сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17 - 12553

А.М.Курбатов

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МОДЕЛИ ДИККЕ

1979

Курбатов А.М.

Р17 - 12553

Асимптотическая динамика модели Дикке

В квантово-статистической теории взаимодействия излучения с веществом на основе модели Дикке исследована термодинамическая асимптотика корреляционных функций. Получены строгие оценки асимптотической близости корреляционных функций по модельному и аппроксимирующему гамильтонианам. Последний представляет возможность самосогласованного независимого описания бозонной и квазиспиновой подсистем.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Р17 - 12553

Kurbatov A.M.

Asymptotic Dynamic of Dicke Model

In the quantum statistical theory of interaction of radiation with matter on the basis of the Dicke model the thermodynamic asymptotics of correlation functions is studied. Rigorous estimations for asymptotic proximity of the correlation functions of model and approximating hamiltonians are obtained. The latter gives us the possibility of self-consistent independent description of the boson and the quasi-spin subsystems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

I. ВВЕДЕНИЕ

В теории взаимодействия излучения с веществом большое значение имеет модель Дикке/I/, описывающая фазовый переход системы в сверхизлучающее состояние:

$$H = c^+c + \sqrt{V}\lambda\left[c^+S^- + cS^+\right] + \kappa S^z, \tag{I}$$

где

$$S^\alpha = \frac{1}{V}\sum_{l=1}^{N} S_l^\alpha, \quad (\alpha = +,-,z), \tag{2}$$

S_l^α - операторы Паули, c^+, c - бозе-операторы, V - объем системы, N - число частиц, λ, κ - положительные константы.

В работах/2-4/ исследовались термодинамические свойства гамильтониана (I), где было математически строго изучено поведение системы в пределе $V \to \infty$. Особый интерес представляет изучение динамики системы на языке многовременных корреляционных функций, что и является предметом настоящей работы.

В последнее время исследование проблемы вычисления корреляционных функций в рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов стимулировано работой/5/.

2. ОГРАНИЧЕННОСТЬ СРЕДНИХ $\left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^m\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^n\right\rangle_H$

Для исследования поведения корреляционных функций гамильтониана Дикке (I) нам будет необходимо доказать ограниченность по V средних

$$\left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^m\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^n\right\rangle_H . \tag{3}$$

А именно, введем в рассмотрение следующие операторы:

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda S^-\right), \\ B_2 &= \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda S^-\right), \end{aligned} \tag{4}$$

. . . .

$$B_r = \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{r-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda S^-\right) \tag{5}$$

. . . .

и докажем лемму.

<u>Лемма I</u>

Для любого r

$$\left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^r\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^r\right\rangle_H - \left\langle(\lambda S^+)^r(\lambda S^-)^r\right\rangle_H < \alpha_r \xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \tag{6}$$

$$\langle B_r^+ B_r\rangle_H < \beta_r = O(1/V^{2/3}) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \tag{7}$$

<u>Доказательство</u>

Доказательство будем проводить методом индукции. Соотношения (6), (7) для $r=1$ доказаны в работе /4/. Предположим, что (6), (7) выполнены для $r=\rho-1,\dots,1$ $(\rho\geq 2)$

$$\left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-p}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-p}\right\rangle_H - \left\langle(\lambda S^+)^{\rho-p}(\lambda S^-)^{\rho-p}\right\rangle_H < \alpha_{\rho-p} \xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \tag{8}$$

$$\langle B_{\rho-p}^+ B_{\rho-p}\rangle < \beta_{\rho-p} = O(1/V^{2/3}) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \tag{9}$$

$$p = 1,\dots,\rho-1$$

и докажем, что они справедливы и для $r=\rho$.

Заметим прежде всего, что из (8),(9) следует, что для $p=1,\dots,\rho-1$ для достаточно больших V

$$\left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-p}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-p}\right\rangle_H < 2\lambda^{2(\rho-p)}, \tag{10}$$

и

$$\begin{aligned} &\left|\left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-p}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-p-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda S^-\right)\right\rangle_H\right| \leq \\ &\leq \left\langle\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-p}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-p}\right\rangle_H^{1/2}\langle B_{\rho-p}^+ B_{\rho-p}\rangle_H^{1/2} < 2\lambda^{\rho-p}\beta_{\rho-p} = O\left(\frac{1}{V^{2/3}}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Воспользуемся неравенством Н.Н.Боголюбова (мл.)

$$\langle \mathcal{B}^+\mathcal{B}\rangle_{\mathcal{H}} \leq \int_0^1 \langle \mathcal{B}^+(z)\mathcal{B}\rangle_{\mathcal{H}}\,dz + \left(\frac{1}{\theta}\int_0^1 \langle \mathcal{B}^+(z)\mathcal{B}\rangle_{\mathcal{H}}\,dz\right)^{2/3}\left(\frac{1}{2}\langle \mathcal{C}\mathcal{C}^+ + \mathcal{C}^+\mathcal{C}\rangle_{\mathcal{H}}\right)^{1/3}, \tag{12}$$

где

$$\mathcal{B}(z) = e^{z\mathcal{H}/\theta}\mathcal{B}e^{-z\mathcal{H}/\theta}, \tag{13}$$

$$\mathcal{C} = [\mathcal{B},\mathcal{H}]. \tag{14}$$

Нетрудно убедиться, что

$$B_\rho^+(z) = \frac{1}{\rho}\theta\frac{d}{dz}\left[e^{z\frac{H}{\theta}}\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\rho e^{-z\frac{H}{\theta}}\right]. \tag{15}$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}\int_0^1 \langle B_\rho^+(z)B_\rho\rangle_H\,dz &= \frac{1}{\rho}\left\langle e^{\frac{H}{\theta}}\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\rho e^{-\frac{H}{\theta}}B_\rho - \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\rho B_\rho\right\rangle_H = \\ &= \frac{1}{\rho}\left\langle\left[B_\rho, \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\rho\right]\right\rangle_H . \end{aligned} \tag{16}$$

Оценим коммутатор

$$\left[B_\rho, \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\rho\right] = \left[\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda S^-\right), \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\rho\right] =$$

$$= \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\left[\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda \mathcal{S}^-\right), \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^p\right] + \sum_{\rho=1}^{p-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-\rho-1}\left[\frac{c}{\sqrt{V}}, \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^\rho\right]\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda \mathcal{S}^-\right) =$$

$$= \frac{p}{V}\left\{\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{p-1} + \sum_{\rho=1}^{p-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1-\rho}\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda \mathcal{S}^-\right)\right\}. \qquad (17)$$

Согласно теореме Вика и неравенствам (10),(11), для достаточно больших V

$$\left\langle \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\right\rangle_H < 2\,\lambda^{2(p-1)} + O\left(\frac{1}{V}\right), \qquad (18)$$

$$\left|\left\langle \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1-\rho}\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{\rho-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda \mathcal{S}^-\right)\right\rangle_H\right| <$$

$$< \sqrt{2}\,\lambda^{p-\rho}\,\beta_{p-\rho} + O\left(\frac{1}{V}\right) = O\left(\frac{1}{V^{2/3}}\right), \qquad (19)$$

откуда

$$\frac{1}{\theta}\int_0^1 \langle \mathcal{B}_p^+(\tau)\,\mathcal{B}_p\rangle_H\,d\tau \le \frac{1}{V}\Big\{2\,\lambda^{2(p-1)} +$$

$$+ \sqrt{2}\sum_{\rho=1}^{p-1}\lambda^{p-\rho}\,\beta_{p-\rho} + O\left(\frac{1}{V^{2/3}}\right)\Big\} \overset{\mathrm{df}}{=} \Big\{M + O\left(\frac{1}{V^{2/3}}\right)\Big\}, \qquad (20)$$

где

$$M = \mathrm{Const}.$$

Оценим величину $\langle R_p^+ R_p\rangle_H$, где

$$R_p = [\mathcal{B}_p, H]. \qquad (21)$$

Имеем

$$R_p = \left[\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda \mathcal{S}^-\right), H\right] =$$

$$= \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\left[\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda \mathcal{S}^-\right), H\right] + \sum_{\rho=1}^{p-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1-\rho}\left[\frac{c}{\sqrt{V}}, H\right]\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^\rho. \qquad (22)$$

Поскольку

$$\left[\frac{c}{\sqrt{V}}, H\right] = \left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda \mathcal{S}^-\right), \qquad (23)$$

и

$$[\mathcal{S}^-, H] = [\mathcal{S}^-, \kappa\mathcal{S}^z] + \lambda V[\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+]\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda \mathcal{S}^-\right) - \lambda^2 V[\mathcal{S}^-, \mathcal{S}^+]\,\mathcal{S}^-, \qquad (24)$$

получим

$$R_p = p\,\mathcal{B}_p + \lambda^2 V\left(-\frac{1}{V}\mathcal{S}^z\right)\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda \mathcal{S}^-\right) +$$

$$+ \lambda\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\left\{-\frac{\kappa}{V}\mathcal{S}^- - \lambda^2 V\left(-\frac{1}{V}\mathcal{S}^z\right)\mathcal{S}^-\right\}. \qquad (25)$$

На основании неравенства

$$\Big\langle \sum_i \mathcal{U}_i^+ \cdot \sum_i \mathcal{U}_i\Big\rangle_H \le \Big(\sum_i \langle \mathcal{U}_i^+ \mathcal{U}_i\rangle_H^{1/2}\Big)^2 \qquad (26)$$

имеем

$$\langle R_p^+ R_p\rangle_H \le \Big\{p\,\langle \mathcal{B}_p^+ \mathcal{B}_p\rangle_H^{1/2} + \lambda^2\Big\langle \mathcal{B}_p^+\left(-\frac{1}{V}\mathcal{S}^z\right)^+ V\left(-\frac{1}{V}\mathcal{S}^z\right)\mathcal{B}_p\Big\rangle_H^{1/2} +$$

$$+ \lambda^2\Big\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\left(-\frac{\kappa}{V}\mathcal{S}^-\right)^+\left(-\frac{\kappa}{V}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\Big\rangle_H^{1/2} +$$

$$+ \lambda^3\Big\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\mathcal{S}^+\left(-\frac{1}{V}\mathcal{S}^z\right)^+ V^2\left(-\frac{1}{V}\mathcal{S}^z\right)\mathcal{S}^-\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{p-1}\Big\rangle_H^{1/2}. \qquad (27)$$

Воспользуемся теперь тем фактом, что, если мы имеем операторное неравенство

$$\mathcal{U} \le \mathcal{B}, \quad (\mathcal{U}^+ = \mathcal{U},\ \mathcal{B}^+ = \mathcal{B}), \qquad (28)$$

то при любом операторе $\mathcal{V}$ также справедливо неравенство

$$\mathcal{V}^+\mathcal{U}\mathcal{V} \le \mathcal{V}^+\mathcal{B}\mathcal{V}. \qquad (29)$$

Поскольку, согласно определению (3),

$$(\mathcal{S}^z)^2 \le 1, \quad \mathcal{S}^+(\mathcal{S}^z)^2\mathcal{S}^- \le 1, \quad (\mathcal{S}^-)^2 \le 1, \qquad (30)$$

имеем

$$\langle R_p^+ R_p\rangle_H \le \Big\{(\rho+\lambda^2)\langle b_p^+ b_p\rangle_H^{1/2} + \lambda^2(1+\lambda)\Big\langle \Big(\frac{c^+}{\sqrt V}\Big)^{p-1}\Big(\frac{c}{\sqrt V}\Big)^{p-1}\Big\rangle_H^{1/2}\Big\}^2. \qquad (31)$$

Принимая во внимание (10), с помощью неравенства Коши - Буняковского найдем

$$\langle R_p^+ R_p\rangle_H \le \{(\rho+\lambda^2)\langle b_p^+ b_p\rangle_H^{1/2} + \sqrt{2}\,\lambda^2\lambda^{p-1}(1+\lambda)\}^2 \le \qquad (32)$$

$$\le [(\rho+\lambda^2)^2 + 2\lambda^4\lambda^{2(p-1)}(1+\lambda)^2][\langle b_p^+ b_p\rangle_H + 1] =$$

$$L^3[\langle b_p^+ b_p\rangle_H + 1], \qquad (33)$$

где

$$L = Const.$$

Точно такая же оценка (33) может быть получена и для $\langle R_p R_p^+\rangle_H$.
В результате

$$\frac{1}{2}\langle R_p^+ R_p + R_p R_p^+\rangle_H \le L^3[\langle b_p^+ b_p\rangle_H + 1], \qquad (34)$$

откуда

$$\Big(\frac{1}{2}\langle R_p^+ R_p + R_p R_p^+\rangle_H\Big)^{1/3} \le L[\langle b_p^+ b_p\rangle_H^{1/3} + 1]. \qquad (35)$$

Подставляя (35) и (20) в неравенство (I2), получаем

$$\langle b_p^+ b_p\rangle_H \le \frac{\theta M}{V}(1+O(1/V^{2/3})) + \Big(\frac{M}{V}\Big)^{2/3}\{(1+O(1/V^{2/3}))\cdot L[\langle b_p^+ b_p\rangle_H^{1/3}+1]\} \qquad (36)$$

или

$$\langle b_p^+ b_p\rangle_H \le \Big[\Big(\frac{M}{V}\Big)^{2/3} + O(1/V^{2/3})\Big]\langle b_p^+ b_p\rangle_H^{1/3} + \frac{\theta M}{V} + \frac{M^{2/3}L}{V^{2/3}} + O(1/V^{2/3}). \qquad (37)$$

Неравенство (37) имеет вид

$$x \le a x^{1/3} + b, \qquad (38)$$

откуда следует, что

$$x < 2^{3/2}a + 2b. \qquad (39)$$

Стало быть, окончательно

$$\langle b_p^+ b_p\rangle_H < \frac{2^{3/2}M^{2/3}L}{V^{2/3}} + \frac{2M^{2/3}L}{V^{2/3}} + \frac{\theta M}{V} + O\Big(\frac{1}{V^{2/3}}\Big) = \beta_p = O\Big(\frac{1}{V^{2/3}}\Big) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \qquad (40)$$

Таким образом, соотношение (9) доказано.
Докажем (8). Нетрудно убедиться, что

$$\Big\langle\Big(\frac{c^+}{\sqrt V}\Big)^P\Big(\frac{c}{\sqrt V}\Big)^P\Big\rangle_H - \langle(\lambda S^+)^P(\lambda S^-)^P\rangle_H =$$

$$= \sum_{p=1}^{P}\Big\{\Big\langle\Big(\frac{c^+}{\sqrt V}+\lambda S^+\Big)\Big(\frac{c^+}{\sqrt V}\Big)^{P-p}(\lambda S^+)^{p-1}(\lambda S^-)^{p-1}\Big(\frac{c}{\sqrt V}\Big)^{P-p}\Big(\frac{c}{\sqrt V}+\lambda S^-\Big)\Big\rangle_H -$$

$$- \Big\langle\Big(\frac{c^+}{\sqrt V}\Big)^{P-p}(\lambda S^+)^p(\lambda S^-)^{p-1}\Big(\frac{c}{\sqrt V}\Big)^{P-p}\Big(\frac{c}{\sqrt V}+\lambda S^-\Big)\Big\rangle_H -$$

$$- \Big\langle\Big(\frac{c^+}{\sqrt V}+\lambda S^+\Big)\Big(\frac{c^+}{\sqrt V}\Big)^{P-p}(\lambda S^+)^{p-1}(\lambda S^-)^p\Big(\frac{c}{\sqrt V}\Big)^{P-p}\Big\rangle_H\Big\}. \qquad (4I)$$

Учитывая свойство (28),(29), на основании (4I) найдем

$$\Big\langle\Big(\frac{c^+}{\sqrt V}\Big)^P\Big(\frac{c}{\sqrt V}\Big)^P\Big\rangle_H - \langle(\lambda S^+)^P(\lambda S^-)^P\rangle_H \le$$

$$\le \sum_{p=1}^{P}\lambda^{2(p-1)}\{\beta_{P-p+1} + 2\lambda^{P-p+1}\sqrt{\beta_{P-p+1}}\} = \alpha_P \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \qquad (42)$$

Т.е. соотношение (6) также доказано.

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Мы будем рассматривать корреляционные функции вида

$$\langle S_{l_1}(t_1)\ldots S_{l_k}(t_k)\,\mathfrak{A}_l(t_l)\rangle_H , \tag{43}$$

где S_{l_j} представляет собой либо оператор $S^{+}_{l_j}$, либо $S^{-}_{l_j}$,

$$\mathfrak{A}_l=\left(\frac{c^{+}}{\sqrt{V}}\right)^{m}\left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^{n}, \tag{44}$$

и $S_l(t)$ и $\mathfrak{A}_l(t)$ – соответственно операторы S_l и $\mathfrak{A}_l$ в гайзенберговском представлении

$$S_l(t)=e^{iHt}S_l e^{-iHt}, \qquad \mathfrak{A}_l(t)=e^{iHt}\mathfrak{A}_l e^{-iHt}. \tag{45}$$

Нашей задачей является показать, что корреляционные функции вида (43) для гамильтониана Дикке могут быть вычислены точно в термодинамическом пределе на основе корреляционных функций для аппроксимирующего гамильтониана /3,4/:

$$H_0(\mathfrak{s})=-V\lambda^2(\mathfrak{s}^{+}S^{-}+\mathfrak{s}^{-}S^{+})+V\varkappa S^{z}, \tag{46}$$

где c-числовые параметры $\mathfrak{s}^{+},\mathfrak{s}^{-}$ определяются исходя из условия абсолютного минимума для функции свободной энергии $f_V[H_0(s)+s^{+}s^{-}]$.

Заметим, что

$$H=H_0+H' , \tag{47}$$

где

$$H'=-V\lambda^2(S^{+}-\mathfrak{s}^{+})(S^{-}-\mathfrak{s}^{-})+V\left(\frac{c^{+}}{\sqrt{V}}-\lambda S^{+}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{V}}+\lambda S^{-}\right)+V\lambda^2\mathfrak{s}^{+}\mathfrak{s}^{-}. \tag{48}$$

Введем

$$\overline{\mathfrak{A}}(t)=e^{iHt}e^{-iH_0t}\mathfrak{A}e^{iH_0t}e^{-iHt}, \tag{49}$$

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(t)=e^{iH_0t}\mathfrak{A}e^{-iH_0t}, \tag{50}$$

т.е. $\widetilde{\mathfrak{A}}(t)$ является оператором $\mathfrak{A}$ в гайзенберговском представлении для системы с аппроксимирующим гамильтонианом (46).

Пусть $\mathfrak{A}_l$ – произвольный ограниченный оператор, действующий только на переменную n_l "числа частиц" $S_l^{+}S_l^{-}$ в l -ом узле. Оценим разность

$$|\langle\overline{\mathfrak{A}}_{l_1}(t_1)\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_k}(t_k)\overline{\mathfrak{A}}_l(t_l)\rangle_H-\langle\overline{\mathfrak{A}}_{l_1}(t_l)\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_k}(t_l)\overline{\mathfrak{A}}_l(t_l)\rangle_H . \tag{51}$$

Обозначая

$$\mathfrak{A}_l=\mathfrak{A}_{l_{k+1}},\quad t_l=t_{k+1}, \tag{52}$$

имеем

$$\begin{aligned}
&|\langle\overline{\mathfrak{A}}_{l_1}(t_1)\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_{k+1}}(t_{k+1})\rangle_H-\langle\overline{\mathfrak{A}}_{l_1}(t_{k+1})\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_{k+1}}(t_{k+1})\rangle_H\le\\
&\le\sum_{j=1}^{k}|\langle\overline{\mathfrak{A}}_{l_1}(t_j)\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_j}(t_j)\overline{\mathfrak{A}}_{l_{j+1}}(t_{j+1})\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_{k+1}}(t_{k+1})\rangle_H-\\
&-\langle\overline{\mathfrak{A}}_{l_1}(t_{j+1})\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_j}(t_{j+1})\overline{\mathfrak{A}}_{l_{j+1}}(t_{j+1})\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_{k+1}}(t_{k+1})\rangle_H|=\\
&=\sum_{j=1}^{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\Big\{\Big\langle\frac{d\,\overline{\mathfrak{A}}_{l_1}(z)\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_j}(z)}{dz}\cdot\frac{d\,\overline{\mathfrak{A}}^{+}_{l_j}(z)\ldots\overline{\mathfrak{A}}^{+}_{l_1}(z)}{dz}\Big\rangle_H\times\\
&\times\langle\overline{\mathfrak{A}}^{+}_{l_{k+1}}(t_{k+1})\ldots\overline{\mathfrak{A}}^{+}_{l_{j+1}}(t_{j+1})\overline{\mathfrak{A}}_{l_{j+1}}(t_{j+1})\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_{j+1}}(t_{j+1})\rangle_H\Big\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{53}$$

Согласно (28),(29) и(IO),имеем

$$\begin{aligned}
&\langle\overline{\mathfrak{A}}^{+}_{l_{k+1}}(t_{k+1})\ldots\overline{\mathfrak{A}}^{+}_{l_{j+1}}(t_{j+1})\overline{\mathfrak{A}}_{l_{j+1}}(t_{j+1})\ldots\overline{\mathfrak{A}}_{l_{k+1}}(t_{k+1})\rangle_H\le\\
&\le A^{2(k-j)}\langle\overline{\mathfrak{A}}^{+}_l(t_l)\overline{\mathfrak{A}}_l(t_l)\rangle_H=A^{2(k-j)}\langle\mathfrak{A}^{+}_l(t_l)\mathfrak{A}_l(t_l)\rangle_H=\\
&=A^{2(k-j)}\langle\mathfrak{A}^{+}_l\mathfrak{A}_l\rangle\le A^{2(k-j)}\lambda^{2(m+n)}(1+O(1/V)).
\end{aligned} \tag{54}$$

Рассмотрим коммутатор

$$[\mathfrak{A}_l, H] = -\lambda^2 [\mathfrak{A}_l, \mathfrak{S}_l^+](S^- - s^-) - \lambda^2 (S^+ - s^+)[\mathfrak{A}_l, \mathfrak{S}_l^-] +$$
$$+ \lambda [\mathfrak{A}_l, \mathfrak{S}_l^+]\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda S^+\right) + \lambda\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}} + \lambda S^+\right)[\mathfrak{A}_l, \mathfrak{S}_l^-] =$$
$$= \lambda\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda s^-\right)[\mathfrak{A}_l, \mathfrak{S}_l^+] + \lambda\left(\frac{c^+}{\sqrt{V}} + \lambda s^+\right)[\mathfrak{A}_l, \mathfrak{S}_l^-]. \tag{55}$$

В работе /4/ показано, что

$$\langle (S^+ - s^+)(S^- - s^-)\rangle_H \le \delta_V = O(1/V^{2/5}) \tag{56}$$

$$\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}} + \lambda S^+\right)\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda S^-\right)\right\rangle_H \le \eta_V = O(1/V^{2/5}), \tag{57}$$

откуда следует, что

$$\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}} + \lambda s^+\right)\left(\frac{c}{\sqrt{V}} + \lambda s^-\right)\right\rangle_H \le \delta_V + \eta_V + 2\sqrt{\delta_V \eta_V} = O(1/V^{2/5}). \tag{58}$$

Из соотношений (55) и (57) с помощью оценки (10), свойства (28), (29) следует неравенство

$$\langle [\mathfrak{A}_l, H]^+ [\mathfrak{A}_l, H]\rangle_H \le \eta_V \|\mathfrak{A}_l\|^2, \quad l = 1, \dots, N,$$
$$\eta_V \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \tag{59}$$

Кроме того, в силу перестановочности $\mathfrak{S}_l$ и $\mathfrak{S}_{l'}$ при $l \ne l'$

$$[\mathfrak{A}_{l'}, [\mathfrak{A}_l, H]] = 0, \quad l, l' = 1, \dots, N, \quad l \ne l'. \tag{60}$$

В работе /5/ показано, что из условий (59), (60) следует оценка ($j \le k$)

$$\left\langle \frac{d\bar{\mathfrak{A}}_l(\tau)\dots\bar{\mathfrak{A}}_{l_j}(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\bar{\mathfrak{A}}^+_{l_j}(\tau)\dots\bar{\mathfrak{A}}^+_l(\tau)}{d\tau}\right\rangle_H \le j\,\eta_V\,\mathbb{A}^{2j}, \tag{61}$$

откуда, принимая во внимание (54), находим

$$|\langle \bar{\mathfrak{A}}_{l_1}(t_1)\dots\bar{\mathfrak{A}}_{l_k}(t_k)\bar{\mathfrak{A}}_l(t_l)\rangle_H - \langle \bar{\mathfrak{A}}_{l_1}(t_l)\dots\bar{\mathfrak{A}}_{l_k}(t_l)\bar{\mathfrak{A}}_l(t_l)\rangle_H| \le$$
$$\le \mathbb{A}^k \lambda^{m+n} \sum_{j=1}^{k} j\,|t_{j+1} - t_j| \cdot \sqrt{\eta_V}\,(1 + O(1/V)). \tag{62}$$

Заметим, что

$$\langle \bar{\mathfrak{A}}_{l_1}(t_l)\dots\bar{\mathfrak{A}}_{l_k}(t_l)\bar{\mathfrak{A}}_l(t_l)\rangle_H = \langle e^{iHt}\tilde{\mathfrak{A}}_{l_1}(-t_l)\dots\tilde{\mathfrak{A}}_{l_k}(-t_l)\tilde{\mathfrak{A}}_l(-t_l)e^{-iHt}\rangle_H =$$
$$= \langle \tilde{\mathfrak{A}}_{l_1}(-t_l)\dots\tilde{\mathfrak{A}}_{l_k}(-t_l)\tilde{\mathfrak{A}}_l(-t_l)\rangle_H. \tag{63}$$

Тогда, полагая в (62)

$$\mathfrak{A}_{l_j} = \tilde{\mathfrak{S}}_{l_j}(t_j), \tag{64}$$

и учитывая тот факт, что

$$\tilde{\mathfrak{A}}_l(t) = \mathfrak{A}_l, \tag{65}$$

получаем

$$|\langle \mathfrak{S}_{l_1}(t_1)\dots\mathfrak{S}_{l_k}(t_k)\mathfrak{A}_l(t_l)\rangle_H - \langle \tilde{\mathfrak{S}}_{l_1}(t_1 - t_l)\dots\tilde{\mathfrak{S}}_{l_k}(t_k - t_l)\mathfrak{A}_l\rangle_H| \le$$
$$\le \mathbb{A}^k \lambda^{m+n} \sum_{j=1}^{k} j\,|t_{j+1} - t_j| \cdot \sqrt{\eta_V} \cdot (1 + O(1/V)). \tag{66}$$

Для дальнейшего нам будет полезна

<u>Лемма 2</u>

Для любого ограниченного оператора W

$$\left|\left\langle \left(\frac{c^+}{\sqrt{V}}\right)^m W \left(\frac{c}{\sqrt{V}}\right)^n\right\rangle_H - \langle (-\lambda S^+)^m W (-\lambda S^-)^n\rangle\right| \le \|W\|\,\varepsilon_{mn},$$
$$\varepsilon_{mn} \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \tag{67}$$

Доказательство

Доказательство проведем по индукции. Для $m=n=0$ (67) выполняется тривиально. Предположим, что (67) справедливо для $m=\mu-1$, $n=\nu-1$ и докажем его для $m=\mu$, $n=\nu-1$ ($\mu,\nu\geq 1$). Имеем:

$$\langle (\frac{c^+}{\sqrt V})^\mu W (\frac{c}{\sqrt V})^{\nu-1}\rangle_H = \langle (\frac{c^+}{\sqrt V} + \lambda S^+)(\frac{c^+}{\sqrt V})^{\mu-1} W(\frac{c}{\sqrt V})^{\nu-1}\rangle_H +$$

$$+[\langle(-\lambda S^+)(\frac{c^+}{\sqrt V})^{\mu-1}W(\frac{c}{\sqrt V})^{\nu-1}\rangle_H - \langle(-\lambda S^+)^{\mu-1}(-\lambda S^+)W(-\lambda S^-)^{\nu-1}\rangle_H] +$$

$$+\langle(-\lambda S^+)^\mu W(-\lambda S^-)^{\nu-1}\rangle_H. \qquad (68)$$

Согласно неравенствам (9),(10), принимая во внимание (28),(29), получаем

$$|\langle(\frac{c^+}{\sqrt V}+\lambda S^+)(\frac{c^+}{\sqrt V})^{\mu-1}W(\frac{c}{\sqrt V})^{\nu-1}\rangle_H| \le$$

$$\le \sqrt{\langle b_\mu^+ b_\mu\rangle_H}\sqrt{(\frac{c^+}{\sqrt V})^{\nu-1} W^+ W (\frac{c}{\sqrt V})^{\nu-1}} \le \|W\|\sqrt{\beta_\mu}\, 2\lambda^{\nu-1} \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \qquad (69)$$

Следовательно, в силу предположения индукции

$$|\langle(\frac{c^+}{\sqrt V})^\mu W(\frac{c}{\sqrt V})^{\nu-1}\rangle_H - \langle(-\lambda S^+)^\mu W(-\lambda S^-)^\nu\rangle_H| \le$$

$$\le \|W\|[A\varepsilon_{\mu-1,\nu-1} + 2\lambda^{\nu-1}\sqrt{\beta_\mu}] = \|W\|\cdot\varepsilon_{\mu,\nu-1}, \qquad (70)$$

$$\varepsilon_{\mu,\nu-1}\xrightarrow[V\to\infty]{}0$$

Аналогично доказывается соотношение (67) и для $m=\mu-1$, $n=\nu$, что позволяет заключить, что (67) справедливо для произвольных m и n.

Таким образом, по лемме 2 из (66) следует

$$|\langle\tilde S_{l_1}(t_1-t_k)\dots\tilde S_{l_k}(t_k-t_k)(\frac{c^+}{\sqrt V})^m(\frac{c}{\sqrt V})^n\rangle_H -$$

$$-\langle(-\lambda S^+)\tilde S_{l_1}(t_1-t_k)\dots\tilde S_{l_k}(t_k-t_k)(-\lambda S^-)^n\rangle_H| \le A^k\varepsilon_{m,n}, \qquad (71)$$

$$\varepsilon_{m,n}\xrightarrow[V\to\infty]{}0\,..$$

С другой стороны,

$$\langle(-\lambda S^+)^m\tilde S_{l_1}(t_1-t_k)\dots\tilde S_{l_k}(t_k-t_k)(-\lambda S^-)\rangle_H =$$

$$=\frac{1}{V^{m+n}}(-\lambda)^{m+n}\sum_{l^{(1)},\dots,l^{(m+n)}=1}^{N}\langle S^+_{l^{(1)}}\dots S^+_{l^{(m)}}\tilde S_{l_1}(t_1-t_k)\dots\tilde S_{l_k}(t_k-t_k)S^-_{l^{(m+1)}}\dots S^-_{l^{(m+n)}}\rangle \qquad (72)$$

Как показано в работе /5/,

$$|\langle S^+_{l^{(1)}}\dots S^+_{l^{(m)}}\tilde S_{l_1}(t_1-t_k)\dots\tilde S_{l_k}(t_k-t_k)S^-_{l^{(m+1)}}\dots S^-_{l^{(m+n)}}\rangle_H -$$

$$-\langle S^+_{l^{(1)}}\dots S^+_{l^{(m)}}\bar S_{l_1}(t_1-t_k)\dots\bar S_{l_k}(t_k-t_k)S^-_{l^{(m+1)}}\dots S^-_{l^{(m+n)}}\rangle_{H_0}| \le \qquad (73)$$

$$\le A^{k+m+n}\cdot\xi_V\xrightarrow[V\to\infty]{}0,$$

откуда, учитывая, что

$$1\le l^{(1)}, l^{(2)},\dots,l^{(m+n)}\le N \qquad (74)$$

и

$$\langle S^+_{l^{(1)}}\dots S^+_{l^{(m)}}\tilde S_{l_1}(t_1-t_k)\dots\tilde S_{l_k}(t_k-t_k)S^-_{l^{(m+1)}}\dots S^-_{l^{(m+n)}}\rangle_{H_0}=$$

$$=\langle\tilde S^+_{l^{(1)}}(t_k)\dots\tilde S^+_{l^{(m)}}(t_k)\tilde S_{l_1}(t_1)\dots\tilde S_{l_k}(t_k)\tilde S^-_{l^{(m+1)}}(t_k)\dots\tilde S^-_{l^{(m+n)}}(t_k)\rangle_{H_0}, \qquad (75)$$

получаем

$$|\langle(-\lambda S^+)^m\tilde S_{l_1}(t_1-t_k)\dots\tilde S_{l_k}(t_k-t_k)(-\lambda S^-)^n\rangle_H -$$

$$-(\frac1V)^{m+n}\sum_{l^{(1)},\dots,l^{(m+n)}=1}^{N}\langle\tilde S^+_{l^{(1)}}(t_k)\dots\tilde S^+_{l^{(m)}}(t_k)\tilde S_{l_1}(t_1)\dots\tilde S_{l_k}(t_k)\tilde S^-_{l^{(m+1)}}(t_k)\dots\tilde S^-_{l^{(m+n)}}(t_k)\rangle_{H_0}| \le$$

$$\le n_0^{m+n}\lambda^{m+n}A^{k+m+n}\xi_V, \qquad (76)$$

где

$$n_0 = N/V = \mathrm{Const}. \tag{77}$$

Таким образом, на основании неравенств (67), (71), (76), окончательно получаем

$$\Big|\langle \mathcal{S}_{l_1}(t_1)\dots\mathcal{S}_{l_k}(t_k)\,\mathcal{U}_c(t_c)\rangle_H -$$

$$-\left(\frac{\lambda}{V}\right)^{m+n}\sum_{l^{(1)},\dots,l^{(m+n)}=1}^{N}\langle \tilde{S}^{+}_{l^{(1)}}(t_c)\dots\tilde{S}^{+}_{l^{(m)}}(t_c)\tilde{S}_{l_1}(t_1)\dots\tilde{S}_{l_k}(t_k)\tilde{S}^{-}_{l^{(m+1)}}(t_c)\dots\tilde{S}^{-}_{l^{(m+n)}}(t_c)\rangle_G\Big| \le$$

$$\le \varkappa_V \xrightarrow[V\to\infty]{} 0 \tag{78}$$

или

$$\Big|\langle \mathcal{S}_{l_1}(t_1)\dots\mathcal{S}_{l_k}(t_k)\,\mathcal{U}_c(t_c)\rangle_H -$$

$$-\langle(-\lambda\tilde{S}^{+}(t_c))^{m}\tilde{S}_{l_1}(t_1)\dots\tilde{S}_{l_k}(t_k)(-\lambda\tilde{S}^{-}(t_c))^{n}\rangle_G\Big| \le$$

$$\le \varkappa_V \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \tag{79}$$

Тем самым доказано совпадение в термодинамическом пределе корреляционных функций, отвечающих модели Дикке и аппроксимирующей системе (46), что и позволяет описать динамику модели Дикке в предельном термодинамическом смысле на основе гамильтониана (46).

Автор искренне признателен Н.Н.Боголюбову(мл.) и А.Н.Ермилову за обсуждение данной темы.

Литература.

1. R.H.Dicke. Phys.Rev., 93, 99, 1954.
2. K.Hepp, E.H.Lieb. Ann.Phys., 76, 360, 1973.
3. Й.Г.Бранков, В.А.Загребнов, Н.С.Тончев. ТМФ, 22, 20, 1975.
4. Н.Н.Боголюбов(мл.), А.М.Курбатов, В.Н.Плечко. Сообщение ОИЯИ, Д17-9737, Дубна, 1976.
5. Н.Н.Боголюбов(мл.). ТМФ, 33, 67, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 июня 1979 года.