ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р17 - 12751

А.Р.Казарян, А.М.Курбатов

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ В ТЕОРИИ РЕШЕТЧАТЫХ СИСТЕМ

1979

Казарян А.Р., Курбатов А.М. Р17 - 12751

Об одном методе вычисления статистической суммы в теории решетчатых систем

Предложен метод вычисления статистической суммы для решетчатых систем произвольной размерности и применен к вычислению свободной энергии модели Изинга с взаимодействием ближайших соседей. В частных случаях получены решения Изинга и Онзагера для соответственно одномерной и двумерной решеток.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Kazarian A.R., Kurbatov A.M. P17 - 12751

On a Method of Calculating Statistical Sum in the Lattice System Theory

A method for calculating statistical sum for lattice systems of arbitrary dimension is proposed and applied to calculation of free energy of Ising model with nearest neighbours interacting. Solutions of Ising and Onsager are obtained in particular cases for one-and twodimensional lattices.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

В современной теории фазовых переходов существенный интерес представляет изучение решетчатых систем и, в частности, исследование гамильтониана Изинга, описывающего модель анизотропного ферромагнетика с взаимодействием ближайших соседей, т.е. в приближении, учитывающем лишь взаимодействие между спинами, расположенными в соседних узлах решетки [I,2] . В двумерном случае точное решение в термодинамическом пределе получено в 1944 году Л.Онзагером [3] . Решение Онзагера - точное в термодинамическом пределе выражение для функции свободной энергии, описывающее фазовый переход второго рода в двумерной решетке, представляет собой первый нетривиальный пример модели фазового перехода в статистической механике [4] .

В данной работе мы изложим метод, с помощью которого можно получить решение двумерной модели Изинга и моделей более высокой размерности.

§ I. Квадратная решетка

Рассмотрим гамильтониан двумерной модели Изинга

$$H=-\sum_{m,n} S_{mn}(X_1 S_{m+1n}+X_2 S_{mn+1}), \tag{I}$$

описывающий систему спинов, расположенных в узлах квадратной решетки $(N\times N)$, с учетом взаимодействия только ближайших соседей.

Нашей задачей будет вычисление функции свободной энергии:

$$f_N=-\frac{\theta}{N^2}\ln Sp\, e^{-H/\theta} \tag{2}$$

в термодинамическом пределе $N\to\infty$.

Для вычисления функции свободной энергии (2) нам необходимо вычислить статистическую сумму

$$Q=Sp\, e^{-\beta H}, \tag{3}$$

где $\beta=\frac{1}{\theta}$, а шпур в случае модели Изинга берется по состояниям $S_{mn}=\pm 1$.

Статистическая сумма (3) для гамильтониана (I) имеет вид

$$Q=\underset{(S)}{Sp}\prod_{m,n}\exp[\beta X_1 S_{mn}S_{m+1\,n}+\beta X_2 S_{mn}S_{mn+1}]. \quad (4)$$

Для сокращения в дальнейшем вместо S_{mn} будем писать S_0, а там, где есть сдвиги в каком-либо индексе, будем писать только этот индекс. Например, S_{n+1} соответствует $S_{m\,n+1}$.

Преобразуем выражение для Q, введя новые переменные

$$Q=\underset{(S,\sigma)}{Sp}\prod_{m,n}\exp[\beta X_1 S_0 S_{m+1}+\beta X_2\sigma_0\sigma_{n+1}]\times \left[\frac{1+S_0\sigma_0}{2}\right]. \quad (5)$$

Выражение в правой части равенства (5) получает вклад только от тех членов, для которых $S_0=\sigma_0$, т.к. в противном случае вторая квадратная скобка в правой части равенства (5) равна нулю. Используя формулу

$$e^{\beta X S_0 S_{m+1}}=ch\beta X+S_0S_{m+1}sh\beta X, \quad (6)$$

для статистической суммы (5) получим следующее выражение:

$$Q=\left(\frac{ch\beta X_1\cdot ch\beta X_2}{2}\right)^{N^2}\underset{(S,\sigma)}{Sp}\prod_{m,n}[(1+t_1S_0S_{m+1})\times \quad (7)$$
$$\times(1+t_2\sigma_0\sigma_{n+1})(1+S_0\sigma_0)],$$

где $t_1=th\beta X_1;\ t_2=th\beta X_2$.

Обозначая то, что стоит под знаком шпура в формуле (7), через Q' и раскрывая скобки, имеем

$$Q'=\underset{(S,\sigma)}{Sp}\prod_{m,n}[1+t_1S_0S_{m+1}+t_2\sigma_0\sigma_{n+1}+t_1t_2S_0\sigma_0S_{m+1}\sigma_{n+1}]\times[1+S_0\sigma_0]=$$

$$=\underset{(S,\sigma)}{Sp}\prod_{m,n}\{[1+t_1t_2S_{m+1}\sigma_{n+1}+S_0\sigma_0+ \quad (8)$$
$$(t_1S_{m+1}+t_2\sigma_{n+1})(S_0+\sigma_0)+t_1t_2S_0\sigma_0S_{m+1}\sigma_{n+1}]\}.$$

Заметим, что в выражении (8) ненулевой вклад дают только те члены, в которых каждая из переменных S_0,σ_0 входит в четной степени α, причем $\alpha=0,2$; т.е. только те члены дают вклад, в которых либо нет S_0, либо S_0 входит в паре с $S_{m'+1}$, где $m'+1=m;\ n'=n$. Воспользовавшись известной формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^{\alpha}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\begin{cases}\sqrt{2\pi} & \text{при } \alpha=0,2\\ 0 & \text{при } \alpha=1,\end{cases}$$

получим для Q' следующее представление:

$$Q'=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{N^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{N^2}\prod_{m,n}P_{mn}e^{-\frac{1}{2}(S_0^2+\sigma_0^2)}d\bar S\,d\bar\sigma, \quad (9)$$

где P_{mn} - это выражение, стоящее в фигурных скобках равенства (8).

Введем $4N^2$ переменные $\alpha_0\beta_0;\ \alpha_0',\beta_0'$ и соответствующие им операторы

$$p_1=\frac{d}{d\alpha_0};\qquad p_2=\frac{d}{d\beta_0};$$

$$q_1=\frac{d}{d\alpha_0'};\qquad q_2=\frac{d}{d\beta_0'}.$$

Этим новым переменным поставим в соответствие их произведение

$$\Psi=\prod_{m,n}\alpha_0\beta_0\alpha_0'\beta_0'. \quad (10)$$

Отметим, что введенные операторы p_i и q_i $(i=1,2)$ обладают следующим свойством (нильпотентность):

$$p_i^{\tau}\Psi=0 \qquad \text{при} \qquad \tau\geqslant 2$$
$$q_i^{\tau}\Psi=0 \qquad \text{при} \qquad \tau\geqslant 2$$

Тогда для P_{mn} справедливо следующее представление

$$P_{mn}=e^{A_{mn}}\Psi\Big|_{\alpha_0=\beta_0=\dots=\beta'=1}, \quad (11)$$

где
$$A_{mn} = t_1 t_2 S_{m+1} \sigma_{n+1} P_1 P_2 + S_0 \sigma_0 q_1 q_2 + (t_1 S_{m+1} + t_2 \sigma_{n+1})(S_0+\sigma_0) P_1 P_2 q_1 q_2 \tag{I2}$$

- квадратичная форма относительно переменных S и σ. Следовательно, для Q' с учетом (II) и (I2) справедливо следующее представление

$$Q' = \left(\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\right)^{N^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\dots\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum\limits_{m,n}\left(\frac{S_0^2+\sigma_0^2}{2} - A_{mn}\right)} dS\, d\sigma\, \Psi \Big|_{\rho_0 = \dots = \rho_0' = 1} \tag{I3}$$

В принципе операторы P_1, P_2, q_1, q_2 можно считать переменными грассмановой алгебры, а затем в окончательном выражении их опустить.

Для вычисления интеграла (I3) введем новые переменные с помощью преобразования Фурье:

$$S_{mn} = \frac{1}{N}\sum_{k,\tau} a(k,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(km+n\tau)},$$

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{N}\sum_{k,\tau} b(k,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(km+n\tau)}, \tag{I4}$$

и, соответственно,

$$S_{mn} q_1 = \frac{1}{N}\sum_{k,\tau} l(k,\tau)\, a(k,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(km+n\tau)}, \tag{I5}$$

$$\sigma_{mn} q_2 = \frac{1}{N}\sum_{k,\tau} z(k,\tau)\, b(k,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(km+n\tau)},$$

$$S_{m+1\,n} P_1 = \frac{1}{N}\sum_{k,\tau} u(k,\tau)\, a(k,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}[k(m+1)+n\tau]},$$

$$\sigma_{m\,n+1} P_2 = \frac{1}{N}\sum_{k,\tau} v(k,\tau)\, b(k,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}[km+\tau n]},$$

где $l(k,\tau), z(k,\tau), u(k,\tau), v(k,\tau)$ - грассмановы.

Запишем квадратичную форму, стоящую в экспоненте подынтегрального выражения, через новые переменные:

$$\sum_{m,n}\left(\frac{S_0^2+\sigma_0^2}{2} - A_{mn}\right) = \tag{I6}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,\tau}\Big\{ a(k,\tau)a^*(k,\tau) + b(k,\tau)b^*(k,\tau)$$

$$- \Big[t_1 t_2\, a^*(k,\tau) b(k,\tau) u^*(k,\tau) v(k,\tau)\, e^{\frac{2\pi i}{N}(k-\tau)} +$$

$$+ t_1 t_2\, a(k,\tau) b^*(k,\tau) u(k,\tau) v^*(k,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(k-\tau)} +$$

$$+ a^*(k,\tau) b(k,\tau) l^*(k,\tau) z(k,\tau) + a(k,\tau) b^*(k,\tau) l(k,\tau) z^*(k,\tau)$$

$$+ \left(t_1 a(k,\tau) u(k,\tau) e^{-\frac{2\pi i k}{N}} + t_2 b(k,\tau) v(k,\tau) e^{-\frac{2\pi i \tau}{N}}\right)\big(a^*(k,\tau)\cdot$$

$$l^*(k,\tau) + b^*(k,\tau) z^*(k,\tau)\big) + \left(t_1 a^*(k,\tau) u^*(k,\tau) e^{\frac{2\pi i k}{N}} +\right.$$

$$\left. t_2 b^*(k,\tau) v^*(k,\tau)\, e^{\frac{2\pi i \tau}{N}}\right)\big(a(k,\tau) l(k,\tau) + b(k,\tau) z(k,\tau)\big)\Big]\Big\}.$$

Искомый интеграл равен

$$I = \prod_{K,\tau} \frac{(\sqrt{2\pi})^{N^2}}{\sqrt{\det M}}, \qquad (17)$$

где M -матрица квадратичной формы, стоящей под знаком суммы в (16). Вычисляя этот детерминант и опуская грассмановы переменные, получаем, что

$$Q' = 4\prod_{K\tau}^{N^2}\Big\{1+t_1^2+t_2^2+t_1^2 t_2^2-2t_1(1-t_2^2)\cos\frac{2\pi K}{N} - 2t_2(1-t_1^2)\cos\frac{2\pi\tau}{N}\Big\}^{1/2}, \qquad (18)$$

где $1\le K\le \tau\le N$.

Тогда с учетом (7) и (4) получаем результат Онзагера для функции свободной энергии в термодинамическом пределе

$$f \doteq -\theta\Big\{\ln 2+\ln ch\beta X_1\cdot ch\beta X_2+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln[1+t_1^2+t_2^2+t_1^2t_2^2-2t_1(1-t_2^2)\cos\xi-2t_2(1-t_1^2)\cos\mu]\,d\xi\, d\mu. \qquad (19)$$

§ 2. Кубическая решетка

В этом параграфе мы рассмотрим применение развитого метода к кубической решетке.

Рассмотрим гамильтониан трехмерной модели Изинга

$$H=-\sum_{m,n,k} S_{mnk}(X_1 S_{m+1nk}+X_2 S_{mn+1k}+X_3 S_{mnk+1}), \qquad (20)$$

описывающий систему спинов, расположенных в узлах кубической решетки $(N\times N\times N)$, с учетом взаимодействия только ближайших соседей.

Статистическая сумма (3) для гамильтониана (20) имеет вид

$$Q=\underset{(S)}{Sp}\prod_{m,n,k} exp\{\beta X_1 S_{mnk}S_{m+1nk}+ \qquad (21)$$

$$+\beta X_2 S_{mnk}S_{mn+1k}+\beta X_3 S_{mnk}S_{mnk+1}\}).$$

В дальнейшем так же, как и в первом параграфе, будем выписывать только сдвинутые индексы.

Преобразуем выражение для Q, введя новые переменные

$$Q=\underset{(S)}{Sp}\prod_{m,n,k} exp[\beta X_1 S_0 S_{m+1}+\beta X_2 S_0 S_{n+1}+\beta X_3 S_0 S_{k+1}]=$$

$$=\underset{(S,\sigma,\varepsilon)}{Sp}\prod_{m,n,k} exp[\beta X_1 S_0 S_{m+1}+\beta X_2 \sigma_0\sigma_{n+1}+\beta X_3 \varepsilon_0\varepsilon_{k+1}]\times \frac{[1+S_0\sigma_0+\sigma_0\varepsilon_0+S_0\varepsilon_0]}{4}. \qquad (22)$$

Выражение в правой части равенства (5) получает вклад только от тех членов, для которых $S_0=\sigma_0=\varepsilon_0$, т.к. в противном случае вторая квадратная скобка в правой части равенства (22) равна 0.

Используя формулу (6), имеем

$$Q=\Big(\frac{ch\beta X_1\cdot ch\beta X_2\cdot ch\beta X_3}{4}\Big)^{N^3}\underset{(S,\sigma,\varepsilon)}{Sp}\prod_{m,n,k}\{[1+t_1 S_0 S_{m+1}]\cdot [1+t_2\sigma_0\sigma_{n+1}][1+t_3\varepsilon_0\varepsilon_{k+1}][1+S_0\sigma_0+\sigma_0\varepsilon_0+S_0\varepsilon_0]\}, \qquad (23)$$

где

$$t_1=th\beta X_1;\quad t_2=th\beta X_2;\quad t_3=th\beta X_3.$$

Обозначая то, что стоит под знаком шпура в формуле (23), через Q' и раскрывая скобки, имеем

$$Q' = \underset{(s,\sigma,\varepsilon)}{Sp} \prod_{m,n,k} \Big\{ \big[1 + (t_1 t_2 s_{m+1}\sigma_{n+1} + t_2 t_3 \sigma_{n+1}\varepsilon_{k+1} +$$

$$+ t_1 t_3 s_{m+1}\varepsilon_{k+1}) + (s_0\sigma_0 + \sigma_0\varepsilon_0 + s_0\varepsilon_0) +$$

$$+ (t_1 s_{m+1} + t_2\sigma_{n+1} + t_3\varepsilon_{k+1})(s_0 + \sigma_0 + \varepsilon_0) + (t_1 t_2 s_{m+1}\sigma_{n+1} +$$

$$+ t_2 t_3 \sigma_{n+1}\varepsilon_{k+1} + t_1 t_3 s_{m+1}\varepsilon_{k+1})(s_0\sigma_0 + \sigma_0\varepsilon_0 + s_0\sigma_0)\big] +$$

$$+ \big[t_1 t_2 t_3 (s_0\sigma_0\varepsilon_0 s_{m+1}\sigma_{n+1}\varepsilon_{k+1} + s_0 s_{m+1}\sigma_{n+1}\varepsilon_{k+1} +$$

$$+ \sigma_0\sigma_{n+1}s_{m+1}\varepsilon_{k+1} + \varepsilon_0 s_{m+1}\sigma_{n+1}\varepsilon_{k+1}) + \tag{24}$$

$$+ s_0\sigma_0\varepsilon_0 (t_1 s_{m+1} + t_2\sigma_{n+1} + t_3\varepsilon_{k+1})\big]\Big\}.$$

Следовательно, так же как и в первом параграфе для Q', справедливо следующее представление

$$Q' = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{N^3} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}}_{N^3} \prod_{m,n,k} P_{mnk}\, e^{-\frac{1}{2}(s_0^2+\sigma_0^2+\varepsilon_0^2)}\, d\bar{s}\, d\bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}, \tag{25}$$

где P_{mnk} – это выражение, стоящее в фигурных скобках равенства (24).

Введем $6N^3$ переменных $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \alpha_0', \beta_0', \gamma_0'$ и соответствующие им операторы

$$p_1 = \frac{d}{d\alpha_0}; \quad p_2 = \frac{d}{d\beta_0}; \quad p_3 = \frac{d}{d\gamma_0};$$

$$q_1 = \frac{d}{d\alpha_0'}; \quad q_2 = \frac{d}{d\beta_0'}; \quad q_3 = \frac{d}{d\gamma_0'}.$$

Этим новым переменным поставим в соответствие их произведение

$$\Psi = \prod_{m,n,k} \alpha_0\beta_0\gamma_0\alpha_0'\beta_0'\gamma_0'.$$

Отметим, что введенные операторы p_i и q_i $(i=1,2,3)$ обладают следующим свойством (нильпотентность):

$$p_i^{\tau}\Psi = 0 \qquad \text{при} \quad \tau \geq 2$$

$$q_i^{\tau}\Psi = 0 \qquad \text{при} \quad \tau \geq 2.$$

Так же, как и в двумерном случае, p_i и q_i можно считать грассмановыми.

Теперь выражение (25) для Q' можно представить в виде

$$Q' = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{N^3} \int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty} e^{-\sum_{m,n,k}\left[\frac{s_0^2+\sigma_0^2+\varepsilon_0^2}{2} - A_{mnk}\right]} d\bar{s}\, d\bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}\, \Psi\Big|_{\alpha_0=\dots=1}, \tag{26}$$

где

$$A_{mnk} = (t_1 t_2 s_{m+1}\sigma_{n+1} p_1 p_2 + t_2 t_3 \sigma_{n+1}\varepsilon_{k+1} + t_1 t_3 \times$$

$$s_{m+1}\varepsilon_{k+1} p_1 p_3) + (s_0\sigma_0 q_1 q_2 + \sigma_0\varepsilon_0 q_2 q_3 + s_0\varepsilon_0 q_1 q_3) +$$

$$(t_1 s_{m+1} p_1 + t_2 \sigma_{n+1} p_2 + t_3 \varepsilon_{k+1})(s_0 q_1 + \sigma_0 q_2 + \varepsilon_0) p_3 q_3.$$

Так же, как и в двумерном случае, для вычисления последнего интеграла введем новые переменные с помощью преобразования Фурье:

$$s_{mnk} = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{u,v,\tau} a(u,v,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(mu+nv+\tau k)}$$

$$\sigma_{mnk} = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{u,v,\tau} b(u,v,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(mu+nv+\tau k)}$$

$$\varepsilon_{mnk} = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{u,v,\tau} c(u,v,\tau)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(mu+nv+\tau k)}$$

$$S_{mnk}\, q_1 = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{u,v,z} e(u,v,z)\, a(u,v,z)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(mu+nv+zk)}$$

$$Б_{mnk}\, q_2 = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{u,v,z} z(u,v,z)\, b(u,v,z)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(mu+nv+zk)}$$

$$Е_{mnk}\, q_3 = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{u,v,z} d(u,v,z)\, c(u,v,z)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}(mu+nv+zk)}$$

$$S_{m+1nk}\, p_1 = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{u,v,z} q(u,v,z)\, a(u,v,z)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}[u(m+1)+nv+zk]}$$

$$Б_{mn+1k}\, p_2 = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{u,v,z} g(u,v,z)\, b(u,v,z)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}[um+(n+1)v+zk]}$$

$$Е_{mnk+1}\, p_3 = \frac{1}{N^{3/2}} \sum_{u,v,z} h(u,v,z)\, c(u,v,z)\, e^{-\frac{2\pi i}{N}[um+nv+z(k+1)]}$$

(27)

Запишем квадратичную форму, стоящую в экспоненте подынтегрального выражения, через новые переменные

$$\sum_{m,n,k}\left(\frac{S_0^2+Б_0^2+Е_0^2}{2} - A_{mnk}\right) = \frac{1}{2}\sum_{u,v,z}\Big\{a(u,v,z)\,a^*(u,v,z) +$$

$$+ b(u,v,z)\,b^*(u,v,z) + c(u,v,z)\,c^*(u,v,z) - \Big[t_1 t_2\, a b^* q g^* \times$$

$$e^{-\frac{2\pi i}{N}(u-v)} + t_1 t_2\, a^* b q^* g\, e^{\frac{2\pi i}{N}(u-v)} + t_2 t_3\, b c^* \times$$

$$g h^* e^{-\frac{2\pi i}{N}(v-z)} + t_2 t_3\, b^* c g^* h\, e^{\frac{2\pi i}{N}(v-z)} + t_1 t_3 \times$$

$$a c^* q h^* e^{-\frac{2\pi i}{N}(u-z)} + a^* c q^* h\, e^{\frac{2\pi i}{N}(u-z)} +$$

$$a b^* q g^* + a^* b q^* g + b c^* g h^* + b^* c g^* h + a c^* q h^* +$$

$$+ a^* c q^* h + \Big(t_1 a(u,v,z)\, q\, e^{-\frac{2\pi i u}{N}} + t_2 b(u,v,z)\, g \times$$

$$e^{-\frac{2\pi i v}{N}} + t_3 c(u,v,z)\, h\, e^{-\frac{2\pi z}{N}}\Big)\Big(a^*(u,v,z)\, e^* +$$

$$+ b^*(u,v,z)\, z^* + c(u,v,z)\, d^*\Big) +$$

$$+\Big(t_1 a^*(u,v,z)\, e^{\frac{2\pi i u}{N}} q^* + t_2 b^*(u,v,z)\, g^* e^{\frac{2\pi i v}{N}} +$$

$$+ t_3 c^*(u,v,z)\, h^* e^{\frac{2\pi i z}{N}}\Big)\Big(a(u,v,z)\, q + b(u,v,z)\, g +$$

$$+ c(u,v,z)\, h\Big)\Big]\Big\} \qquad (28)$$

Из квадратичной формы (28) видно, что искомый интеграл разбивается на произведение интегралов

$$I = \prod_{u,v,z} \frac{(\sqrt{2\pi})^{N^3}}{\sqrt{\det M}},$$

где M - шестимерная матрица квадратичной формы, стоящей под знаком суммы в (28).

Таким образом, развитый в работе метод позволяет получить аналитическое выражение для функции свободной энергии. Изучение фазового перехода в такой системе составляет предмет наших дальнейших исследований.

Авторы искренне признательны академику Н.Н.Боголюбову за стимулирующий интерес к работе, и профессору Н.Н.Боголюбову(мл.) за плодотворные обсуждения и поддержку в процессе ее выполнения.

Литература

1. К.Хуанг. Статистическая механика, Мир, М., 1966.
2. Р.Фейнман. Статистическая механика, Мир, 1975.
3. L.Onsager.Phys.Rev. 65, 117, 1944.
4. М.Фишер. Природа критического состояния, Мир, М., 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 сентября 1979 года.