ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р17 - 11994

В.К.Федянин, В.Ю.Юшанхай

ОДНОМЕРНЫЙ АНИЗОТРОПНЫЙ МАГНЕТИК В ДЛИННОВОЛНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

1978

P17 - 11994

В.К.Федянин, В.Ю.Юшанхай

ОДНОМЕРНЫЙ АНИЗОТРОПНЫЙ МАГНЕТИК В ДЛИННОВОЛНОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Направлено в "Physics Letters"

Федянин В.К., Юшанхай В.Ю. P17 - 11994

Одномерный анизотропный магнетик в длинноволновом приближении

С помощью точного преобразования от операторов Паули к операторам Ферми в длинноволновом приближении получено уравнение, имеющее солитоноподобные решения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Fedyanin V.K., Yushankhai V.Yu. P17 - 11994

One-Dimensional Anisotropic Magnetic in the Long-Wave Approximation

The non-linear equation for the wave functions of spin excitations in long-wave approximation possessing a soliton-like solution is obtained by means of exact transition from the Pauli operators to Fermi operators.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Исследуем волновые функции спиновых возбуждений жесткой линейной цепочки, состоящей из N спинов ($S = 1/2$) и описываемой гамильтонианом вида

$$\mathcal{H} = -\mu H \sum_j S_j^z + 2\mathcal{J} \sum_j \left(\xi S_j^x S_{j+1}^x + \eta S_j^y S_{j+1}^y + S_j^z S_{j+1}^z - \frac{1}{4} \right). \tag{I}$$

Здесь H - величина внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси z , μ - магнетон Бора, $\mathcal{J}$ -интеграл обменного взаимодействия двух соседних спинов; величины ξ, η $(-1 \leq \xi, \eta \leq 1)$ дают возможность учесть анизотропию такого взаимодействия.

Определяя, как обычно, $S_j^{\pm} = S_j^x \pm i S_j^y$; $S_j^z = S_j^+ S_j^- - \frac{1}{2}$, введем вместо спиновых фермиевские операторы /I/:

$$a_j^+ = (-2)^{j-1} S_1^z S_2^z \dots S_{j-1}^z S_j^+ ;\quad a_j = (-2)^{j-1} S_1^z S_2^z \dots S_{j-1}^z S_j^-, \tag{2}$$

для которых фермиевские перестановочные соотношения

$$[a_j, a_{j'}^+]_+ = \delta_{jj'} ;\quad [a_j^+, a_{j'}^+]_+ = [a_j, a_{j'}]_+ = 0$$

обеспечиваются известными коммутационными соотношениями для спиновых операторов.

С помощью (2) гамильтониан (I) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \mu H \frac{N}{2} - (\mu H + 2\mathcal{J}) \sum_j a_j^+ a_j + \mathcal{J} \frac{\xi+\eta}{2} \sum_j \left(a_{j+1}^+ a_j + a_j^+ a_{j+1} \right) - \\ - \mathcal{J} \frac{\xi-\eta}{2} \sum_j \left(a_{j+1}^+ a_j^+ - a_{j+1} a_j \right) + \mathcal{J} \sum_j \left(a_{j+1}^+ a_{j+1} + a_{j-1}^+ a_{j-1} \right) a_j^+ a_j . \end{aligned} \tag{3}$$

Далее воспользуемся подходом, развитым в [2], и будем изучать одночастичные состояния магнитной системы, что и определяет наш выбор оператора эволюции системы в виде

$$U(t) = \frac{1}{\lambda(t)}\Big[1 + \sum_m \big(\alpha_m(t) a_m^+ - \alpha_m^*(t) a_m\big)\Big], \tag{4}$$

который, если положить $|\lambda(t)|^2 = 1 + \sum_m |\alpha_m(t)|^2$, удовлетворяет условию унитарности $U^+ U = 1$.

Естественным образом введем вектор $|0\rangle$ "вакуумного" состояния так, что $a_j |0\rangle \equiv 0$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Шредингеровская волновая функция системы в момент времени t получается при этом унитарным преобразованием $|0\rangle$, осуществляемым оператором $U(t)$: $\Psi(t) = U(t)|0\rangle$.

Уравнение для матричных элементов

$$\langle 0|a_n(t)|0\rangle = \langle 0|U^+(t) a_n U(t)|0\rangle = \alpha_n(t)/|\lambda(t)|^2$$

получается "проектированием" уравнения для гайзенберговских операторов $a_n(t) = U^+(t) a_n U(t)$ и имеет вид $(N_n(t) = a_n^+(t) a_n(t))$:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle 0|a_n(t)|0\rangle = &-(\mu H + 2\mathcal{J})\langle 0|a_n(t)|0\rangle + \\ &+ \mathcal{J}\frac{\xi+\eta}{2}\big[\langle 0|a_{n+1}(t)|0\rangle + \langle 0|a_{n-1}(t)|0\rangle + \\ &+ \mathcal{J}\frac{\xi-\eta}{2}\big[\langle 0|a_{n+1}^+(t)|0\rangle - \langle 0|a_{n-1}(t)|0\rangle + \\ &+ \mathcal{J}\big[\langle 0|N_{n+1}(t) a_n(t)|0\rangle + \langle 0|N_{n-1}(t) a_n(t)|0\rangle\big] \end{aligned} \tag{5}$$

Последовательное использование одночастичных состояний, как и в [2], однозначно определяет расцепление матричных элементов в последнем слагаемом (5):

$$\langle 0|N_{n\pm1}(t) a_n(t)|0\rangle = \langle 0|a_{n\pm1}^+(t)|0\rangle\langle 0|a_{n\pm1}(t)|0\rangle\langle 0|a_n(t)|0\rangle = \frac{|\alpha_{n\pm1}(t)|^2}{|\lambda(t)|^4}\cdot\frac{\alpha_n(t)}{|\lambda(t)|^2}.$$

Использовав это расцепление, приходим к следующему уравнению для шредингеровских амплитуд $\alpha_n(t)/|\lambda(t)|^2 \equiv \varphi_n(t)$ одночастичных состояний:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial \varphi_n(t)}{\partial t} = &-(\mu H + 2\mathcal{J})\varphi_n(t) + \mathcal{J}\frac{\xi+\eta}{2}\big[\varphi_{n+1}(t) + \varphi_{n-1}(t)\big] + \\ &+ \mathcal{J}\frac{\xi-\eta}{2}\big[\varphi_{n+1}^*(t) - \varphi_{n-1}^*(t)\big] + \mathcal{J}\big[|\varphi_{n+1}(t)|^2 + |\varphi_{n-1}(t)|^2\big]\varphi_n(t). \end{aligned} \tag{6}$$

В "континуальном" пределе $\varphi_n(t) \to \varphi(x,t)$, $x = n a_0$, a_0 – постоянная решетки, получим уравнение

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} &= -\Delta\varphi + \mathcal{J}\frac{\xi+\eta}{2} a_0^2 \varphi_{xx} + \mathcal{J}\frac{\xi-\eta}{2} a_0 \varphi_x^* + 2\mathcal{J}|\varphi|^2\varphi, \\ \Delta &= 2\mathcal{J}\Big(1 + \mu H/2\mathcal{J} - \frac{\xi+\eta}{2}\Big) \equiv 2\mathcal{J}\nu. \end{aligned} \tag{7}$$

Делая замену переменных

$$\phi = \nu^{-1/2}\varphi, \quad t' = -\Delta\cdot t, \quad x' = \Big(\frac{\xi+\eta}{4\nu}\Big)^{-1/2} x, \tag{8}$$

приходим к "обезразмеренной" форме (7):

$$i\dot\phi - \phi + \phi_{xx} + \alpha\phi_x^* + |\phi|^2\phi = 0, \quad \alpha = \frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}\Big(\frac{\xi+\eta}{4\nu}\Big)^{1/2}, \quad \hbar = 1. \tag{9}$$

Уравнение (9) полностью совпадает по виду с уравнением (9), полученным в [2] для экситон-фононной системы при учете членов с резонансным взаимодействием. Отличие в настоящем случае заключается в том, что параметр α определяется относительной величиной вклада S_x – и S_y – компонент в (I) и может быть величиной порядка единицы: $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$. (Напомним, что в уравнении (9), полученном в [2] при физически содержательном выборе параметров гамильтониана, $1 \gg \alpha > 0$). По этой причине слагаемое $\alpha\phi_x^*$, с одной стороны, нельзя во всех физически содержательных случаях рассматривать как "малое возмущение" [3], с другой стороны, необходимо с определенной аккуратностью пользоваться и общими выводами, полученными в [4,5] при анализе уравнения (9). Мы полагаем обратиться к подробному исследованию этих вопросов в дальнейшем.

Заметим в заключение, что в данном случае уравнение (9) получено для системы жестко фиксированных спинов и описывает в длинноволновом приближении частицеподобные "чисто магнитные" возбуждения. (Подобная же ситуация имеет место для случая экситонов большой плотности). Во всех исследованных до сих пор одномерных моделях подобные уравнения возникали как результат взаимной связи двух подсистем (экситонной и фононной, например, /2/). В нашем случае использование пробной волновой функции $\Psi(t) = U(t)|0\rangle$ с оператором эволюции $U(t)$, определенным выше (4), совершенно необходимо и адекватно корректному рассмотрению свойств элементарных возбуждений в длинноволновом приближении.

Литература

1. S.Rodrigues. Phys.Rev. 116, 1474, 1959 .
2. В.Г.Маханьков, В.К.Федянин, Л.В.Якушевич. ОИЯИ, Р17-10448, Дубна, 1977 .
3. В.Г.Маханьков, В.К.Федянин. ОИЯИ, Р17-11429, Дубна, 1978; Phys.Lett. (in print).
4. V.K.Fedyanin, V.G.Makhankov. JINR, E17-10507, Dubna, 1977; ДАН СССР, т.236, №4, 838, 1977.
5. В.Г.Маханьков, В.К.Федянин. ОИЯИ, Р17-11489, Дубна, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 октября 1978 года