сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17 - 12805

А.М.Курбатов

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ КЛАССА МОДЕЛЬНЫХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЕЩЕСТВА С БОЗОННЫМ ПОЛЕМ

1979

Курбатов А.М. P17 - 12805

Корреляционные функции для класса модельных систем, описывающих взаимодействие вещества с бозонным полем

Рассмотрен класс модельных квантово-статистических гамильтонианов, описывающих взаимодействие вещества с бозонным полем, обобщающий ряд модельных задач теории конденсированных сред. Примером могут служить модель Дикке в квантовой оптике, модель Кобаяши в теории фероэлектриков, спин-фононные гамильтонианы и некоторые варианты модели Фрелиха. В рамках специальной аппроксимационной техники исследована термодинамическая асимптотика /при $V \to \infty$, $N \to \infty$, N/V=const/ квантово-статистических корреляционных функций таких систем, найдены термодинамически эквивалентные их значения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Kurbatov A.M. P17 - 12805

Correlation Functions of a Class of Model Systems Describing the Interaction of Matter with Boson Field

A class of model quantum statistical Hamiltonians, describing the interaction of matter with boson field is considered. The class generalizes a number of model problems of the condenced matter theory. As examples may be mentioned the Dicke model in quantum optics, the Kobayashi model in the theory of ferroelectrics, spin-phonon Hamiltonoans, and some versions of the Fröhlich model. In the frame of special approximating technique the thermodynamic asymptotics (as $V \to \infty$, $N \to \infty$, V/N=const) of the quantum statistical correlation functions of such systems is studied, their thermodynamically equivalent values being found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

I. В настоящей работе мы рассмотрим класс модельных гамильтонианов вида

$$H = T + \omega c^{+}c + \sqrt{V}\lambda(c^{+}A + cA^{+}), \tag{I}$$

где V - объем системы, ω , λ - положительные числовые константы, операторы c , A , T удовлетворяют условиям

$$[c,c^{+}] = 1, \quad [c,c] = 0; \tag{2}$$

$$\|A\| < M_1, \quad \|[A,T]\| < M_2, \quad \|[A,A^{+}]\| < M_3/V, \quad T^{+} = T; \tag{3}$$

$$[c,A] = 0, \quad [c,A^{+}] = 0, \quad [c,T] = 0. \tag{4}$$

В работах /I,2/ было исследовано точно в термодинамическом пределе поведение свободной энергии и простейших статистических средних системы (I)-(3). Особый интерес представляет изучение динамики системы посредством корреляционных функций.

Для этого введем в рассмотрение следующие операторы:

$$b_1 = \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega}A\right),$$

$$b_2 = \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega}A\right), \tag{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_s = \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{s-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega}A\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

и докажем лемму.

Лемма I

Для любого s

$$\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^s \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^s \right\rangle_H - \left\langle \left(\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^s \left(\frac{\lambda}{\omega} A\right)^s \right\rangle_H < \alpha_s \xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \tag{6}$$

$$\langle b_s^+ b_s \rangle_H < \beta_s = O(1/V^{2/3}) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \tag{7}$$

Доказательство

Доказательство проведем методом индукции. Соотношения (6), (7) для $s=1$ доказаны в работе /2/. Предположим, что (6),(7) выполнены для $s=\sigma-1,\dots,1$ $(\sigma\geq 2)$

$$\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \right\rangle_H - \left\langle \left(\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^{\sigma-m} \left(\frac{\lambda}{\omega} A\right)^{\sigma-m} \right\rangle_H < \alpha_{\sigma-m} \xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \tag{8}$$

$$\langle b_{\sigma-m}^+ b_{\sigma-m} \rangle_H < \beta_{\sigma-m} = O(1/V^{2/3}) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \tag{9}$$

$$m=1,\dots,\sigma-1,$$

и докажем, что они справедливы и для $s=\sigma$.

Заметим, прежде всего, что из (8),(9) следует, что для $m=1,\dots,\sigma-1$ при достаточно больших V

$$\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \right\rangle_H < 2 \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{2(\sigma-m)}, \quad m=1,\dots,\sigma-1, \tag{10}$$

$$\left| \left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A\right) \right\rangle_H \right| \leq \left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \right\rangle_H^{1/2} \langle b_{\sigma-m}^+ b_{\sigma-m} \rangle_H^{1/2} <$$

$$< 2 \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{\sigma-m} \beta_{\sigma-m} = O(1/V^{2/3}) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \quad m=1,\dots,\sigma-1. \tag{11}$$

Воспользуемся неравенством Н.Н.Боголюбова(мл.)

$$\langle \mathfrak{B}^+ \mathfrak{B} \rangle_{\mathcal{H}} \leq \int_0^1 \langle \mathfrak{B}^+(\tau) \mathfrak{B} \rangle_{\mathcal{H}} d\tau + \left(\frac{1}{\theta} \int_0^1 \langle \mathfrak{B}^+(\tau) \mathfrak{B} \rangle_{\mathcal{H}} d\tau \right)^{2/3} \left(\frac{1}{2} \langle \mathfrak{R}\mathfrak{R}^+ + \mathfrak{R}^+\mathfrak{R} \rangle_{\mathcal{H}} \right)^{1/3}, \tag{12}$$

где

$$\mathfrak{B}(\tau) = e^{\tau \frac{\mathcal{H}}{\theta}} \mathfrak{B} e^{-\tau \frac{\mathcal{H}}{\theta}} \tag{13}$$

$$\mathfrak{R} = [\mathfrak{B}, \mathcal{H}]. \tag{14}$$

Нетрудно убедиться, что

$$b_\sigma^+(\tau) = \frac{1}{\sigma} \frac{\theta}{\omega} \frac{d}{d\tau} \left[e^{\tau \frac{H}{\theta}} \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma e^{-\tau \frac{H}{\theta}} \right]. \tag{15}$$

В таком случае

$$\frac{\omega}{\theta} \int_0^1 \langle b_\sigma^+(\tau) b_\sigma \rangle_H d\tau = \frac{1}{\sigma} \left\langle e^{\frac{H}{\theta}} \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma e^{-\frac{H}{\theta}} b_\sigma - \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma b_\sigma \right\rangle_H = \frac{1}{\sigma} \left\langle \left[b_\sigma, \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma \right] \right\rangle_H. \tag{16}$$

Оценим коммутатор

$$\left[b_\sigma, \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma \right] = \left[\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A\right), \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma \right] =$$

$$= \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1} \left[\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A\right), \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma \right] + \sum_{m=1}^{\sigma-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m-1} \left[\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right), \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma \right] \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A\right) =$$

$$= \frac{\sigma}{V} \left\{ \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1} + \sum_{m=1}^{\sigma-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma+m} \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{m-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A\right) \right\}. \tag{17}$$

Согласно теореме Вика и неравенствам (10),(11) для достаточно больших V

$$\left\langle \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1} \right\rangle_H < 2 \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{2(\sigma-1)} + O(1/V), \tag{18}$$

$$\left| \left\langle \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1-m} \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{m-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A\right) \right\rangle_H \right| < \sqrt{2} \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{\sigma-m} \beta_{\sigma-m} + O(1/V) = O(1/V^{2/3}), \tag{19}$$

откуда

$$\frac{\omega}{\theta} \int_0^1 \langle b_\sigma^+(\tau) b_\sigma \rangle_H d\tau \leq \frac{1}{V} \left\{ 2 \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{2(\sigma-1)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\sigma-1} \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{\sigma-m} \beta_{\sigma-m} + O(1/V^{2/3}) \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{V} \left\{ \omega M + O(1/V^{2/3}) \right\}, \tag{20}$$

где $M = \mathrm{Const}$.

Оценим величину $\langle R_\sigma^+ R_\sigma \rangle_H$, где

$$R_\sigma = [b_\sigma, H]. \tag{21}$$

Имеем

$$R_\sigma=\left[\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}+\frac{\lambda}{\omega}A\right),H\right]=\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}\left[\left(\frac{c}{\sqrt{V}}+\frac{\lambda}{\omega}A\right),H\right]+\sum_{m=1}^{\sigma-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1-m}\left[\frac{c}{\sqrt{V}},H\right]\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{m}. \tag{22}$$

Поскольку

$$\left[\frac{c}{\sqrt{V}},H\right]=\omega\left(\frac{c}{\sqrt{V}}+\frac{\lambda}{\omega}A\right) \tag{23}$$

и

$$[A,H]=[A,T]+\lambda V[A,A^+]\left(\frac{c}{\sqrt{V}}+\frac{\lambda}{\omega}A\right)-\frac{\lambda^2}{\omega}V[A,A^+]A, \tag{24}$$

получаем

$$R_\sigma=\sigma\omega b_\sigma+\frac{\lambda^2}{\omega}V[A,A^+]\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}+\frac{\lambda}{\omega}A\right)+$$
$$+\frac{\lambda}{\omega}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}\left\{[A,T]-\frac{\lambda^2}{\omega}V[A,A^+]A\right\}. \tag{25}$$

На основании неравенства

$$\left\langle \sum_i \mathfrak{A}_i^+ \cdot \sum_i \mathfrak{A}_i \right\rangle \leq \left(\sum_i \langle \mathfrak{A}_i^+\mathfrak{A}_i\rangle^{1/2}\right)^2 \tag{26}$$

имеем

$$\langle R_\sigma^+R_\sigma\rangle_H\leq\left\{\sigma\omega\langle b_\sigma^+b_\sigma\rangle_H^{1/2}+\frac{\lambda^2}{\omega}\langle b_\sigma^+[A,A^+]^+V[A,A^+]b_\sigma\rangle_H^{1/2}+\right.$$
$$+\frac{\lambda^2}{\omega}\left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}[A,T]^+[A,T]\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}\right\rangle_H^{1/2}+$$
$$\left.+\frac{\lambda^3}{\omega^2}\left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}A^+[A,A^+]^+V^2[A,A^+]A\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}\right\rangle_H^{1/2}\right\}^2. \tag{27}$$

Воспользуемся теперь тем фактом, что, если мы имеем операторное неравенство

$$\mathfrak{A}<\mathfrak{B}, \quad (\mathfrak{A}^+=\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}^+=\mathfrak{B}), \tag{28}$$

то при любом операторе $\mathfrak{V}$ также справедливо неравенство

$$\mathfrak{V}^+\mathfrak{A}\mathfrak{V}<\mathfrak{V}^+\mathfrak{B}\mathfrak{V}. \tag{29}$$

Поскольку, согласно условиям (3),

$$[A,A^+]V^2[A,A^+]<M_3^2, \quad A^+[A,A^+]V^2[A,A^+]A<M_1^2M_3^2,$$
$$[A,T]^+[A,T]<M_2^2, \tag{30}$$

получаем

$$\langle R_\sigma^+R_\sigma\rangle_H\leq\left\{\left(\sigma\omega+\frac{\lambda^2}{\omega}\right)\langle b_\sigma^+b_\sigma\rangle_H^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^2}{\omega}\left(M_2+\frac{\lambda}{\omega}M_1M_3\right)\left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-1}\right\rangle_H^{1/2}\right\}^2. \tag{31}$$

Принимая во внимание (8), с помощью неравенства Коши-Буняковского найдем

$$\langle R_\sigma^+R_\sigma\rangle_H\leq\left\{\left(\sigma\omega+\frac{\lambda^2}{\omega}\right)\langle b_\sigma^+b_\sigma\rangle_H^{1/2}+\sqrt{2}\,\frac{\lambda^2}{\omega}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^{\sigma-1}M_1^{\sigma-1}\left(M_2+\frac{1}{\omega}M_1M_3\right)\right\}^2\leq \tag{32}$$
$$\leq\left[\left(\sigma\omega+\frac{\lambda^2}{\omega}\right)^2+2\frac{\lambda^4}{\omega^2}\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^{2(\sigma-1)}M_1^{2(\sigma-1)}\left(M_2+\frac{\lambda}{\omega}M_1M_3\right)^2\right]\left[\langle b_\sigma^+b_\sigma\rangle_H+1\right]=$$
$$=L^3\left[\langle b_\sigma^+b_\sigma\rangle_H+1\right], \tag{33}$$

где $L=\mathrm{Const}$.

Точно такая же оценка (33) может быть получена и для $\langle R_\sigma R_\sigma^+\rangle_H$.
В результате

$$\frac{1}{2}\langle R_\sigma^+R_\sigma+R_\sigma R_\sigma^+\rangle_H\leq L^3\left[\langle b_\sigma^+b_\sigma\rangle_H+1\right], \tag{34}$$

откуда

$$\left(\frac{1}{2}\langle R_\sigma^+R_\sigma+R_\sigma R_\sigma^+\rangle_H\right)^{1/3}\leq L\left[\langle b_\sigma^+b_\sigma\rangle_H^{1/3}+1\right]. \tag{35}$$

Подставляя (35) и (20) в неравенство (I2), получаем

$$\langle b_\sigma^+b_\sigma\rangle_H\leq\frac{\theta M}{V}\left(1+O(1/V^{2/3})\right)+\left(\frac{M}{V}\right)^{2/3}\left(1+O(1/V^{2/3})\right)L\left[\langle b_\sigma^+b_\sigma\rangle_H^{1/3}+1\right], \tag{36}$$

или

$$\langle b_\sigma^+ b_\sigma \rangle_H \le \left[\left(\frac{M}{V}\right)^{2/3} + O(1/V^{2/3}) \right] \langle b_\sigma^+ b_\sigma \rangle_H^{1/3} + \frac{\theta M}{V} + \frac{M^{2/3} b}{V^{2/3}} + O(1/V^{2/3}). \quad (37)$$

Неравенство (37) имеет вид

$$x < a x^{1/3} + B, \quad (38)$$

откуда следует, что

$$x < 2^{3/2} a + 2B. \quad (39)$$

Стало быть, окончательно,

$$\langle b_\sigma^+ b_\sigma \rangle_H < \frac{2^{3/2} M^{2/3} b}{V^{2/3}} + \frac{2 M^{2/3} b}{V^{2/3}} + \frac{\theta M}{V} + O(1/V^{2/3}) =$$

$$= \beta_\sigma = O(1/V^{2/3}) \xrightarrow[V \to \infty]{} 0. \quad (40)$$

Таким образом, соотношение (9) доказано.

Докажем (8). Нетрудно убедиться, что

$$\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^\sigma \right\rangle_H - \left\langle \left(\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^\sigma \left(\frac{\lambda}{\omega} A\right)^\sigma \right\rangle_H =$$

$$= \sum_{m=1}^{\sigma} \left\{ \left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A^+\right) \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \left(\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^{m-1} \left(\frac{\lambda}{\omega} A\right)^{m-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A\right) \right\rangle_H - \right.$$

$$- \left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \left(\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^{m} \left(\frac{\lambda}{\omega} A\right)^{m-1} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A\right) \right\rangle_H -$$

$$\left. - \left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A^+\right) \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \left(\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^{m-1} \left(\frac{\lambda}{\omega} A\right)^{m} \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\sigma-m} \right\rangle_H \right\}. \quad (41)$$

Учитывая свойство (28),(29), на основании (41) найдем

$$\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\sigma \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^\sigma \right\rangle_H - \left\langle \left(\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^\sigma \left(\frac{\lambda}{\omega} A\right)^\sigma \right\rangle_H \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{\sigma} \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{2(\sigma-1)} \left\{ \beta_{\sigma-m-1} + 2 \frac{\lambda}{\omega} M_1 \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{\sigma-m} \sqrt{\beta_{\sigma-m-1}} \right\} = \alpha_s \xrightarrow[V \to \infty]{} 0, \quad (42)$$

то есть соотношение (5) также доказано.

Докажем теперь, что справедлива

<u>Лемма 2</u>.

Для любого ограниченного оператора W

$$\left| \left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^m W \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^n \right\rangle_H - \left\langle \left(-\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^m W \left(-\frac{\lambda}{\omega} A\right)^n \right\rangle \right| \le \|W\| \varepsilon_{m,n},$$

$$\varepsilon_{m,n} \xrightarrow[V \to \infty]{} 0. \quad (43)$$

<u>Доказательство</u>

Доказательство проведем по индукции. Для $m = n = 0$ (43) выполняется тривиально. Предположим, что (43) справедливо для $m = \mu - 1$, $n = \nu - 1$ и докажем его для $m = \mu$, $n = \nu - 1$ ($\nu, \mu \ge 1$). Имеем

$$\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\mu W \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\nu-1} \right\rangle_H = \left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A^+\right) \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\mu-1} W \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\nu-1} \right\rangle_H +$$

$$+ \left[\left\langle \left(-\frac{\lambda}{\omega} A^+\right) \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\mu-1} W \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\nu-1} \right\rangle_H - \left\langle \left(-\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^{\mu-1} \left(-\frac{\lambda}{\omega} A^+\right) W \left(-\frac{\lambda}{\omega} A\right)^{\nu-1} \right\rangle_H \right] +$$

$$+ \left\langle \left(-\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^\mu W \left(-\frac{\lambda}{\omega} A\right)^{\nu-1} \right\rangle_H. \quad (44)$$

Согласно неравенствам (9),(10), принимая во внимание (28),(29), получаем

$$\left| \left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}} + \frac{\lambda}{\omega} A^+\right) \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\mu-1} W \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\nu-1} \right\rangle_H \right| \le$$

$$\le \sqrt{\langle B_\mu^+ B_\mu \rangle_H} \sqrt{\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\nu-1} W^+ W \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\nu-1} \right\rangle} \le \|W\| \sqrt{\beta_\mu}\, 2 \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{\nu-1} \xrightarrow[V \to \infty]{} 0 \quad (45)$$

Следовательно, в силу предположения индукции

$$\left| \left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\mu W \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\nu-1} \right\rangle_H - \left\langle \left(-\frac{\lambda}{\omega} A^+\right)^\mu W \left(-\frac{\lambda}{\omega} A\right)^\nu \right\rangle_H \right| \le$$

$$\le \|W\| \left[\varepsilon_{\mu-1,\nu-1} + 2 \left(\frac{\lambda}{\omega} M_1\right)^{\nu-1} \sqrt{\beta_\mu} \right] = \|W\| \varepsilon_{\mu,\nu-1} \quad (46)$$

$$\varepsilon_{\mu,\nu-1} \xrightarrow[V \to \infty]{} 0.$$

Аналогично доказывается соотношение (43) и для $m = \mu - 1$, $n = \nu$, что позволяет заключить, что (43) справедливо для произвольных m, n.

П. Перейдем теперь к рассмотрению подкласса гамильтонианов класса (I), операторы A которых являются аддитивными суммами вида

$$A=\frac{1}{V}\sum_{\ell\in\mathcal{L}}\mathfrak{a}_\ell,\quad \|\mathfrak{a}_\ell\|\le\mathbb{A} \qquad (47)$$

$$\|\mathcal{L}\|=N, \qquad (48)$$

каждый оператор $\mathfrak{a}_\ell$ действует только на переменную n_ℓ волновой функции $|n_c,n_1,\dots,n_\ell,\dots,n_N\rangle$ (n_c - число заполнения бозонного поля, n_ℓ - "числа заполнения" подсистемы "вещества"). Норма множества $\mathcal{L}$ - N имеет физический смысл числа "частиц" в "веществе".

Как известно[2], гамильтониан (I) аппроксимируется гамильтонианом

$$H_0=T-V\frac{\lambda^2}{\omega}(\bar{a}^+A+\bar{a}A^+), \qquad (49)$$

где с-числовые параметры $\bar{a}$ определяются согласно условию абсолютного минимума функции свободной энергии $f_V[H_0(\bar{a})+\bar{a}^+\bar{a}]$.

Заметим, что

$$H=H_0+V\omega\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}+\frac{\lambda}{\omega}A^+\right)\left(\frac{c}{\sqrt{V}}+\frac{\lambda}{\omega}A\right)-V\frac{\lambda^2}{\omega}(A^+-\bar{a}^+)(A-\bar{a})+V\frac{\lambda^2}{\omega}\bar{a}^+\bar{a}=$$

$$=H_0+\Delta H. \qquad (50)$$

Если T является также суммой вида (47),(48)

$$T=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}J_\ell, \qquad (51)$$

то и весь аппроксимирующий гамильтониан H_0 также является аддитивной суммой

$$H_0=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}G_\ell, \qquad (52)$$

где

$$G_\ell=J_\ell-\frac{\lambda^2}{\omega}(\bar{a}^+\mathfrak{a}_\ell+\bar{a}\mathfrak{a}_\ell^+). \qquad (53)$$

Но даже если представление (51) не имеет места, в ряде случаев сам T может быть аппроксимирован гамильтонианом T_0:

$$T=T_0+\Delta T, \qquad (54)$$

где

$$T_0=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}J_\ell^{(0)}. \qquad (55)$$

J_ℓ действует только на переменную n_ℓ. Тогда

$$H=T_0+H_0+\Delta T+\Delta H=G+\Delta T+\Delta H, \qquad (56)$$

где

$$G=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}G_\ell=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}\left(J_\ell^{(0)}-\frac{\lambda^2}{\omega}(\bar{a}\mathfrak{a}_\ell^++\bar{a}^+\mathfrak{a}_\ell)\right). \qquad (57)$$

В обоих случаях

$$H=G+H', \qquad (58)$$

где

$$G=\sum_{\ell\in\mathcal{L}}G_\ell, \qquad (59)$$

а G_ℓ дается выражением (53) или (55).

Итак, будем исследовать гамильтонианы класса (I), для которых имеет место представление (58),(59).

Мы будем рассматривать корреляционные функции вида

$$\langle\mathcal{A}_\ell(t_1)\dots\mathcal{A}_{\ell_k}(t_k)\,\mathcal{U}_c(t_c)\rangle_H, \qquad (60)$$

где $\mathcal{A}_\ell$ действуют только на переменную n_ℓ,

$$\mathcal{U}_c=\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^m\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^n. \qquad (61)$$

$\mathcal{A}_\ell(t)$ и $\mathcal{U}_c(t)$ - операторы $\mathcal{A}_\ell$ и $\mathcal{U}_c$ в гайзенберговском представлении:

$$\mathcal{A}_l(t)=e^{iHt}\mathcal{A}_l e^{-iHt},$$
$$\mathcal{U}_l(t)=e^{iHt}\mathcal{U}_l e^{-iHt}. \tag{62}$$

Пусть $\mathcal{U}_l$ – произвольный ограниченный оператор, действующий только на переменную n_l . В предположении, что выполнены условия

$$\langle([\mathcal{U}_l,H]^+[\mathcal{U}_l,H])^2\rangle_H \le \eta_V^2 \,\|\mathcal{U}_l\|^4 \xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \tag{63}$$

$$|[\mathcal{U}_{l'},[\mathcal{U}_l,H]]| = \varrho_V \|\mathcal{U}_{l'}\|\,\|\mathcal{U}_l\| \xrightarrow[V\to\infty]{} 0 \tag{64}$$

$$l,l'=1,\dots,N,\quad l\ne l',$$

оценим величину $\langle R^+R\rangle_\Gamma$, где

$$R=[\mathcal{B}_{l_1},\dots,\mathcal{B}_{l_k}\mathcal{U}_l,H] \tag{65}$$

$$\|\mathcal{B}_{l_q}\|\le \mathbb{A},\quad q=1,\dots,k. \tag{66}$$

Поскольку операторы $\mathcal{B}$ с различными индексами l и $\mathcal{U}_l$ коммутируют, произведение $\mathcal{B}_{l_1}\dots\mathcal{B}_{l_i}\mathcal{U}_l\mathcal{B}_{l_{i+1}}\dots\mathcal{B}_{l_k}$ можно представить в виде

$$\mathcal{U}_{l_1}^{(1)}\dots\mathcal{U}_{l_q}^{(q)}\mathcal{U}_l, \tag{67}$$

где

$$\mathcal{U}_{l_p}^{(p)}=\prod_{l_q=l_p}\mathcal{B}_{l_q}, \tag{68}$$

причем среди $l_1,\dots,l_q$ в (67) нет одинаковых. В таком случае

$$R=\{\mathcal{U}_{l_1}^{(1)}\dots\mathcal{U}_{l_{q-1}}^{(q-1)}[\mathcal{U}_{l_q},H]+\dots+[\mathcal{U}_{l_1}^{(1)},H]\mathcal{U}_{l_2}^{(2)}\dots\mathcal{U}_{l_q}^{(q)}\}\mathcal{U}_l=$$
$$=\{\mathcal{U}_{l_1}^{(1)}\dots\mathcal{U}_{l_{q-1}}^{(q-1)}[\mathcal{U}_{l_q},H]+\dots+\mathcal{U}_{l_2}^{(2)}\dots\mathcal{U}_{l_q}^{(q)}[\mathcal{U}_{l_1}^{(1)},H]+\mathcal{D}\}\mathcal{U}_l=$$
$$\stackrel{df}{=}\{\sum_{i=1}^{q}R_i+\mathcal{D}\}\mathcal{U}_l, \tag{69}$$

где оператор $\mathcal{D}$ такой, что

$$\|\mathcal{D}\|\le \varrho_V\mathbb{A}^k+2\varrho_V\mathbb{A}^k+\dots+(q-1)\varrho_V\mathbb{A}^k=\frac{q(q-1)}{2}\mathbb{A}^k\le\frac{k(k-1)}{2}\mathbb{A}^k \tag{70}$$

На основании свойства (28),(29) и неравенства

$$|\langle H_1H_2\rangle|\le\langle H_1H_1^+\rangle^{1/2}\langle H_2^+H_2\rangle^{1/2} \tag{71}$$

находим

$$\langle R_1^+R_1\rangle_H=\langle\mathcal{U}_l^+[\mathcal{U}_{l_q},H]^+\mathcal{U}_{l_{q-1}}^+\dots\mathcal{U}_{l_1}^+\mathcal{U}_{l_1}\dots\mathcal{U}_{l_{q-1}}[\mathcal{U}_{l_q},H]\mathcal{U}_l\rangle_H\le$$
$$\le\|\mathcal{U}_{l_{q-1}}^+\dots\mathcal{U}_{l_{q-1}}\|\langle\mathcal{U}_l^+\mathcal{U}_l[\mathcal{U}_{l_q},H]^+[\mathcal{U}_{l_q},H]\rangle_H\le$$
$$\le\|\mathcal{U}_{l_{q-1}}^+\dots\mathcal{U}_{l_{q-1}}\|\langle\mathcal{U}_l^+\mathcal{U}_l\mathcal{U}_l^+\mathcal{U}_l\rangle_H^{1/2}\langle([\mathcal{U}_{l_q},H]^+[\mathcal{U}_{l_q},H])^2\rangle_H^{1/2}. \tag{72}$$

Согласно оценке (8),

$$\langle(\mathcal{U}_l^+\mathcal{U}_l)^2\rangle_H^{1/2}\le\left(\frac{1}{\omega}M_1\right)^{2(m+n)}(1+O(1/V)), \tag{73}$$

откуда, в силу условия (16),

$$\langle R_1^+R_1\rangle_H\le\mathbb{A}^{2k}\left(\frac{1}{\omega}M_1\right)^{2(m+n)}\eta_V(1+O(1/V)). \tag{74}$$

Аналогичная оценка справедлива и для $R_2,\dots,R_q$, откуда

$$\langle R^+R\rangle_H\le\left(\sum_{i=1}^{q}\langle R_i^+R_i\rangle_H^{1/2}+\langle\mathcal{D}^+\mathcal{D}\rangle_H^{1/2}\right)^2\le\left(q\sqrt{\eta_V}+\frac{q(q-1)}{2}\sqrt{\varrho_V}\right)^2\mathbb{A}^k\left(\frac{1}{\omega}M_1\right)^{m+n}\times$$
$$\times(1+O(1/V))\le\left(k\sqrt{\eta_V}+\frac{k(k-1)}{2}\sqrt{\varrho_V}\right)^2\mathbb{A}^k\left(\frac{1}{\omega}M_1\right)^{m+n}(1+O(1/V)). \tag{75}$$

Введем

$$\mathcal{B}(t)=e^{iHt}e^{-iGt}\mathcal{B}e^{iGt}e^{-iHt} \tag{76}$$

$$\tilde{\mathcal{B}}(t)=e^{iGt}\mathcal{B}e^{-iGt} \tag{77}$$

и обозначим

$$\mathcal{B}_\ell = \mathfrak{A}_\ell . \qquad (78)$$

Вычислим производную

$$i\frac{d}{dt}[\bar{\mathcal{B}}_{\ell_1}(t)\ldots\bar{\mathcal{B}}_{\ell_k}(t)\bar{\mathcal{B}}_\ell(t)] = i\frac{d}{dt}\overline{\mathcal{B}_{\ell_1}\ldots\mathcal{B}_{\ell_k}\mathcal{B}_\ell}(t) =$$

$$= i\frac{d}{dt}[e^{iHt}e^{-iGt}\mathcal{B}_{\ell_1}\ldots\mathcal{B}_{\ell_k}\mathcal{B}_\ell e^{iGt}e^{-iHt}] = e^{iHt}[e^{-iGt}\mathcal{B}_{\ell_1}\ldots\mathcal{B}_{\ell_k}\times$$

$$\times e^{iGt}, H-G]e^{-iHt} = e^{iHt}[\tilde{\mathcal{B}}_{\ell_1}(-t)\ldots\tilde{\mathcal{B}}_{\ell_k}(-t)\tilde{\mathcal{B}}_\ell(-t), H]e^{-iHt}. \qquad (79)$$

Но, согласно (59),

$$\tilde{\mathcal{B}}_\ell(t) = e^{-iGt}\mathcal{B}_\ell e^{iGt}, \qquad (80)$$

т.е. $\tilde{\mathcal{B}}_\ell(-t)$ представляет собой ограниченный оператор ($\|\tilde{\mathcal{B}}_\ell(-t)\| \le \mathbb{A}$), действующий лишь на переменную n_ℓ , а

$$\tilde{\mathcal{B}}_\ell(-t) = \mathfrak{A}_\ell . \qquad (81)$$

Таким образом, для

$$\Delta(t) = [\tilde{\mathcal{B}}_{\ell_1}(-t)\ldots\tilde{\mathcal{B}}_{\ell_k}(-t)\tilde{\mathcal{B}}_\ell(-t), H] \qquad (82)$$

справедлива оценка (74):

$$\langle\Delta^+(t)\Delta(t)\rangle_H \le \Big(k\sqrt{\eta_V} + \frac{k(k-1)}{2}\sqrt{\xi_V}\Big)^2\mathbb{A}^k\Big(\frac{\lambda}{\omega}M_1\Big)^{m+n}(1+O(1/V)). \qquad (83)$$

Исходя из неравенства (83), с помощью оценки (9) и свойства (28),(29), так же, как и в работе /3/, можно показать, что

$$|\langle\bar{\mathcal{B}}_{\ell_1}(t_1)\ldots\bar{\mathcal{B}}_{\ell_k}(t_k)\bar{\mathcal{B}}_\ell(t_k)\rangle_H - \langle\tilde{\mathcal{B}}_{\ell_1}(-t_k)\ldots\tilde{\mathcal{B}}_{\ell_k}(-t_k)\tilde{\mathcal{B}}_\ell(-t_k)\rangle| \le$$

$$\le \mathbb{A}^k\Big(\frac{\lambda}{\omega}M_1\Big)^{m+n}\Big\{\sum_{p=2}^{s+1}\Big(p\sqrt{\eta_V} + \frac{p(p-1)}{2}\sqrt{\xi_V}\Big)\Big\}(1+O(1/V)) =$$

$$\stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{A}^k\Big(\frac{\lambda}{\omega}M_1\Big)^{m+n}\delta_{s,k}(V)(1+O(1/V)), \quad \delta_{s,k}(V)\xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \qquad (84)$$

Полагая $\mathcal{B}_{\ell_p} = \tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_p}(t_p)$, (85)

и учитывая тот факт, что

$$\tilde{\mathfrak{A}}_\ell(t) = \mathfrak{A}_\ell , \qquad (86)$$

получаем

$$|\langle\mathfrak{A}_{\ell_1}(t_1)\ldots\mathfrak{A}_{\ell_k}(t_k)\mathfrak{A}_\ell(t_k)\rangle_H - \langle\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_1}(t_1-t_k)\ldots\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_k}(t_k-t_k)\mathfrak{A}_\ell\rangle_H| \le$$

$$\le \mathbb{A}^k\Big(\frac{\lambda}{\omega}M_1\Big)^{m+n}\delta_{s,k}(V)(1+O(1/V)). \qquad (87)$$

Таким образом, согласно лемме 2,

$$|\langle\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_1}(t_1-t_k)\ldots\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_k}(t_k-t_k)\mathfrak{A}_\ell\rangle_H - \langle\Big(-\frac{\lambda}{\omega}A^+\Big)^m\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_1}(t_1-t_k)\ldots$$

$$\ldots\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_k}(t_k-t_k)\Big(-\frac{\lambda}{\omega}A\Big)^n\rangle_H| \le \mathbb{A}^k\varepsilon_{m,n} , \qquad (88)$$

$$\varepsilon_{m,n}\xrightarrow[V\to\infty]{} 0.$$

С другой стороны,

$$\langle\Big(-\frac{\lambda}{\omega}A^+\Big)^m\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_1}(t_1-t_k)\ldots\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_k}(t_k-t_k)\Big(-\frac{\lambda}{\omega}A\Big)^n\rangle_H =$$

$$= \frac{1}{V^{m+n}}\Big(-\frac{\lambda}{\omega}\Big)^{m+n}\sum_{\rho^{(1)},\ldots,\rho^{(m+n)}\in\mathcal{L}}\langle\mathfrak{a}^+_{\rho(1)}\ldots\mathfrak{a}^+_{\rho(m)}\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_1}(t_1-t_k)\ldots\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_k}(t_k-t_k)\mathfrak{a}_{\rho(m+1)}\ldots\mathfrak{a}_{\rho(m+n)}\rangle_H . \qquad (89)$$

Как показано в работе /3/

$$|\langle\mathfrak{a}^+_{\rho(1)}\ldots\mathfrak{a}^+_{\rho(m)}\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_1}(t_1-t_k)\ldots\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_k}(t_k-t_k)\mathfrak{a}_{\rho(m+1)}\ldots\mathfrak{a}_{\rho(m+n)}\rangle_H -$$

$$- \langle\mathfrak{a}^+_{\rho(1)}\ldots\mathfrak{a}^+_{\rho(m)}\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_1}(t_1-t_k)\ldots\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_k}(t_k-t_k)\mathfrak{a}_{\rho(m+1)}\ldots\mathfrak{a}_{\rho(m+n)}\rangle_G| \le$$

$$\le \mathbb{A}^{k+m+n}\zeta(V), \qquad \zeta(V)\xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \qquad (90)$$

откуда, учитывая, что $\|\mathcal{L}\| = N$,

и

$$\langle\mathfrak{a}^+_{\rho(1)}\ldots\mathfrak{a}^+_{\rho(m)}\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_1}(t_1-t_k)\ldots\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_k}(t_k-t_k)\mathfrak{a}_{\rho(m+1)}\ldots\mathfrak{a}_{\rho(m+n)}\rangle_G =$$

$$= \langle\tilde{\mathfrak{a}}^+_{\rho(1)}(t_k)\ldots\tilde{\mathfrak{a}}^+_{\rho(m)}(t_k)\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_1}(t_1)\ldots\tilde{\mathfrak{A}}_{\ell_k}(t_k)\tilde{\mathfrak{a}}_{\rho(m+1)}(t_k)\ldots\tilde{\mathfrak{a}}_{\rho(m+n)}(t_k)\rangle_G , \qquad (91)$$

получаем

$$
\left|\left\langle \left(-\frac{1}{\omega}A^{+}\right)^{m} \tilde{\mathcal{A}}_{\ell_1}(t_1-t_c)\ldots\tilde{\mathcal{A}}_{\ell_k}(t_k-t_c)\left(-\frac{1}{\omega}A\right)^{n}\right\rangle_H - \frac{1}{V^{m+n}}\left(-\frac{1}{\omega}\right)^{m+n}\times\right.
$$

$$
\left.\times\sum_{\ell^{(1)},\ldots,\ell^{(m+n)}\in\mathcal{L}}\left\langle \tilde{\mathfrak{a}}^{+}_{\ell^{(1)}}(t_c)\ldots\tilde{\mathfrak{a}}^{+}_{\ell^{(m)}}(t_c)\tilde{\mathcal{A}}_{\ell_1}(t_1)\ldots\tilde{\mathcal{A}}_{\ell_k}(t_k)\tilde{\mathfrak{a}}_{\ell^{(m+1)}}(t_c)\ldots\tilde{\mathfrak{a}}_{\ell^{(m+n)}}(t_c)\right\rangle_{\mathcal{B}}\right|\le
$$

$$
\le n_0^{m+n}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{m+n}\mathbb{A}^{k+m+n}g(V), \tag{92}
$$

где

$$
n_0 = N/V = Const. \tag{93}
$$

Таким образом, на основании неравенств (87),(88),(93) окончательно получаем

$$
\left|\left\langle \mathcal{A}_{\ell_1}(t_1)\ldots\mathcal{A}_{\ell_k}(t_k)\,\mathcal{U}_c(t_c)\right\rangle_H - \frac{1}{V^{m+n}}\left(-\frac{1}{\omega}\right)^{m+n}\times\right.
$$

$$
\left.\times\sum_{\ell^{(1)},\ldots,\ell^{(m+n)}\in\mathcal{L}}\left\langle \tilde{\mathfrak{a}}^{+}_{\ell^{(1)}}(t_c)\ldots\tilde{\mathfrak{a}}^{+}_{\ell^{(m)}}(t_c)\tilde{\mathcal{A}}_{\ell_1}(t_1)\ldots\tilde{\mathcal{A}}_{\ell_k}(t_k)\tilde{\mathfrak{a}}_{\ell^{(m+1)}}(t_c)\ldots\tilde{\mathfrak{a}}_{\ell^{(m+n)}}(t_c)\right\rangle_{\mathcal{B}}\right|\le
$$

$$
\le \varkappa(V)\xrightarrow[V\to\infty]{}0 \tag{94}
$$

или

$$
\left|\left\langle \mathcal{A}_{\ell_1}(t_1)\ldots\mathcal{A}_{\ell_k}(t_k)\,\mathcal{U}_c(t_c)\right\rangle_H -\right.
$$

$$
\left.-\left\langle\left(-\frac{1}{\omega}\tilde{A}^{+}(t_c)\right)^{m}\tilde{\mathcal{A}}_{\ell_1}(t_1)\ldots\tilde{\mathcal{A}}_{\ell_k}(t_k)\left(-\frac{1}{\omega}\tilde{A}(t_c)\right)^{n}\right\rangle_{\mathcal{B}}\right|\le
$$

$$
\le \varkappa(V)\xrightarrow[V\to\infty]{}0. \tag{95}
$$

Автор искренне признателен профессору Н.Н.Боголюбову (мл.) и А.Н.Ермилову за обсуждение темы.

Литература

1. Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Тончев Н.С. ДАН СССР, 1975, 225, с.71.
2. Боголюбов Н.Н.(мл.), Курбатов А.М., Плечко В.Н. ОИЯИ, Д17-9737, Дубна, 1976.
3. Боголюбов Н.Н. (мл.). ТМФ, 1977, 33, с.67.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 сентября 1979 года.