СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА





Р17 - 12132

А.М.Курбатов, Д.П.Санкович



# УСЛОВИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОММУТАТИВНОСТИ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1978

P17 - 12132

А.М.Курбатов, Д.П.Санкович

# УСЛОВИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОММУТАТИВНОСТИ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Курбатов А.М., Санкович Д.П.

P17 - 12132

Условие асимптотической коммутативности в задачах статистической механики

Установлен класс модельных гамильтонианов, для которых выполняется условие асимптотической (в термодинамическом пределе) коммутативности для многовременных корреляционных функций, то есть гиббсовское среднее от коммутатора (антикоммутатора для ферми-систем) полевых операторов различных групп "частиц" обращается в ноль при стремлении к бесконечности расстояния между любыми двумя "частицами" из этих выделенных подсистем. Система рассматривается в рамках специальной техники сразу же при бесконечном объеме в предположении, что термодинамический предел существует для всех физических величин в данной задаче.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Kurbatov A.M., Sankovic D.P.

P17 - 12132

Asymptotic Commutativity Rule in Quantum Statistical Mechanics Problems

The class of model Hamiltonians is established for which the condition of asymptotic commutativity for many-time correlation functions is fulfilled, i.e. Gibbs's average of a commutator (anticommutator for Fermi-systems) of field operators from different groups of "particles" equals to zero when distances between any particles from these marked out subsystems tend to infinity. The system is examined within the special technique at once under an infinite volume in assumption that the thermodynamic limit exists for all physical quantities in the present problem.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communicotion of the Joint Institute for Nucleor Research. Dubna 1978



## УСЛОВИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ КОММУТАТИВНОСТИ В ЗАДАЧАХ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

В работе /1/ сформулированы теоретические представления, общепринятые в статистической механике, о том, что корреляция между пространственно отдаленными частями макроскопической системы практически исчезает. При этом постулировалось, что под знаком средней, взятой для разновременных полевых функций по гиббсовскому ансамблю, эти полевые функции будут точно коммутировать или антикоммутировать между собой если разность пространственных аргументов в них стремится к бесконечности. Данное предположение является существенным при формулировке принципа ослабления корреляций. Отмечалось, что в квантовой теории поля все полевые функции $\psi(t_1,\vec{r}_1)$, $\psi(t_2,\vec{r}_2)$ должны даже точно коммутировать или антикоммутировать, если четырехмерный вектор $(t_1-t_2,\vec{r}_1-\vec{r}_2)$ пространственно подобен.

В задачах статистической механики, где мы имеем дело с формально нелокальным взаимодействием, свойство коммутации должно удовлетворяться лишь асимптотически по $|\vec{r}_1-\vec{r}_2|$ при фиксированных $t_1$ и $t_2$.

В связи с важностью условия асимптотической коммутативности интересно выяснить вопрос о его выполнимости в задачах статистической механики в предположении, что рассматриваемые средние имеют термодинамический предел $(V\to\infty,\ N\to\infty,\ V/N=const)$.

Рассмотрим многовременную $n$ - частичную корреляционную функцию

$$<\psi(t_1,\vec{r}_1;\varepsilon_1)\psi(t_2,\vec{r}_2;\varepsilon_2)\ldots\psi(t_m,\vec{r}_m;\varepsilon_m)\times$$
$$\times\psi(t_{m+1},\vec{r}_{m+1};\varepsilon_{m+1})\ldots\psi(t_n,\vec{r}_n;\varepsilon_n)>. \qquad (I)$$

Здесь $\psi(t,\vec{r};\varepsilon)$ - полевой оператор:

$$\psi(t,\vec{r};\varepsilon)=\begin{cases}\psi(t,\vec{r}) & \text{при } \varepsilon=-1,\\ \psi^+(t,\vec{r}) & \text{при } \varepsilon=1.\end{cases} \qquad (2)$$

Предположим, что "частицы" $\{1,2,\ldots,n\}$ разбиты на две группы $\{1,2,\ldots,m\}$ и $\{m+1,m+2,\ldots,n\}$, причем расстояние между любыми двумя "частицами" из одной подсистемы и из другой стремится к бесконечности (случай произвольного разбиения тривиально сводится к рассматриваемому).

Мы хотим показать, что коммутатор (антикоммутатор в фермиевском случае), вычисленный по гиббсовскому ансамблю асимптотически $(\rho\to\infty)$ исчезает, то есть:

$$<\left[\psi(t_1,\vec{r}_1;\varepsilon_1)\ldots\psi(t_m,\vec{r}_m;\varepsilon_m),\psi(t_{m+1},\vec{r}_{m+1};\varepsilon_{m+1})\times\right.$$
$$\left.\times\ldots\psi(t_n,\vec{r}_n;\varepsilon_n)\right]>\to 0 \text{ при } \rho\to\infty, \text{ где} \qquad (3)$$

$$\rho=\min_{\substack{i\in\{1,2,\ldots,m\}\\ j\in\{m+1,\ldots,n\}}}|\vec{r}_i-\vec{r}_j|. \qquad (4)$$

Рассмотрим случай бозе-системы (случай ферми-системы рассматривается аналогично).

Воспользовавшись равенством



$$[AB,C]=[A,C]B+A[B,C], \qquad (5)$$

можно заметить, что для доказательства (3) достаточно показать, что условие асимптотической коммутативности справедливо лишь для двухчастичной корреляции средних:

$$<[\psi(t_1,\vec{r}_1;\varepsilon_1),\psi(t_2,\vec{r}_2;\varepsilon_2)]> \qquad (6)$$

при $|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\to\infty$ и фиксированных $t_1$ и $t_2$.

Наши рассуждения мы будем проводить сразу при бесконечном объеме, считая все величины существующими, то есть имеющими термодинамический предел. Полевые функции есть:

$$\psi(t,\vec{r};\varepsilon)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i\varepsilon\vec{k}\vec{r}}a(\vec{k},t;\varepsilon); \qquad (7)$$

$$[a(\vec{k}),a(\vec{q})]=0;\quad [a(\vec{k}),a^+(\vec{q})]=\delta(\vec{k}-\vec{q}); \qquad (8)$$

$$a(\vec{k},t;\varepsilon)=e^{iHt}a(\vec{k};\varepsilon)e^{-iHt}; \qquad (9)$$

$$a(\vec{k};\varepsilon)=\begin{cases}a(\vec{k}) & \text{при } \varepsilon=-1\\ a^+(\vec{k}) & \text{при } \varepsilon=1,\end{cases} \qquad (10)$$

$H$ - гамильтониан рассматриваемой системы. После несложных преобразований (6) можно представить в виде:

$$<[\psi(t,\vec{r}_1;\varepsilon_1),\psi(t-\tau,\vec{r}_2;\varepsilon_2)]>=$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\iint d\vec{k}\,d\vec{q}\,e^{i(\varepsilon_1\vec{k}\vec{r}_1+\varepsilon_2\vec{q}\vec{r}_2)}<[a(\vec{k},\tau;\varepsilon_1),a(\vec{q};\varepsilon_2)]>. \qquad (II)$$

Мы ввели обозначение:

$$a(\vec q;\varepsilon)=a(\vec q,0;\varepsilon). \tag{I2}$$

Операторы рождения и уничтожения удовлетворяют гейзенберговским уравнениям движения:

$$\frac{\partial a(\vec k,t;\varepsilon)}{\partial t}=i\left[H,a(\vec k,t;\varepsilon)\right]. \tag{I3}$$

Предположим, что наша система описывается трансляционно-инвариантным гамильтонианом следующего вида:

$$H=\int\lambda(\vec k)\,a^+(\vec k)\,a(\vec k)\,d\vec k+$$

$$+\sum_{m,n}\mathcal{B}_{m,n}(\vec k_1,\vec k_2,\ldots,\vec k_m|\vec p_1,\vec p_2,\ldots,\vec p_n)\times$$

$$\times\delta(\vec k_1+\vec k_2+\ldots+\vec k_m-\vec p_1-\vec p_2-\ldots-\vec p_n)\,a^+(\vec k_1)\ldots a^+(\vec k_m)\times \tag{I4}$$

$$\times\, a(\vec p_1)\,a(\vec p_2)\ldots a(\vec p_n)\;d^m\vec k\;d^n\vec p,$$

где

$$d^m\vec q\equiv d\vec q_1\,d\vec q_2\ldots d\vec q_m \tag{I5}$$

Предположим кроме того, что c – числовые функции $\lambda$ и $\mathcal{B}_{m,n}$ удовлетворяют следующим условиям:

а) $\lambda(\vec k)$ – гладкая функция, все производные которой имеют не более чем степенной рост;

б) $\mathcal{B}_{m,n}(\vec k_1,\vec k_2,\ldots,\vec k_m|\vec p_1,\vec p_2,\ldots,\vec p_n)\in S$ где $S$ – пространство бесконечно дифференцируемых и убывающих вместе со своими производными быстрее любой степени функций на множестве

$R^{3(m+n)}$ $3(m+n)$ – переменных.

Вычислим коммутатор

$$\left[H,a(\vec k,t)\right].$$



$$\left[H,a(\vec k,t)\right]=e^{iHt}\left[H,a(\vec k)\right]e^{-iHt};$$

$$\left[H,a(\vec k)\right]=-\lambda(\vec k)a(\vec k)+\sum_{m,n}\int\mathcal{B}_{m,n}(\vec k_1,\vec k_2,\ldots,\vec k_m|\vec p_1,\vec p_2,\ldots,\vec p_n)\times$$

$$\times\delta\Big(\sum_1^m\vec k_i-\sum_1^n\vec p_j\Big)\left[a^+(\vec k_1)\ldots a^+(\vec k_m)a(\vec p_1)\ldots a(\vec p_n),a(\vec k)\right]d^m\vec k\,d^n\vec p=$$

$$=-\lambda(\vec k)a(\vec k)-\sum_{m,n}m\int\mathcal{B}_{m,n}(\vec k,\vec k_1,\ldots,\vec k_{m-1}|\vec p_1,\ldots,\vec p_n)\times$$

$$\times\delta\Big(\sum_1^{m-1}\vec k_i-\sum_1^n\vec p_j+\vec k\Big)\,a^+(\vec k_1)\ldots a^+(\vec k_{m-1})a(\vec p_1)\ldots a(\vec p_n)\,d^{m-1}\vec k\,d^n\vec p.$$

Тогда уравнения движения (I3) примут вид:

$$i\,\frac{\partial a(\vec k,t)}{\partial t}=\lambda(\vec k)\,a(\vec k,t)+\mathcal{J}(\vec k,t) \tag{I6}$$

$$-i\,\frac{\partial a^+(\vec k,t)}{\partial t}=\lambda(\vec k)\,a^+(\vec k,t)+\mathcal{J}^+(\vec k,t), \tag{I7}$$

где

$$\mathcal{J}(\vec k,t)=\sum_{m,n}m\int\mathcal{B}_{m,n}(\vec k,\vec k_1,\ldots,\vec k_{m-1}|\vec p_1,\ldots,\vec p_n)\,\delta\Big(\vec k+\sum_1^{m-1}\vec k_i-\sum_1^n\vec p_j\Big)\times$$

$$\times\,a^+(\vec k_1,t)\ldots a^+(\vec k_{m-1},t)\,a(\vec p_1,t)\ldots a(\vec p_n,t)\;d^{m-1}\vec k\,d^n\vec p; \tag{I8}$$

$$\mathcal{J}^+(\vec k,t)=\sum_{m,n}m\int\overline{\mathcal{B}_{m,n}(\vec k,\vec k_1,\ldots,\vec k_{m-1}|\vec p_1,\ldots,\vec p_n)}\,\delta\Big(\vec k+\sum_1^{m-1}\vec k_i-\sum_1^n\vec p_j\Big)\times$$

$$\times\,a^+(\vec p_n,t)\ldots a^+(\vec p_1,t)\,a(\vec k_{m-1},t)\ldots a(\vec k_1,t)\,d^{m-1}\vec k\,d^n\vec p. \tag{I9}$$

Вместе с начальными условиями:

$$\left.\begin{aligned}a^+(\vec k,0)&=a^+(\vec k)\\ a(\vec k,0)&=a(\vec k)\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

уравнения (I8), (I9) могут быть записаны в виде:

$$a(\vec k,t)=e^{-i\lambda(\vec k)t}a(\vec k)+\int_0^t e^{-i\lambda(\vec k)(t-\tau)}J(\vec k,\tau)\,d\tau, \qquad (21)$$

$$a^+(\vec k,t)=e^{i\lambda(\vec k)t}a^+(\vec k)+\int_0^t e^{i\lambda(\vec k)(t-\tau)}J^+(\vec k,\tau)\,d\tau. \qquad (22)$$

Решение уравнений (2I)-(22) будем искать в виде:

$$a(\vec k,t)=e^{-i\lambda(\vec k)t}a(\vec k)+\sum_{m,n}\int f_{m,n}(t|\vec k_1,\dots,\vec k_m|\vec p_1,\dots,\vec p_n)\times$$
$$\times\,\delta\Big(\vec k+\sum_1^m\vec k_i-\sum_1^n\vec p_j\Big)a^+(\vec k_1)\dots a^+(\vec k_m)a(\vec p_1)\dots a(\vec p_n)\,d^m\vec k\,d^n\vec p, \qquad (23)$$

$$a^+(\vec k,t)=e^{i\lambda(\vec k)t}a^+(\vec k)+\sum_{m,n}\int \overline{f_{m,n}(t|\vec k_1,\dots,\vec k_m|\vec p_1,\dots,\vec p_n)}\times$$
$$\times\,\delta\Big(\vec k+\sum_1^m\vec k_i-\sum_1^n\vec p_j\Big)a^+(\vec p_1)\dots a^+(\vec p_n)a(\vec k_1)\dots a(\vec k_m)\,d^m\vec k\,d^n\vec p. \qquad (24)$$

Подставим эти выражения для $a(\vec k,t)$ и $a^+(\vec k,t)$ в уравнение движения для гейзенберговских операторов рождения и уничтожения (2I), (22). После приведения всех получающихся выражений к нормальной форме с помощью соотношений (8) мы получим систему рекуррентных соотношений для определения неизвестных функций $f_{m,n}(t|\vec k_1,\vec k_2,\dots,\vec k_m|\vec p_1,\vec p_2,\dots,\vec p_n)$. Из этих соотношений в силу условий на $\lambda(\vec k)$ и $\varepsilon_{m,n}(\vec k_1,\dots,\vec k_m|\vec p_1,\dots,\vec p_n)$ мы видим, что $f_{m,n}(t|\vec k_1,\vec k_2,\dots,\vec k_m|\vec p_1,\vec p_2,\dots,\vec p_n)$ при всех $m$ и $n$



принадлежат пространству $S(R^{3(m+n)})$ основных функций, введенному выше (как функции импульсных переменных). Кроме того, можно показать /2/, что:

$$\|f_{m,n}(t|\dots|\dots)\|_{\alpha,\beta}\le C(1+|t|)^k, \quad \text{где} \qquad (25)$$

$\|\dots\|_{\alpha,\beta}$ - норма в пространстве $S$ /3/.

Решение (23), (24) для операторов рождения и уничтожения указывает нам на известный результат о том, что "движение" $a(\vec k,t)$ и $a^+(\vec k,t)$ во времени для достаточно "хороших" систем есть просто каноническое преобразование общего вида /4/, что находится в соответствии с аналогичным утверждением для классических гамильтоновых систем /5/.

Из явного вида решений (23) и (24) нетрудно получить, что $a(\vec k,t)$, $a^+(\vec k,t)$ в один и тот же момент времени удовлетворяют коммутативным соотношениям Бозе:

$$[a(\vec k,t),a(\vec q,t)]=0,\quad [a(\vec k,t),a^+(\vec q,t)]=\delta(\vec k-\vec q). \qquad (26)$$

С помощью (23), (24) вычислим теперь коммутатор в (II). Будем считать, что $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$. Случай $\varepsilon_1=-\varepsilon_2=1$ рассматривается аналогично, а все другие случаи сводятся к этим двум:

$$[a(\vec k,t),a(\vec q)]=e^{-i\lambda(\vec k)t}[a(\vec k),a(\vec q)]+$$
$$+\sum_{m,n}\int f_{m,n}(t|\vec k_1,\dots,\vec k_m|\vec p_1,\dots,\vec p_n)\,\delta\Big(\vec k+\sum_1^m\vec k_i-\sum_1^n\vec p_j\Big)\times$$
$$\times[a^+(\vec k_1)\dots a^+(\vec k_m)a(\vec p_1)\dots a(\vec p_n),a(\vec q)]\,d^m\vec k\,d^n\vec p=$$

$$= -\sum_{m,n} m \int f_{m,n}(t\,|\,\vec q, \vec k_1,\dots,\vec k_{m-1}\,|\,\vec p_1,\dots,\vec p_n) \times$$
$$\times\, \delta\Big(\vec k+\vec q - \sum_1^{m-1}\vec k_i - \sum_1^{n} \vec p_j\Big)\, a^+(\vec k_1)\,a^+(\vec k_2)\dots a^+(\vec k_{m-1}) \times \qquad (27)$$
$$\times\, a(\vec p_1)\,a(\vec p_2)\dots a(\vec p_n)\, d^{m-1}\vec k\, d^n \vec p$$

Подставляя (27) в (II), имеем теперь:

$$< [\psi(t,\vec r_1), \psi(t-\tau,\vec r_2)] > =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\iint d\vec k\, d\vec q\; e^{i(\vec k\vec r_1+\vec q\vec r_2)} \sum_{m,n} m \int d^{m-1}\vec k\, d^n\vec p\; \times$$
$$\times\, f_{m,n}(t\,|\,\vec q, \vec k_1,\dots,\vec k_{m-1}\,|\,\vec p_1,\dots,\vec p_n)\, \delta\Big(\vec k+\vec q + \sum_1^{m-1}\vec k_i - \sum_1^{n}\vec p_j\Big) \times$$
$$\times < a^+(\vec k_1)\,a^+(\vec k_2)\dots a(\vec k_{m-1})\,a(\vec p_1)\,a(\vec p_2)\dots a(\vec p_n) > \;=$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{m,n} m \int d^{m-1}\vec k\, d^n\vec p < a^+(\vec k_1)\dots a^+(\vec k_{m-1})\,a(\vec p_1)\dots a(\vec p_n) > \times$$
$$\times \int d\vec k \int d\vec q\; e^{i(\vec k\vec r_1+\vec q\vec r_2)}\, \delta\Big(\vec k+\vec q + \sum_1^{m-1}\vec k_i - \sum_1^{n}\vec p_j\Big) f_{m,n}(t\,|\,\vec q,\dots\vec k_{m-1}\,|\,\vec p_1,\dots,\vec p_n) =$$
$$= -\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{m,n} m \int d^{m-1}\vec k\, d^n\vec p\;\; < a^+(\vec k_1)\dots a^+(\vec k_m)\,a(\vec p_1)\dots a(\vec p_n) > \times$$
$$\times \int d\vec k\, \exp\Big[i\Big(\vec k\vec r_1 - \vec k\vec r_2 + \vec r_2\sum_1^{n}\vec p_j - \vec r_2\sum_1^{m-1}\vec k_i\Big)\Big] f_{m,n} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\; \times$$
$$\times \sum_{m,n} m \int d^{m-1}\vec k\, d^n\vec p < a^+(\vec k_1)\dots a(\vec p_n) > \exp\Big[-i\Big(\sum_1^{m-1}\vec k_i\vec r_2 - \sum_1^{n}\vec p_j\vec r_2\Big)\Big] \times$$
$$\times \int d\vec k\, \exp[i\vec k(\vec r_1-\vec r_2)]\, f_{m,n}\Big(t\,\Big|\,-\vec k+\sum_1^{n}\vec p_j - \sum_1^{m-1}\vec k_i, \vec k_1,\dots,\vec k_{m-1}\,\Big|\,\vec p_1,\dots,\vec p_n\Big).$$



Из последнего равенства следует, что в предположении существования и сходимости наших выражений, учитывая, что $f_{m,n} \in S$ и фурье-преобразование от основной функции есть снова основная функция, мы получаем требуемое условие асимптотической коммутативности для многовременных корреляционных средних.

Отметим, что система ферми-операторов отличается лишь заменой коммутаторов на антикоммутаторы и тем, что $\delta_{m,n}$ и $f_{m,n}$ будут теперь антисимметричны по аргументам с индексами из $\{1, 2, \dots, m\}$ и $\{m+1, m+2, \dots, n\}$.

В заключение заметим, что в случае одновременных корреляционных средних свойство коммутативности выполняется точно в силу канонической коммутативности соотношений (26).

## Литература


1. Н.Н.Боголюбов. Квазисредние в задачах статистической механики. R-1451, ОИЯИ, Дубна, 1963.
2. K.Osterwalder, R.Schrader. Comm.Math.Phys., (1973), 31, p.83.
3. И.М.Гельфанд, И.Е.Шилов. Обобщенные функции, вып. 2, Физматгиз, Москва, 1958.
4. А.С.Шварц. Математич.основы кв.т. поля. Атомиздат, Москва, 1975.
5. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика "Наука", Москва, 1973.


Рукопись поступила в издательский отдел
26 декабря 1978 года.