объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17 - 12543

В.А.Загребнов, В.Б.Приезжев

О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ В СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ С ФРУСТРАЦИЕЙ

1979

Р17 - 12543

В.А.Загребнов, В.Б.Приезжев

О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ В СПИНОВЫХ СИСТЕМАХ С ФРУСТРАЦИЕЙ

Направлено в ТМФ

Загребнов В.А., Приезжев В.Б.

P17 - 12543

О фазовых переходах в спиновых системах с фрустрацией

Рассмотрены ферромагнитные спиновые модели, фрустрированные случайными антиферромагнитными связями. Показано, что случайная система без фрустраций эквивалентна для любой размерности регулярной системе без антиферромагнитных связей. В случае размерностей два и три показано, что полностью фрустрированные модели на квадратной и кубической решетках совпадают с соответствующими периодическими полностью фрустрированными моделями. Указан явный вид локального преобразования каждой из рассматриваемых моделей в эквивалентную. Доказано, что для полностью фрустрированной двумерной модели Изинга на квадратной решетке фазовый переход отсутствует.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Zagrebnov V.A., Priezzhev V.B.

P17 - 12543

On Phase Transitions in Spin Systems with Frustration

Ferromagnetic spin systems frustrated by random antiferromagnetic bounds are considered. We show that for arbitrary dimensions $d \geq 2$ the random system without frustration is equivalent to regular one without antiferromagnetic bounds. In two and three dimensions a fully frustrated systems on the square and cubic lattices are shown to be equivalent to corresponding periodic fully frustrated systems. An explicit form for local gauge transformations performing each of considered system to equivalent one are described. We prove that there is no phase transition in fully frustrated two-dimentional Ising model on square lattice.

The investigations has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время развитие теории нерегулярных спиновых систем /спиновых стекол/ связано с введением понятий локального калибровочного преобразования и фрустрации [1,2]. Введение этих понятий позволило установить связь нерегулярных спиновых систем с калибровочными теориями поля на решетке [3-6]. Основной проблемой, возникающей при изучении таких систем, является определение условий существования фазовых переходов. Поэтому большой интерес в теории спиновых стекол представляют работы, в которых получены строгие результаты или предложены точно решаемые модели /см., например, [7]/.

Ниже будет рассмотрена простейшая спиновая система - модель Изинга с гамильтонианом:

$$H_N = -\sum_{(i,j)} J_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j\ ;\quad \sigma_i = \pm 1\ ;\ i,j = 1,2,\ldots,N\ , \qquad /1/$$

где i, j - индексы узлов d -мерной решетки, и суммирование проводится по всем парам ближайших соседей. Нерегулярности, которые мы будем рассматривать, заключаются в замене некоторых ферромагнитных связей $J_{ij} = J > 0$ на антиферромагнитные $J_{ij} = -J$. Наличие нерегулярности препятствует возникновению фазового перехода и может, в принципе, привести к его исчезновению. Невозможность установления ферромагнитного /или антиферромагнитного/ порядка характеризуется функцией фрустрации [1,2]:

$$\Phi_c = \prod_c J_{ij}. \qquad /2/$$

Здесь перемножение факторов J_{ij} производится по произвольному замкнутому контуру С на решетке. В случае $\Phi_c < 0$ спины вдоль контура нельзя выстроить согласованно, т.е. так, чтобы их энергия была равна $-L(C)J$, где $L(C)$ - длина контура С. Если функция фрустрации /2/ отрицательна для любого элементарного контура Р, модель называется полностью фрустрированной. Заметим, что отсутствие фрустрации на произвольном контуре С означает ее отсутствие на любом элементарном контуре, который называется плакетом. Наоборот, в случае полной фрустрации для любого плакета $\Phi_p = \Phi_{ijk\ell} < 0$, где i, j, k, ℓ - узлы решетки, принадлежащие плакету /для кубической решетки Z^d /.

Важным свойством гамильтониана /1/является его инвариантность относительно локального преобразования:

$$\sigma_i \to -\sigma_i$$

$$J_{ij} \to -J_{ij} \quad \text{/для всех j /.} \qquad /3/$$

Это преобразование, оставляя инвариантной статсумму, позволяет переходить от исходной нерегулярной системы к эквивалентной ей системе, которая может оказаться более простой. В этой заметке мы покажем, как, пользуясь введенными понятиями, можно установить наличие или отсутствие фазового перехода в нерегулярных спиновых системах /1/ без фрустрации и в полностью фрустрированных системах.

Заметим, что функция фрустрации Φ_c также является инвариантной относительно локальных преобразований /3/, поэтому эти преобразования не изменяют число и конфигурацию фрустрированных плакетов. Следовательно, статистическая сумма системы /1/ не зависит от числа и конфигурации антиферромагнитных связей $\{J_{ij} = -J\}$, а может зависеть, по крайней мере, лишь от числа и конфигурации фрустрированных плакетов. Киркпатрик /8/ показал это в явном виде для решетки Z^d. Он заметил, что статистическая сумма исходной модели /1/

$$Z = \operatorname*{Tr}_{\{\sigma\}} \prod_{(ij)} \exp(\beta J_{ij} \sigma_i \sigma_j), \quad \beta = (k_B T)^{-1} \qquad /4/$$

может быть переписана в псевдоспиновых переменных

$$\mu_{ij} = \sigma_i \sigma_j \operatorname{sign}(J_{ij})$$

в следующем виде:

$$Z = \operatorname*{Tr}_{\{\mu\}} \{ \prod_{(i,j)} \exp(\beta\, |J_{ij}|\, \mu_{ij}) \times \prod_{[i,j,k,\ell]} \frac{1}{2}(1 + \Phi_{ijk\ell}\, \mu_{ij}\mu_{jk}\mu_{k\ell}\mu_{\ell i}) \}.$$

Из последнего выражения следует, что нерегулярности входят в статистическую сумму /4/ только через функцию фрустрации и, следовательно, все системы, имеющие одинаковые наборы фрустрированных плакетов, эквивалентны. Отсюда, в частности, сразу вытекает, что модель Изинга /1/ без фрустраций эквивалентна ферромагнитной /антиферромагнитной/ модели Изинга.

Возникает вопрос: существует ли последовательность локальных преобразований /3/,переводящая одну нерегулярную систему в другую из того же класса эквивалентности? Ниже мы покажем, что указанная эквивалентность может быть установлена с помощью локальных преобразований /3/ и укажем их явный вид для полностью фрустрированной модели Изинга и модели Изинга без фрустраций.

2. МОДЕЛЬ ИЗИНГА БЕЗ ФРУСТРАЦИЙ

Рассмотрим d-мерную модель на произвольной решетке, описываемую гамильтонианом /1/ со случайными антиферромагнитными связями, такими, что $\Phi_c > 0$ для любого замкнутого контура - модель Изинга без фрустраций. Назовем произведение $Ц_{i_1 i_n} = J_{i_1 i_2} J_{i_2 i_3} \dots J_{i_{n-1} i_n}$ по произвольному незамкнутому контуру, проходящему через узлы решетки $i_1, i_2, \dots, i_n$, цепью между спинами в узлах i_1 и i_n. Цепь будем называть ферромагнитной, если она содержит четное число отрицательных сомножителей $J_{ij} < 0$, и антиферромагнитной, если их число нечетно.

Лемма 1.

Пусть i и j - два произвольных узла d-мерной решетки в модели Изинга /1/ без фрустраций, и пусть между i и j существует хотя бы одна ферромагнитная /антиферромагнитная/ цепь. Тогда все остальные цепи, соединяющие i и j, ферромагнитны /антиферромагнитны/.

Доказательство

Предположим обратное и заметим, что любая цепь между i и j может быть получена из исходной путем последовательного присоединения плакетов $\{P_k\}$. Тогда должны существовать две цепи, одна ферромагнитная $Ц_{ij}$, другая антиферромагнитная $Ц'_{ij}$, отличающиеся друг от друга на множитель

$$\prod_k \Phi_{P_k} < 0\,, \qquad /5/$$

что противоречит условиям леммы.

Теорема 1.

Для любой решетки размерности d существует последовательность локальных преобразований /3/ такая, что нерегулярная модель Изинга /1/ без фрустраций переходит в регулярную ферромагнитную модель.

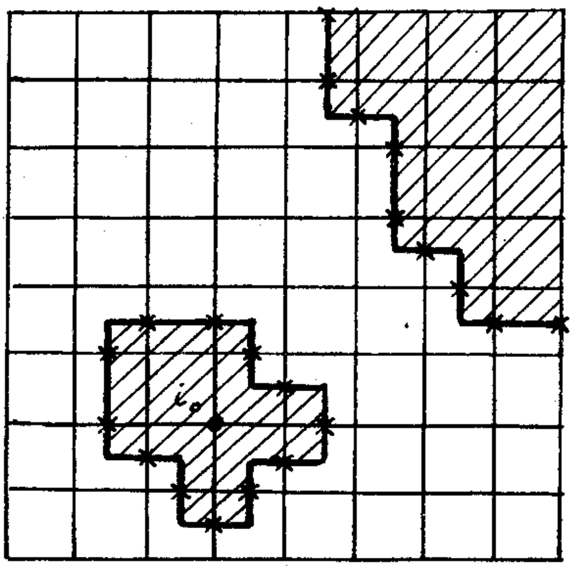

Рис.1.

Доказательство.

Рассмотрим фиксированный узел решетки i_0. Согласно лемме 1, множество всех узлов решетки распадается по отношению к данному узлу на два подмножества, которые в общем случае разделены сложной неодносвязной границей, образованной антиферромагнитными связями, т.е. ребрами решетки, на которых $J_{ij} < 0$ /см. *рис. 1*/. Узлы, принадлежащие первому подмножеству, связаны с узлом i_0 ферромагнитными цепями, а узлы, принадлежащие второму подмножеству, - антиферромагнитными. Проведем в каждом узле второго подмножества локальные преобразования /3/. При этом связи внутри подмножества останутся неизменными, а каждая антиферромагнитная связь на границе изменится на ферромагнитную. Следовательно, на решетке не останется ни одной пары узлов, таких, что связь между ними будет антиферромагнитной.

3. ПОЛНОСТЬЮ ФРУСТРИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ИЗИНГА

Перейдем теперь к рассмотрению полностью фрустрированной модели Изинга /1/, /$\Phi_p < 0$ для любого плакета P /. При выяснении условий существования фазового перехода в этой модели мы ограничимся случаем плоской квадратной решетки Z^2 .

Лемма 2.

Произвольная полностью фрустрированная модель Изинга /1/ на Z^2 эквивалентна периодической полностью фрустрированной модели.

Доказательство.

(i) Рассмотрим некоторый фиксированный столбец узлов решетки Z^2 и два столбца, смежные с ним. Если некоторая горизонтальная связь между средним и правым /левым/ столбцами антиферромагнитна, произведем в соответствующем узле на правом /левом/ столбце локальное преобразование /3/. Таким образом, можно избавиться от всех горизонтальных антиферромагнитных связей между узлами центрального и смежных столбцов. Повторяя эту процедуру для последовательности соседних столбцов, мы избавляемся от всех горизонтальных антиферромагнитных связей на решетке.

(ii) Полученная таким способом полностью фрустрированная решетка содержит в каждой строке вертикальные антиферромагнитные связи, расположенные периодически, с периодом 2 /см. *рис. 2*/. Рассмотрим две смежные строки вертикальных

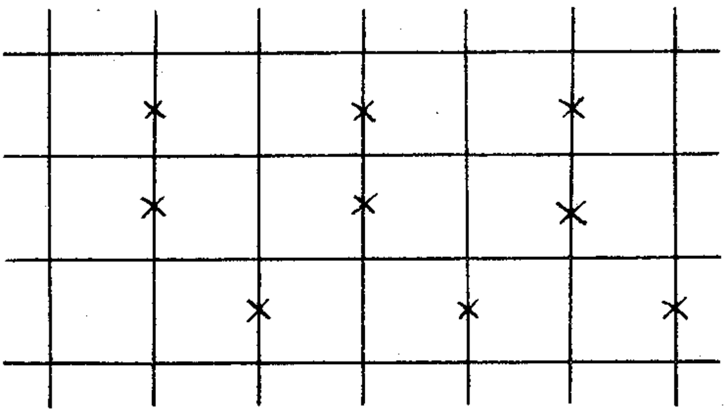

Рис.2.

связей. Если антиферромагнитные связи в этих строках сдвинуты /на один шаг решетки/, проведем во всех нижних узлах нижней строки преобразование /3/, после чего сдвиг антиферромагнитных связей в рассматриваемых строках исчезнет. Продолжая эту процедуру, можно последовательно согласовать антиферромагнитные связи во всех строках решетки.

В результате этой серии преобразований мы приходим к полностью фрустрированной модели Изинга, в которой антиферромагнитны только вертикальные связи на столбцах, расположенных с периодом 2 на всей решетке.

Замечание 1.

В случае полностью фрустрированной трехмерной модели Изинга /1/ на решетке Z^3 преобразование, использованное при доказательстве леммы 2 в каждой из параллельных плоскостей Z^2, также приводит к периодической полностью фрустрированной модели.

Периодическая полностью фрустрированная модель Изинга на квадратной решетке недавно была решена точно методом пфаффиана /9/. Из результатов этой работы следует, что для рассматриваемого нами случая равенства по модулю величины ферромагнитных и антиферромагнитных связей $|J_{ij}| = J$ фазовый переход в этой модели отсутствует. Следовательно, имеет место

Теорема 2.

Для полностью фрустрированной модели Изинга на плоской квадратной решетке фазовый переход отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Toulouse G. Comm. on Phys., 1977, 2, p.115.*
2. *Toulouse G. Phys.Reports, 1979, 49, p.267.*
3. *Dzyaloshinskii I.E., Volovik G.E. J.Physique, 1978, 39, p.693.*
4. *Toulouse G. The Frustration Model, Karpacz Winter School, 1979.*
5. *Drouffe J.M., Itzykson C. Phys.Reports, 1978, 38C, p.133.*
6. *Fradkin E., Huberman B.A., Shenker S.H. Phys.Rev., 1978, B18, p.4789.*
7. *Пастур Л.А., Фиготин А.Л. ТМФ, 1978, 35, с. 193.*
8. *Kirkpatrick S. Phys.Rev., 1977, B16, p.4630.*
9. *André G., et al. J.Physique, 1979, 40, p.479.*

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июня 1979 года.