равенству /20/, мы видим, что статистическая сумма МНК имеет единственную критическую точку, в которой имеется логарифмическая расходимость второй производной от термодинамического потенциала /21/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baxter R.J. Ann.Phys., 1972, 70, p.193.
2. Fan C., Wu F.Y. Phys.Rev., B, 1970, 2, p.723.
3. Приезжев В.Б. ЖЭТФ, 1978, 74, с.1177.
4. Холл М. Комбинаторика, "Мир", М., 1970.
5. Монролл Э.В. В сб.: Устойчивость и фазовые переходы. "Мир", М., 1973.
6. Byrd P.F., Friedman M.D. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, Springer Verlag, Berlin, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 ноября 1979 года.