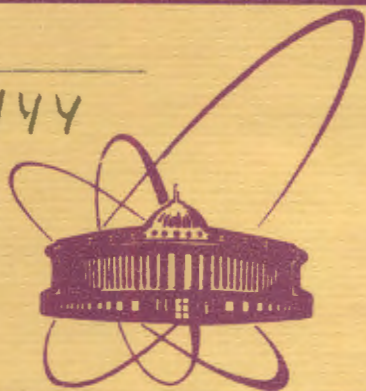


3-144



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

4870/2-79

3/12-79

P17 - 12583

В.А.Загребнов, В.Б.Приезжев

КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ  
И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ  
В НЕРЕГУЛЯРНЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ

1979

Загребнов В.А., Приезжев В.Б.

Калибровочная симметрия и фазовые переходы в нерегулярных спиновых системах

Показано, что калибровочная теория поля с группой  $Z_2$  эквивалентна на решетке  $Z^d$  ( $d \geq 2$ ) ферромагнитной модели Изинга с "незамороженными" антиферромагнитными примесными связями, взаимодействующими на плакетах. Исследована зависимость фазового перехода в этой модели от степени фрустрации решетки примесями.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований, Дубна 1979

Zagrebнов V.A., Priezzhev V.B.

Gauge Symmetry and Phase Transitions in the Random Spin Systems

The lattice gauge field with local group  $Z_2$  is shown to be equivalent to the ferromagnetic Ising model with "unfrozen"-antiferromagnetic-bond impurities interacting on plaquettes. The influence of frustration effect created by the impurities on a phase transition in this model is considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в теории поля и элементарных частиц большие надежды связываются с исследованием хромодинамики, лагранжиан которой для компактной калибровочной группы  $G$  имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \sum_{j=1}^f \bar{\psi}_j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j) \psi_j \quad /1/$$

Здесь  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$ , а  $A_\mu(x)$  - поле Янга-Миллса со значениями в алгебре Ли группы  $G$ ,  $\psi_j(x)$  - фермионное поле кварков с массой  $m_j$  и  $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$  - ковариантная производная /о деталях см. /1-4/ /. Привлекательной чертой теории, основанной на лагранжиане /1/, является, во-первых, асимптотическая свобода, т.е. убывание взаимодействия кварков на малых расстояниях /см., например, /2-5/ /. Во-вторых, существуют веские аргументы в пользу "конфайнмента", т.е. отсутствия в теории свободных кварков /барионная фаза/ при достаточно большой величине константы связи  $g^2$  /см. /2/ и /6-8/ /. Теория с лагранжианом /1/ довольно сложна, поэтому последнее свойство удалось проверить лишь после ряда упрощений: (i) перехода от пространства  $R^d$  к решетке  $Z^d$  /калибровочные поля на решетке /6-10/ /; (ii) перехода от калибровочных групп  $SU(3)$ ,  $SU(4)$  и др. к более простым абелевым группам, например  $Z_n$  - центру группы  $SU(n)$  /9-11/.

## 2. КАЛИБРОВОЧНОЕ ПОЛЕ НА РЕШЕТКЕ

После первого шага (i) калибровочно инвариантное /относительно преобразования  $C_{x,\mu} \cdot C'_{x,\mu} = U_{x,\mu} C_{x,\mu} U_{x+a,\mu}^{-1}$  /евклидово действие для поля Янга-Миллса принимает вид:

$$S_{Y.M}[C] = \frac{a^{d-4}}{2g^2} \sum_P \text{Tr}(C_{x,\mu} C_{x+a,\mu} C_{x+a,\mu}^{-1} C_{x,\mu}^{-1} ; \text{h.c.}), \quad /2/$$

где  $a$  - параметр решетки  $Z^d$ , а поле  $C_{x,\mu} = \exp(iga A_\mu(x))$  сосредоточено на ребрах решетки  $Z^d$ . Суммирование в выражении /2/ проводится по всем плакетам  $P$  - площадкам, ограниченным наименьшими замкнутыми контурами, проходящими по ребрам решетки. Соответствующим образом переписывается и часть действия, отвечающая взаимодействию кварков на решетке с полем  $C_{x,\mu}$  /см., например, /6-10/.

Наиболее простая модель хромодинамики на решетке связана с калибровочной группой  $Z_2$  /9,10/. Соответствующее действие имеет вид:

$$S_{\gamma,\delta}[C,\sigma] = \gamma \sum_P C_{ij} C_{jk} C_{kl} C_{li} + \delta \sum_{(ij)} \sigma_i C_{ij} \sigma_j, \quad /3/$$

где  $(ij)$  обозначает суммирование по ребрам решетки  $Z^d$ ,  $[ijkl]$  - индексы узлов на плакете  $P$ . Калибровочное поле  $C_{ij}$  принимает значения  $\pm 1$ , а второй член в выражении /3/ моделирует его взаимодействие с "кварками", которым сопоставляется поле  $\{\sigma_i = \pm 1\}$ , сосредоточенное в узлах решетки  $Z^d$ . Ожидается, что действие /3/ должно описывать переход из кварковой фазы в барнионную /"конфайнмент"/. Поэтому основными объектами исследования являются континуальный интеграл по полям  $C$  и  $\sigma$ :

$$Z[S_{\gamma,\delta}] = \int \mathcal{D}C \int \mathcal{D}\sigma e^{S_{\gamma,\delta}[C,\sigma]} \quad /4/$$

и соответствующие средние с функцией распределения

$$\rho_{\gamma,\delta}[C,\sigma] = (Z[S_{\gamma,\delta}])^{-1} e^{S_{\gamma,\delta}[C,\sigma]}, \quad /5/$$

особенности поведения которых, при изменении параметров  $\gamma$  и  $\delta$ , интерпретируются в духе теории фазовых переходов /6-11/.

Выражение /4/ с точностью до постоянного множителя переписывается в виде статистической суммы

$$Z[H_{\delta,\gamma}] = \sum_{\{\sigma = \pm 1\}} \sum_{\{C = \pm 1\}} e^{-H_{\delta,\gamma}[\sigma, C]}, \quad /6/$$

где

$$H_{\delta,\gamma} = -\delta \sum_{(ij)} \sigma_i C_{ij} \sigma_j - \gamma \sum_P C_{ij} C_{jk} C_{kl} C_{li}. \quad /7/$$

Тогда калибровочное поле с группой  $Z_2$  на решетке  $Z^d$  можно интерпретировать как модель Изинга /7/ с "незамороженными" /суммирование в /6/ по обменному взаимодействию  $C_{ij} = \pm 1$  /случайными антиферромагнитными связями, которые, в свою очередь, взаимодействуют между собой на плакетах. Фазовый переход в этой нерегулярной системе и будет соответствовать переходу между кварковой и барнионной фазами.

## 3. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ: ФРУСТРАЦИЯ

Прежде чем приступить к изучению фазового перехода в системе с гамильтонианом /7/, заметим, что при исследовании нерегулярных спиновых систем полезную роль играет понятие фрустрации /12,13/. Это понятие помогает выяснить некоторые особенности таких систем /14,15/.

Рассмотрим нерегулярную модель Изинга с гамильтонианом  $H_{\delta,\gamma=0}$  /см. /7// и введем функцию фрустрации

$$\Phi_C = \prod_C C_{ij}, \quad /8/$$

где  $C$  - замкнутый контур, проходящий по ребрам решетки  $Z^d$ . Если для заданной конфигурации поля  $\{C_{ij}\}$  имеем  $\Phi_C < 0$ , то спины вдоль контура  $C$  невозможно выстроить согласованно, т.е. так, чтобы их энергия взаимодействия достигла наименьшего возможного значения  $-L(C)$ , где  $L(C)$  - длина контура

/контур С называют в этом случае фрустрированным/. Это означает, что фрустрация препятствует установлению ферромагнитного /антиферромагнитного/ порядка. Нерегулярная модель Изинга называется полностью фрустрированной, если  $\Phi_P < 0$  для любого плакета P, и моделью без фрустрации в противоположном случае. Из выражения /6/ следует, что рассматриваемая нами модель калибровочного поля с группой  $Z_2$  на решетке  $Z^d$  /3/ эквивалентна нерегулярной ферромагнитной ( $\delta > 0$ ) модели Изинга со случайно фрустрированными плакетами. При этом вероятность фрустрации определяется фактором

$$(Z[H_{\delta,\gamma}])^{-1} e^{\gamma \sum_P C_{ij} C_{jk} C_{kl} C_{li}} \quad /9/$$

При  $\gamma \rightarrow +\infty$  /предел сильной связи/ число фрустрированных плакетов на решетке стремится к нулю, а при  $\gamma < +\infty$  вероятность появления фрустрированных плакетов отлична от нуля. Напротив, при  $\gamma \rightarrow -\infty$  стремится к нулю вероятность встретить на решетке нефрустрированный плакет. Поэтому этот предел соответствует полностью фрустрированной модели Изинга.

#### 4. ПРЕДЕЛ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ $\gamma = +\infty$ И СЛУЧАЙ $\gamma = 0$

Для "замороженных" антиферромагнитных примесных связей /конфигурация поля  $\{C_{ij}\}$  фиксирована/ фазовый переход в модели Изинга с гамильтонианом  $H_{\delta,\gamma=0}$  /7/ существенно зависит от концентрации фрустрированных плакетов<sup>/14-16/</sup>. Мы рассмотрим эту зависимость в случае "незамороженных" примесей для гамильтониана /7/.

#### Теорема 1.

При  $\gamma \rightarrow +\infty$  статистическая сумма /6/ выражается через статистическую сумму регулярной ферромагнитной модели Изинга, на решетке  $Z^d$ , со взаимодействием ближайших соседей и нулевым магнитным полем.

#### Доказательство

Статистическая сумма /6/ инвариантна относительно калибровочного преобразования  $C_{ij} \rightarrow C'_{ij} = \sigma_i C_{ij} \sigma_j$ , поэтому

$$Z[H_{\delta,\gamma}] = 2^N \sum_{\{C_{ij} = \pm 1\}} e^{-N\delta_\gamma [C]} \quad /10/$$

$$H_{\delta,\gamma}[C] = -\delta \sum_{(ij)} C_{ij} - \gamma \sum_P C_{ij} C_{jk} C_{kl} C_{li}$$

где N - число узлов решетки. При  $\gamma \rightarrow +\infty$  статистическая сумма /10/ соответствует суммированию по всем конфигурациям поля без фрустраций на плакетах, а именно:

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} e^{-\gamma \sum_P 1} Z[H_{\delta,\gamma}] = 2^N \sum_{\{C_{ij} = \pm 1, \Phi_P = +1\}} e^{\delta \sum_{(ij)} C_{ij}} \quad /11/$$

С другой стороны, рассмотрим на  $Z^d$  ферромагнитную модель Изинга со взаимодействием ближайших соседей:

$$H_I = -\delta \sum_{(ij)} \mu_i \mu_j, \quad \mu_i = \pm 1, \quad /12/$$

и введем новые переменные  $A_{ij} = \mu_i \mu_j$ , сосредоточенные на ребрах решетки  $Z^d$ . Статистическая сумма для модели Изинга /12/ тогда имеет вид

$$Z[H_I] = \sum'_{\{A_{ij} = \pm 1\}} e^{\delta \sum_{(ij)} A_{ij}} \quad /13/$$

где  $\sum'$  означает некоторое дополнительное условие на суммирование по конфигурациям поля  $\{A_{ij}\}$ , которое учитывает отсутствие независимости новых переменных. Из определения поля  $A_{ij}$  следует, что для любого плакета  $P = \{ijkl\}$

$$\Phi_P = A_{ij} A_{jk} A_{kl} A_{li} = +1.$$

Следовательно, дополнительные условия на суммирование в /11/ и /13/ совпадают, поэтому

$$\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} e^{-\gamma \sum_P 1} Z[H_{\delta, \gamma}] = 2^N Z[H_1].$$

#### Замечание 1.

Аналогичный результат имеет место для модели Изинга /7/ без фрустраций в случае "замороженных" примесей. В работе /15/ он доказан с помощью явного использования локального калибровочного преобразования  $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ ,  $C_{ij} \rightarrow -C_{ij}$  /для всех  $j$  /, которое оставляет инвариантным гамильтониан /7/.

#### Следствие 1.

В пределе сильной связи  $\gamma \rightarrow +\infty$  калибровочное поле /3/ на решетке  $Z^d$  при  $d \geq 2$  испытывает фазовый переход по параметру  $\delta$ .

#### Теорема 2.

При  $\gamma = 0$  калибровочное поле /3/ на решетке  $Z^d$  не имеет фазового перехода.

#### Доказательство

После локального калибровочного преобразования  $C_{ij} \rightarrow C'_{ij} = \sigma_i C_{ij} \sigma_j$  статистическая сумма  $Z[H_{\delta, \gamma=0}]$  /6/ с точностью до множителя совпадает со статистической суммой модели Изинга без взаимодействия во внешнем магнитном поле  $\delta$  /см. /10//.

#### Следствие 2.

Таким образом, появление в модели /3/ или /7/ "достаточного" количества фрустрированных плакетов /см. /9// приводит к исчезновению фазового перехода.

#### 5. СЛУЧАЙ КОНЕЧНОЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ $\gamma > 0$ И ПРЕДЕЛ $\gamma \rightarrow -\infty$

Эти случаи удается исследовать полностью лишь для плоской решетки  $Z^{d=2}$ .

#### Теорема 3.

В пределе  $\gamma \rightarrow -\infty$  в модели калибровочного поля /3/ на решетке  $Z^{d=2}$  фазовый переход отсутствует.

#### Доказательство

Из /9/ следует, что при  $\gamma \rightarrow -\infty$  каждая конфигурация поля  $\{C_{ij}\}$  в статистической сумме /6/ соответствует полностью фрустрированной модели Изинга. Поскольку все полностью фрустрированные модели Изинга на  $Z^{d=2}$  эквивалентны периодической модели с полной фрустрацией /15/, то статистическая сумма

$$\lim_{\gamma \rightarrow -\infty} e^{-\gamma \sum_P 1} Z[H_{\delta, \gamma}]$$

с точностью до множителя /число полностью фрустрированных конфигураций  $\{C_{ij}\}$ , умноженное на  $2^N$  / совпадает со статистической суммой периодической полностью фрустрированной модели. В последней, как известно /17/, фазовый переход отсутствует.

Для  $\gamma > 0$  воспользуемся преобразованием к переменным  $s_a = \pm 1$  на дуальной к  $Z^{d=2}$  решетке /8,10/. Статистическая сумма /10/ приводится тогда к виду:

$$Z[H_{\delta, \gamma}] = 2^N [(ch \delta)^2 \cdot ch \gamma]^N \sum_{\{s_a = \pm 1\}} \exp \left\{ \sum_a \frac{1}{2} (1 - s_a) \times \right.$$

$$\times \ln th \gamma + \sum_{(\alpha\beta)} 1/2 (1 - s_\alpha s_\beta) \ln th \delta \}.$$

который соответствует модели Изинга во внешнем поле  $h = -\ln th \gamma$ .  
Следовательно, имеет место

#### Теорема 4.

При  $0 < \gamma < +\infty$  в модели калибровочного поля /3/ на решетке  $Z^{d=2}$  фазовый переход отсутствует.

#### Замечание. 2.

Полученный результат означает, что на плоской решетке  $Z^{d=2}$  фазовый переход в системе /3/ или /7/ исчезает при сколь угодно малой концентрации фрустрированных плакетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Abers E.S., Lee B.W. *Phys.Reports*, 1973, 9C, p.1.
2. *Quark Confinement and Field Theory*, eds. D. Stump and D. Weingarten, N.Y. John Wiley & Sons, 1977.
3. Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*. "Наука", М., 1978.
4. *Proceedings of Les Houches Winter Advanced Study Institute (March 1978)*, *Phys.Reports*, 1979, 49C, p.91.
5. Politzer H.D. *Phys.Reports*, 1974, 14C, p.130.
6. Wilson K. *Phys.Rev.*, 1974, D10, p.2445.
7. Polyakov A.M. *Phys.Lett.*, 1975, 59B, p.82.  
t'Hooft G. *Nucl.Phys.*, 1978, B138, p.1.
8. Wilson K. *Erice Lecture*, CNLS-321, 1975;  
Creutz M. *Rev.Mod.Phys.* 1978, 50, p.561;  
Kogut J., Susskind L. *Phys.Rev.*, 1975, D11, p.395.
9. Balian R., Drouffe J.M., Itzykson C. *Phys.Rev.*, 1974, D10, p.3376;  
D11, p.2098 and 2104, 1975.
10. Drouffe J.M., Itzykson C. *Phys.Reports*, 1978, 38C, p.133.
11. Fradkin E., Susskind L. *Phys.Rev.*, 1978, D17, p.2637.
12. Toulouse G. *Comm. on Phys.*, 1977, 2, p.115.
13. Toulouse G. *The Frustration Model*, in *Proceedings of Karpacz Winter School*, 1979.

14. Kirkpatrick S. *Phys.Rev.*, 1977, B16, p.4630.
15. Загребнов В.А., Приезжев В.Б. *ОИЯИ*, P17-12543, Дубна, 1979.
16. Fradkin E., Huberman B.A., Shenker S.H. *Phys.Rev.*, 1978, B18, p.4789.
17. André G., et al. *J.Physique*, 1979, 40, p.479.

Рукопись поступила в издательский отдел  
25 июня 1979 года.