СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р17 - 11955

Н.Н.Боголюбов (мл.)

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ФОНОННЫМ ПОЛЕМ

1978

P17 - 11955

Н.Н.Боголюбов (мл.)

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ФОНОННЫМ ПОЛЕМ

Боголюбов Н.Н. (мл.) P17 - 11955

Кинетическое уравнение динамической системы, взаимодействующей с фононным полем

Рассматривается вывод общего кинетического уравнения для электрон-фононной системы. Развивается метод, основанный на использовании хронологических и антихронологических T-произведений. В нем существенную роль играет исключение фононных переменных с помощью упорядоченных T-произведений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Bogolubov N.N.(Jr.) P17 - 11955

Kinetic Equation of Dynamical System Interacting with Phonon Field

The derivation of general kinetic equation for electron-phonon system is investigated. The method, based on applying chronological and antichronological T-product, is presented.

In this method an essential role belongs to the elimination of the phonon field amplitudes.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В работе рассматривается методика получения общего кинетического уравнения для электрон-фононной системы. Развивается метод, основанный на использовании хронологических и антихронологических T-произведений. В нем существенную роль играет исключение фононных переменных с помощью упорядоченных T-произведений.

В частности, для взаимодействия электрона с фононным полем получено кинетическое уравнение для полярона, совпадающее по форме с кинетическим уравнением, выведенным Н.Н.Боголюбовым /1/.

На этой основе строится кинетическое уравнение для электронно-фононных систем, при этом, если ограничиться надлежащей аппроксимацией , из него следует, например, точное уравнение Больцмана для полярона, обсуждение и рассмотрение решений которого содержится для фрёлиховской модели полярона в работах Дефриза /2/, Фейнмана и Торнберга /3/.

§ 1. Исключение фононных амплитуд

Рассмотрим динамическую ситему S , взаимодействующую с фононным полем Σ . Обозначим через X_s совокупность аргументов волновых функций для одной изолированной системы и аналогично обозначим

$$X_{\Sigma} = (\dots n_k \dots) -$$

– совокупность чисел заполнения поля Σ. Тогда динамические состояния системы (S, Σ) можно характеризовать волновыми функциями типа

$$\Psi = \Psi(X_S, X_\Sigma). \qquad (\mathrm{I})$$

Условимся обозначать символами вида

$$F(t,S) \qquad (2)$$

операторы, вообще могущие явно зависеть от времени t, действующие на Ψ только как функции от X_S. Символами вида

$$G(t,\Sigma) \qquad (3)$$

будем обозначать операторы, действующие на Ψ как функции от X_Σ. Такими операторами являются, например, бозе-амплитуды $\dots b_K \dots b_K^+$. Существенно подчеркнуть, что поскольку $F(t,S)$, $G(t,\Sigma)$ действуют на различные переменные в волновой функции, они коммутируют между собой. В частности, $F(t,S)$ коммутирует со всеми b_k и b_k^+. Примером оператора типа (3) может служить и собственный гамильтониан фононного поля

$$H(\Sigma) = \sum_{(k)} \hbar\omega_k b_k^+ b_k . \qquad (4)$$

Здесь, разумеется, $\omega_k > 0$. $\qquad$ (5)

Символ типа

$$\mathfrak{U}(t, S, \Sigma)$$

обозначает оператор, действующий как на переменные X_S, так и на переменные X_Σ волновых функций Ψ.

Подчеркнем, что рассматриваемые <u>сейчас</u> операторы соответствуют обычному шредингеровскому представлению динамических величин.

Возьмем случай, когда в принятых обозначениях полный гамильтониан динамической системы (S, Σ) имеет вид

$$H_t = H_t(t, S, \Sigma) = \Gamma(t,S) + \sum_{(k)} \{ C_k(t,S) b_k + \overset{+}{C}_k(t,S) b_k^+ \} + H(\Sigma). \qquad (\mathrm{I,I})$$

Здесь $\Gamma(t, S)$ – собственный гамильтониан системы S, следующий член в (I,I) с суммой по (k) – гамильтониан взаимодействия систем S и Σ.

П р и м е р ы

I. <u>Теория полярона</u>

Система S состоит из одного электрона, находящегося во внешнем электрическом поле $\vec{\mathcal{E}}(t)$.

$$\Gamma(t,S) = \frac{p^2}{2m} + e^{\varepsilon t} \vec{E}(t)\cdot\vec{r}, \quad \vec{E}(t) = -e\,\vec{\mathcal{E}}(t), \qquad (\mathrm{I.2})$$

e-заряд электрона,

$$C_k(t,S) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}} \mathcal{I}(k) \left(\frac{\hbar}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(\vec{k}\vec{r})}, \quad \mathcal{I}^*(k) = \mathcal{I}(k),$$

$\vec{r}$, $\vec{p}$ – положение и импульс электрона, $\mathcal{I}(k)$, ω_k – радиально-симметричные функции волнового вектора $\vec{k}$. Суммирования по (k) проводятся по обычному квазидискретному спектру.

$$\vec{k} = \left(\frac{2\pi n_1}{L}, \frac{2\pi n_2}{L}, \frac{2\pi n_3}{L}\right); \quad L^3 = V, \qquad (\mathrm{I,3})$$

где n_1, n_2, n_3 – целые числа (положительные и отрицательные), фактор $e^{\varepsilon t}$ ($\varepsilon > 0$), как обычно, вводится для реализации представления об адиабатическом включении взаимодействия.

В данном случае операторы типа $f(S)$ будут функциями от операторов $\vec{p}, \vec{r}$, например:

$$f(\vec{p}), \quad e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \qquad f(\vec{p})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \qquad \text{и т.п.}$$

Заметим, наконец, что в ряде случаев вместо выражения $\frac{p^2}{2m}$ необходимо использовать более общую форму энергии электрона T(p).

Тогда вместо (I,2) будем иметь:

$$\Gamma(t,S) = T(p) + e^{\varepsilon t}\vec{E}(t)\cdot\vec{r}. \qquad (\text{I},2^{\text{I}})$$

П. <u>Модельная фермионная система</u>

Система S является системой свободных фермионов, характеризуемых ферми-амплитудами $\ldots \overset{+}{a}_f \ldots a_f \ldots,$ причем

$$\Gamma(t,s) = \sum_{(f)} \Lambda(f)\overset{+}{a}_f a_f \,,$$

$$C_k(t,S) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}} L_k \sum_{(f)} \overset{+}{a}_{f+k}\, a_f \,, \qquad (\text{I},4)$$

$$\overset{*}{C}_k(t,S) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}} L_k^* \sum_{(f)} \overset{+}{a}_f a_{f+k} = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}} L_k^* \sum_{(f)} \overset{+}{a}_{f-k} a_f \,,$$

L_k, L_k^* – "c"-величины".

Поскольку фермионы вообще могут обладать спином, здесь

$$f = (\vec{f}, \sigma),$$

причем вектор $\vec{f}$ принадлежит к квазидискретному спектру (I.3), σ –спиновый индекс. Символ ($f+k$) раскрывается как

$$f+k = (\vec{f}+\vec{k}, \sigma).$$

Мы можем также рассматривать и случай взаимодействующих между собой фермионов. Надо тогда лишь включить в $\Gamma(t, S)$ члены взаимодействия между фермионами, а также их взаимодействия с внешними полями.

Для динамических систем типа П операторами типа $f(S)$ будут любые комбинации из ферми-амплитуд $\ldots a_f \ldots, \overset{+}{a}_f \ldots$, не содержащие бозе-амплитуд, например:

$$\overset{+}{a}_{f_1} a_{f_2}.$$

Заметим, что к динамическим системам типа П приводятся задачи определения электропроводности металлов теории сверхпроводимости и т.п.

Возвратимся к рассмотрению гамильтониана (I,I) и воспользуемся уравнением Лиувилля для статистического оператора $\mathcal{D}_t$ системы (S, Σ):

$$i\hbar\frac{\partial \mathcal{D}_t}{\partial t} = H(t,S,\Sigma)\mathcal{D}_t - \mathcal{D}_t H(t,S,\Sigma) \qquad (\text{I},5)$$

при начальном условии

$$\mathcal{D}_{t_0} = \rho(S)\cdot\mathcal{D}(\Sigma), \qquad (\text{I},6)$$

$$\mathcal{D}(\Sigma) = Z^{-1}e^{-\beta H(\Sigma)} \qquad (\text{I},7)$$

$$Z = \underset{(\Sigma)}{Sp}\, e^{-\beta H(\Sigma)},$$

$$\underset{(S)}{Sp}\,\rho(S) = 1.$$

Как видно, принятое начальное условие соответствует тому положению, когда в момент времени t_0 фононное поле Σ находится в состоянии статистического равновесия и в этот момент "включено" взаимодействие его с динамической системой S, характеризуемой статистическим оператором $\rho(S)$.

Так как из (I,5) следует, что:

$$\mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathcal{D}_t = \mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathcal{D}_{t_0},$$

то

$$\mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathcal{D}_t = \mathop{Sp}_{(S)} \rho(S) \cdot \mathop{Sp}_{(\Sigma)} \mathcal{D}(\Sigma) = 1$$

и мы имеем обычную нормировку для статистического оператора $\mathcal{D}_t$ динамической системы (S, Σ).

Введем оператор $U(t, t_0) = U(t, t_0, S, \Sigma)$ уравнениями

$$i\hbar \frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = H(t, S, \Sigma) U(t,t_0), \qquad U(t_0, t_0) = 1 . \tag{I,8}$$

Так как гамильтониан эрмитов, то

$$-i\hbar \frac{\partial \overset{+}{U}(t,t_0)}{\partial t} = \overset{+}{U}(t,t_0) H(t, S, \Sigma), \qquad \overset{+}{U}(t_0, t_0) = 1 . \tag{I,9}$$

Мы видим, что U является унитарным:

$$\overset{+}{U}(t,t_0) = U^{-1}(t,t_0) . \tag{I,I0}$$

С помощью операторов U из уравнения (I,5) получаем:

$$\mathcal{D}_t = U(t,t_0) \mathcal{D}_{t_0} U^{-1}(t,t_0). \tag{I,II}$$

Рассмотрим некоторую динамическую величину в шредингеровском представлении $\mathfrak{A}(t, S, \Sigma)$. Ее среднее значение в момент времени t будет:

$$\langle \mathfrak{A} \rangle_t = \mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathfrak{A}(t,S,\Sigma) \mathcal{D}_t = \mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} \mathfrak{A}(t,S,\Sigma) U(t,t_0) \mathcal{D}_{t_0} U^{-1}(t,t_0) = \tag{I,I2}$$

$$= \mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} \{ U^{-1}(t,t_0) \mathfrak{A}(t,S,\Sigma) U(t,t_0) \} \mathcal{D}_{t_0} .$$

Как видно, выражение

$$U^{-1}(t,t_0) \mathfrak{A}(t,S,\Sigma) U(t,t_0) \tag{I,I3}$$

является представлением Гейзенберга для рассматриваемой динамической величины, которое при $t = t_0$ совпадает со шредингеровским представлением этой величины.

Такое гейзенберговское представление будем обозначать символом $\mathfrak{A}(t, S_t, \Sigma_t)$:

$$\mathfrak{A}(t, S_t, \Sigma_t) = U^{-1}(t,t_0) \mathfrak{A}(t,S,\Sigma) U(t,t_0). \tag{I,I4}$$

В частности, если мы рассмотрим динамическую переменную в шредингеровском представлении, данную оператором типа $F(t, S)$, то

$$F(t, S_t) = U^{-1}(t,t_0) F(t,S) U(t,t_0) = \overset{+}{U}(t,t_0) F(t,S) U(t,t_0) . \tag{I,I5}$$

Из (I,I2) получим:

$$\mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} F(t, S_t) \mathcal{D}_{t_0} = \mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} F(t,S) \mathcal{D}_t = \mathop{Sp}_{(S)} F(t,S) \left(\mathop{Sp}_{(\Sigma)} \mathcal{D}_t \right) .$$

Введем приведенный статистический оператор

$$\rho_t(S) = \mathop{Sp}_{(\Sigma)} \mathcal{D}_t .$$

Тогда

$$\mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} F(t, S_t) \mathcal{D}_{t_0} = \mathop{Sp}_{(S)} F(t,S) \rho_t(S) . \tag{I,I6}$$

Введем оператор $W(t, t_0)$, положив

$$U(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} H(\Sigma) t} W(t,t_0) e^{\frac{i}{\hbar} H(\Sigma) t_0}, \tag{I,I7}$$

$$W(t_0, t_0) = \hat{1} . \tag{I,I8}$$

Тогда из (I,8 и I,I7):

$$i\hbar \frac{\partial W(t,t_0)}{\partial t} = \left\{ e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} H(t,S,\Sigma) e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} - H(\Sigma) \right\} W(t,t_0). \quad (I,I9)$$

Так как

$$e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} b_k e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} = b_k e^{-i\omega_k t},$$

$$e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} \overset{+}{b}_k e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} = \overset{+}{b}_k e^{i\omega_k t},$$

то из (I,I) следует, что

$$e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} H(t,S,\Sigma) e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} = \Gamma(t,S) + H_{int}(t,S,\Sigma) + H(\Sigma), \quad (I,20)$$

где

$$H_{int}(t,S,\Sigma) = \sum_k \left\{ C_k(t,S) e^{-i\omega_k t} b_k + \overset{+}{C}_k(t,S) e^{i\omega_k t} \overset{+}{b}_k \right\}.$$

Таким образом, (I,I9) примет вид:

$$i\hbar \frac{\partial W(t,t_0)}{\partial t} = \left\{ \Gamma(t,S) + H_{int}(t,S,\Sigma) \right\} W(t,t_0), \quad (I,20^I)$$

$$W(t_0,t_0) = 1 .$$

Из (I,I7) следует:

$$\overset{+}{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t_0} \overset{+}{W}(t,t_0) e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} . \quad (I,2I)$$

Поэтому, раз $U(t, t_0)$ является унитарным, $W(t, t_0)$ также будет унитарным оператором.

Имеем далее (см. (I,I5)):

$$\underset{(\Sigma)}{Sp} F(t,S_t) \mathcal{D}(\Sigma) = \underset{(\Sigma)}{Sp}\, e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t_0} \overset{+}{W}(t,t_0) e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} F(t,S) e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} W(t,t_0) e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t_0} \mathcal{D}(\Sigma),$$

но

$$e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} F(t,S) e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} = F(t,S).$$

Далее левый оператор $e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t_0}$ под знаком Sp может быть перенесен вправо и тем самым соединиться с $e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t_0}$, переходя в единичный оператор.

Тогда

$$\underset{(\Sigma)}{Sp} F(t,S_t) \mathcal{D}(\Sigma) = \underset{(\Sigma)}{Sp} \overset{+}{W}(t,t_0) F(t,S) W(t,t_0) \mathcal{D}(\Sigma) . \quad (I,22)$$

Также имеем:

$$\underset{(\Sigma)}{Sp} F(t,S_t) G(\tau,S_\tau) \mathcal{D}(\Sigma) = \underset{(\Sigma)}{Sp} \overset{+}{U}(t,t_0) F(t,S) U(t,t_0) \overset{+}{U}(\tau,t_0) G(\tau,S) U(\tau,t_0) \mathcal{D}(\Sigma) =$$

$$= \underset{(\Sigma)}{Sp}\, e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t_0} \overset{+}{W}(t,t_0) e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} F(t,S) e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t} W(t,t_0) e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t_0} \cdot e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t_0} \overset{+}{W}(\tau,t_0) e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)\tau} \otimes \quad (I,23)$$

$$\otimes G(\tau,S) e^{-\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)\tau} W(\tau,\tau_0) e^{\frac{i}{\hbar}H(\Sigma)t_0} \mathcal{D}(\Sigma) =$$

$$= \underset{(\Sigma)}{Sp} \overset{+}{W}(t,t_0) F(t,S) W(t,t_0) \overset{+}{W}(\tau,t_0) G(\tau,S) W(\tau,\tau_0) \mathcal{D}(\Sigma),$$

или, что то же самое:

$$Sp\, G(\tau,S_\tau) F(t,S_t) \mathcal{D}(\Sigma) = \quad (I,24)$$

$$= \underset{(\Sigma)}{Sp} \overset{+}{W}(\tau,t_0) G(\tau,S) W(\tau,t_0) \overset{+}{W}(t,t_0) F(t,S) W(t,t_0) \mathcal{D}(\Sigma).$$

заметим далее, что

$$W(t,\tau) \cdot W(\tau,t_0)$$

$$\text{и} \quad W(t,t_0)$$

удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = \left\{ \Gamma(t,S) + H_{int}(t,S,\Sigma) \right\} W$$

и совпадают при $t = \tau$. Поэтому, поскольку данное уравнение первого порядка по $\frac{\partial}{\partial t}$, отсюда следует, что

$$W(t,\tau) W(\tau,t_0) = W(t,t_0).$$

Умножая справа на $\overset{+}{W}(\tau, t_0)$, ввиду унитарности W получим:

$$W(t,\tau) = W(t,t_0)\cdot \overset{+}{W}(\tau,t_0), \tag{I,25}$$

и взяв сопряжение, из (I,25) получим:

$$\overset{+}{W}(t,\tau) = W(\tau,t_0)\,\overset{+}{W}(t,t_0).$$

Поэтому (I,23), (I,24) могут быть записаны в виде

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, F(t,S_t)\, G(\tau,S_\tau)\, \mathcal{D}(\Sigma) = \underset{(\Sigma)}{Sp}\, \overset{+}{W}(t,t_0) F(t,S)\, W(t,\tau) G(\tau,S)\, W(\tau,t_0)\, \mathcal{D}(\Sigma). \tag{I,26}$$

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, G(\tau,S_\tau)\, F(t,S_t)\, \mathcal{D}(\Sigma) = \underset{(\Sigma)}{Sp}\, \overset{+}{W}(\tau,t_0)\, G(\tau,S)\, \overset{+}{W}(t,\tau) F(t,S)\, W(t,t_0)\, \mathcal{D}(\Sigma).$$

Перейдем к введению T-произведений.

Из (I,20)* следует:

$$W(t,t_0) = T\left\{\exp \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} \left(\Gamma(\xi,S) + H_{int}(\xi,S,\Sigma)\right) d\xi\right\}. \tag{I,27}$$

Здесь

$$H_{int}(\xi,S,\Sigma) = \sum_{(k)} \left\{ C_k(\xi,S)\,\tilde{b}_k(\xi) + \overset{+}{C}_k(\xi,S)\,\tilde{b}^{+}_k(\xi)\right\}, \tag{I,28}$$

$$\tilde{b}_k(\xi) = b_k e^{-i\omega_k \xi}; \qquad \tilde{b}^{+}_k(\xi) = \overset{+}{b}_k e^{i\omega_k \xi}.$$

Здесь T- обычное хронологическое произведение, где упорядочение во времени идет с ростом времени справа налево. Поэтому в данной ситуации временная переменная не только дает операторам $\Gamma(\xi, S)$, $C_k(\xi, S)$, $C^{+}_k(\xi, S)$ определенное выражение, но и определяет порядок следования операторов в произведениях.

Таким образом, если $\Gamma(\xi, S)$, $C_k(\xi, S)$ не зависят от времени ξ, необходимо формально ввести такую зависимость для обеспечения правильного порядка следования одного оператора за другим /4/. *)

Лишь после исключения символов T-произведений в окончательном результате можно положить $\Gamma(\xi, S) = \Gamma(S)$, $C_k(\xi, S) = C_k(S)$ и т.д.

Кстати, как видно, бозе-операторы в (I,28) всегда занумерованы временной переменной, входящей в (I,28) в форме $\tilde{b}_k(\xi)$, $\tilde{b}^{+}_k(\xi)$.

Поскольку из (I,20) следует

$$-i\hbar \frac{\partial \overset{+}{W}(t,t_0)}{\partial t} = \overset{+}{W}(t,t_0)\left\{\Gamma(t,S) + H_{int}(t,S,\Sigma)\right\},$$

видим, что

$$\overset{+}{W}(t,t_0) = \overset{(a)}{T}\left\{\exp \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} \left[\Gamma(\xi,S) + H_{int}(\xi,S,\Sigma)\right] d\xi\right\}, \tag{I,29}$$

где $\overset{(a)}{T}$ – обозначает антихронологическое произведение, в котором "время" увеличивается слева направо.

Можем теперь записать (I,22) в виде

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, F(t,S_t)\, \mathcal{D}(\Sigma) = \underset{(\Sigma)}{Sp}\, \overset{(a)}{T}\left\{ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H'(\xi)d\xi}\right\} F(t,S)\, T\left\{ e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H'(\xi)d\xi}\right\} \mathcal{D}(\Sigma), \tag{I,30}$$

---

*) Это замечание о необходимости введения временного индекса, автоматически обеспечивающее порядок следования операторов, принадлежит Р.Фейнману: Phys.Rev. 84, стр. 108, 1951.

где $$H'(\xi) = \Gamma(\xi, S) + H_{int}(\xi, S, \Sigma).$$

Возьмем (I,26), в которых положим $t_0 < \tau < t$, и заметим, что:

$$W(t,\tau)G(\tau,S)W(\tau,t_0) =$$
$$= T\{e^{\frac{1}{i\hbar}\int_\tau^t H'(\xi)d\xi}\}G(\tau,S)T\{e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^\tau H'(\xi)d\xi}\} =$$
$$= T\{G(\tau,S)e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^t H'(\xi)d\xi}\}.$$
$$\overset{+}{W}(\tau,t_0)G(\tau,S)\overset{+}{W}(t,\tau) = \overset{(a)}{T}\{e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^\tau H'(\xi)d\xi}\}G(\tau,S)\overset{(a)}{T}\{e^{\frac{i}{\hbar}\int_\tau^t H'(\xi)d\xi}\} =$$
$$= \overset{(a)}{T}\{G(\tau,S)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t H'(\xi)d\xi}\}.$$

Тогда (I,26) дают:

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, F(t,S_t)G(\tau,S_\tau)\mathcal{D}(\Sigma) =$$
$$= \underset{(\Sigma)}{Sp}\, \overset{(a)}{T}\{e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t H'(\xi)d\xi}\}F(t,S)T\{G(\tau,S)e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^t H'(\xi)d\xi}\}\mathcal{D}(\Sigma). \qquad (I,3I)$$
$$t_0 < \tau < t$$
$$Sp\, G(\tau,S_\tau)F(t,S_t)\mathcal{D}(\Sigma) =$$
$$= \underset{(\Sigma)}{Sp}\, \overset{(a)}{T}\{G(\tau,S)e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t H'(\xi)d\xi}\}F(t,S)T\{e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^t H'(\xi)d\xi}\}\mathcal{D}(\Sigma).$$

Введем специальную операцию

$$T^F_{S^{(L)},S^{(R)}},$$

определенным образом упорядочивающую порядок операторов в произведении одного оператора $F(t, S)$ с рядом операторов типа $A_j(t_j, S)$, где $t_1, \ldots t_n$ - различные точки из временного интервала (t_0, t).

Итак, пусть $\mathfrak{A}$ является произведением одного оператора $F(t, S)$ и операторов $A_j(t_j, S)$ $(j = I, \ldots n)$, над некоторыми из которых стоит индекс (L) $(L$ - $Left)$:

$$A_{j'}^{(L)}(t_j, S),$$

а над остальными-индекс (R) $(R$ - $Right)$:

$$A_{j''}^{(R)}(t_{j''}, S).$$

Порядок следования указанных операторов в $\mathfrak{A}$ произволен. Операцию $T^F_{S^L,S^R}$ определяем следующим образом: все $A^{(L)}$ ставим слева от $F(t, S)$ и упорядочиваем в антихронологическом порядке; все $A^{(R)}$ ставим справа от $F(t, S)$ и упорядочиваем в хронологическом порядке. В конце этой процедуры убираем индексы (L), (R).

Тем самым по определению имеем:

$$T^{(F)}_{S^{(L)},S^{(R)}}(\mathfrak{A}) = \overset{(a)}{T}\{\prod_{(j')} A_{j'}(t_{j'}, S)\}F(t,S)T\{\prod_{j''} A_{j''}(t_{j''}, S)\}.$$

Как видно, под знаком операции $T^{(F)}_{S^L,S^R}$ все входящие операторы можно переставлять любым образом (как если бы они были C-величинами), не меняя результата, поскольку $T^{(F)}_{S^L,S^R}$ автоматически устанавливает окончательный порядок следования операторов. Существенно лишь, чтобы каждый из операторов A был снабжен индексом (L) или (R). Введенная операция естественно обобщается и на трансцедентные функционалы от операторов. Имеем, например:

$$T^F_{S^L,S^R}\{e^{\int_{t_0}^t \{A^L(\xi,S) + B^R(\xi,S)\}d\xi}F(t,S)\} = T^F_{S^L,S^R}\{e^{\int_{t_0}^t A^L(\xi,S)d\xi} \cdot e^{\int_{t_0}^t B^R(\xi,S)d\xi}F(t,S)\} =$$
$$T^F_{S^L,S^R}\{e^{\int_{t_0}^t A^L(\xi,S)d\xi}F(t,S)e^{\int_{t_0}^t B^R(\xi,S)d\xi}\} =$$
$$= \overset{(a)}{T}\{e^{\int_{t_0}^t A(\xi,S)d\xi}\}F(t,S)T\{e^{\int_{t_0}^t B(\xi,S)d\xi}\}.$$

Обратимся теперь к формуле (I,30). Имеем, учитывая (I,28),

$$\overset{(a)}{T}\left\{e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H'(\xi)d\xi}\right\} F(t,S)\, T\left\{e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H'(\xi)d\xi}\right\} =$$

$$= T^{F}_{S^L S^R}\left\{e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma^{(L)}(\xi,S)-\Gamma^{(R)}(\xi,S)\}d\xi} F(t,S)\, \overset{(a)}{T_\Sigma}\left\{e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H^{(L)}_{int}(\xi)d\xi}\right\} T_\Sigma\left\{e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H^{(R)}_{int}(\xi)d\xi}\right\}\right\},$$

где

$$H^{L}_{int}(\xi) = \sum_{(k)}\left(C^{(L)}_k(\xi,S)\,\tilde{b}_k(\xi) + \overset{+}{C}{}^{(L)}_k(\xi,S)\,\tilde{b}^{+}_k(\xi)\right),$$

$$H^{R}_{int}(\xi) = \sum_{(k)}\left(C^{(R)}_k(\xi,S)\,\tilde{b}_k(\xi) + \overset{+}{C}{}^{(R)}_k(\xi,S)\,\tilde{b}^{+}_k(\xi)\right)$$

и где операции $\overset{(a)}{T_\Sigma}$, T_Σ действуют только на $\ldots\ \tilde{b}_k(\xi)\ldots\ \tilde{b}^{+}_k(\xi)\ldots$

Таким образом,

$$\underset{(S)}{Sp}\, F(t,S_t)\,\mathcal{D}(\Sigma) = \tag{I,32}$$

$$= T^{F}_{S^L S^R}\left\{e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma^{L}(\xi,S)-\Gamma^{R}(\xi,S)\}d\xi} F(t,S)\left\langle \overset{a}{T_\Sigma}\left\{e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H^{(L)}_{int}(\xi)d\xi}\right\} T\left\{e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H^{R}_{int}(\xi)d\xi}\right\}\right\rangle_{\Sigma}\right\}.$$

Поскольку с операторами $C^{(L)}_K$, $\overset{+}{C}{}^{(L)}_K$, C^R_k, $\overset{+}{C}{}^R_k$ внутри знака $T^F_{S^L S^R}$, можно обращаться как с С–величинами, мы можем для вычисления выражения, входящего в (I,32),

$$\langle \ldots \rangle_\Sigma ,$$

воспользоваться формулой (V) §3 (см. стр. 35), положив в (IV')

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\xi) &= \frac{i}{\hbar} H^{(L)}_{int}(\xi), & \mathcal{A}(\xi) &= -\frac{i}{\hbar} H^{(R)}_{int}(\xi),\\
\mathcal{B}_k(\xi) &= \frac{i}{\hbar} C^{(L)}_k(\xi,S), & \mathcal{B}^{(1)}_k(\xi) &= \frac{i}{\hbar}\overset{+}{C}{}^{L}_k(\xi,S),\\
\mathcal{U}_k(\xi) &= -\frac{i}{\hbar} C^{R}_k(\xi,S), & \mathcal{U}^{(1)}_k(\xi) &= -\frac{i}{\hbar}\overset{+}{C}{}^{R}_k(\xi,S).
\end{aligned} \tag{I,33}$$

Тогда из (I,32) найдем

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, F(t,S_t)\,\mathcal{D}(\Sigma) = T^{F}_{S^L S^R}\left\{e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma^{L}(\xi,S)-\Gamma^{R}(\xi,S)\}d\xi} F(t,S)\cdot e^{\phi(t,t_0)}\right\}, \tag{I,34}$$

причем

$$\phi(t,t_0) = \frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t} d\tau\int_{t_0}^{t} d\xi \sum_{(k)}\Big\{e^{-i\omega_k(\xi-\tau)}(1+N_k)\,C^{(L)}_k(\xi,S)\,C^{(R)}_k(\tau,S) +$$

$$+ e^{i\omega_k(\xi-\tau)} N_k\, \overset{+}{C}{}^{(L)}_k(\xi,S)\,C^{(R)}_k(\xi,S)\Big\} - \tag{I,35}$$

$$-\frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t} d\tau\int_{t_0}^{\tau} d\xi\sum_{(k)}\Big\{e^{-i\omega_k(\xi-\tau)}(1+N_k)\,C^{(L)}_k(\xi,S)\,\overset{+}{C}{}^{(L)}_k(\tau,S) + N_k\, e^{i\omega_k(\xi-\tau)}\,\overset{+}{C}{}^{(L)}_k(\xi,S)\,C^{(L)}_k(\tau,S) +$$

$$+ e^{-i\omega_k(\tau-\xi)}(1+N_k)\,C^{R}_k(\tau,S)\,\overset{+}{C}{}^{R}_k(\xi,S) + e^{i\omega_k(\tau-\xi)} N_k\,\overset{+}{C}{}^{R}_k(\tau,S)\,C^{R}_k(\xi,S)\Big\}.$$

Займемся сейчас выражением (I.3I) для $t_0 < \tau < t$.

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, F(t,S_t)\, G(\tau,S_\tau)\, \mathcal{D}(\Sigma) =$$

$$= \underset{(\Sigma)}{Sp}\, \overset{(a)}{T}\left\{ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma(\xi,S)+H_{int}(\xi)\}d\xi} \right\} F(t,S)\, T\left\{ G(\tau,S)\, e^{\frac{i}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma(\xi,S)+H_{int}(\xi)\}d\xi} \right\} \mathcal{D}(\Sigma) =$$

$$= \underset{(\Sigma)}{Sp}\, T^F_{S^L_s S^R}\left\{ \overset{(a)}{T_\Sigma}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma^{(L)}(\xi,S)+H^{(L)}_{int}(\xi)\}d\xi} \right) F(t,S)\, T\left\{ G^R(\tau,S)\, e^{\frac{i}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma^R(\xi,S)+H^R_{int}(\xi)\}d\xi} \right\} \mathcal{D}(\Sigma) \right\} =$$

$$= Sp\, T^F_{S^L_s S^R}\left\{ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma^{(L)}(\xi,S)-\Gamma^{(R)}(\xi,S)\}d\xi}\, F(t,S)\, G^{(R)}(\tau,S)\, \overset{(a)}{T_\Sigma}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H^L_{int}(\xi)d\xi} \right) T_\Sigma\left(e^{\frac{i}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H^R_{int}(\xi)d\xi} \right) \mathcal{D}(\Sigma) \right\} =$$

$$= T^F_{S^L_s S^R}\left\{ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma^L(\xi,S)-\Gamma^R(\xi,S)\}d\xi}\, F(t,S)\, G^R(\tau,S) \left\langle \overset{a}{T_\Sigma}\left(e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H^L_{int}(\xi)d\xi} \right) T_\Sigma\left(e^{\frac{i}{i\hbar}\int_{t_0}^{t} H^R_{int}(\xi)d\xi} \right) \right\rangle_\Sigma \right\} = \qquad \text{(I,36)}$$

$$= T^F_{S^L_s S^R}\left\{ e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma^L(\xi,S)-\Gamma^R(\xi,S)\}d\xi}\, F(t,S)\, G^R(\tau,S)\, e^{\Phi(t,t_0)} \right\}.$$

Обозначим для удобства

$$e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\{\Gamma^L(\xi,S)-\Gamma^R(\xi,S)\}d\xi} = \Delta(L,R).$$

Совершенно аналогично для $t_0 < \tau < t$

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, G(\tau,S_\tau)\, F(t,S_t)\, \mathcal{D}(\Sigma) =$$

$$= T^F_{S^L_s S^R}\left\{ \Delta(L,R)\, G^{(L)}(\tau,S)\, F(t,S)\, e^{\Phi(t,t_0)} \right\}. \qquad \text{(I,37)}$$

Вспомогательные равенства(I,34; I,36; I,37),в которых $\Phi(t,t_0)$ дано формулой (I,35), сейчас будут использованы.

Возьмем динамическую переменную, которая в шредингеровском представлении имеет форму $f(S)$, явно не зависящую от времени.

Имеем, учитывая (I,34),

$$\underset{(S,\Sigma)}{Sp}\, f(S_t)\, \mathcal{D}_{t_0} = \underset{(S,\Sigma)}{Sp}\, f(S_t)\, \mathcal{D}(\Sigma)\, \rho(S) = \underset{(S)}{Sp}\, \rho(S) \underset{(\Sigma)}{Sp}\, f(S_t)\, \mathcal{D}(\Sigma) =$$

$$= Sp\, \rho(S)\, T^f_{S^L_s S^R}\left\{ \Delta(L,R)\, f(S)\, e^{\Phi(t,t_0)} \right\}.$$

Продифференцируем это равенство по t. Получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underset{(S,\Sigma)}{Sp}\, f(S_t)\, \mathcal{D}_{t_0} =$$

$$= \underset{(S)}{Sp}\, \rho(S)\, T^f_{S^L_s S^R}\left\{ \Delta(L,R) \cdot \frac{i}{\hbar}\{\Gamma^{(L)}(t,S) - \Gamma^R(t,S)\} f(S) \cdot e^{\Phi(t,t_0)} \right\} +$$

$$+ \underset{(S)}{Sp}\, \rho(S)\, T^f_{S^L_s S^R}\left\{ \Delta(L,R) \cdot f(S) \cdot \frac{\partial \Phi(t,t_0)}{\partial t} \cdot e^{\Phi(t,t_0)} \right\}. \qquad \text{(I,38)}$$

Рассмотрим первый член в правой части(I,I8). Имеем, обозначая его $\underset{(S)}{Sp}\, \rho(S) \cdot \mathcal{E}_1$:

$$\mathcal{E}_1 = T^F_{S^L_s S^R}\left\{ \Delta(L,R) \cdot \frac{i}{\hbar}\{\Gamma^L(t,S) f(S) - f(S)\Gamma^R(t,S)\} e^{\Phi(t,t_0)} \right\}.$$

Легко заметить, что

$$\mathcal{E}_1 = T^F_{S^L_s S^R}\left\{ \Delta(L,R) \cdot F(t,S) \cdot e^{\Phi(t,t_0)} \right\}, \qquad \text{(I,39)}$$

где

$$F(t,S) = \frac{i}{\hbar}\{\Gamma(t,S) f(S) - f(S)\Gamma(t,S)\},$$

и поэтому ввиду (I,34)

$$\mathcal{E}_1 = \frac{i}{\hbar} \underset{(\Sigma)}{Sp}\{\Gamma(t,S_t) f(S_t) - f(S_t)\Gamma(t,S_t)\}\, \mathcal{D}(\Sigma).$$

Таким образом, из (I,38) найдем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} f(S_t)\mathcal{D}_{t_0} + \frac{i}{\hbar}\,Sp\{f(S_t)\Gamma(t,S_t)-\Gamma(t,S_t)f(S_t)\}\mathcal{D}_{t_0} =$$

$$= \mathop{Sp}_{(S)}\rho(S)\,T^{F}_{S^L,S^R}\left\{\Delta(L,R)\, f(S)\frac{\partial\Phi(t,t_0)}{\partial t}e^{\Phi(t,t_0)}\right\}.$$

Но, используя тождество (I,I6), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathop{Sp}_{(S)} f(S)\rho_t(S) + \frac{i}{\hbar}\mathop{Sp}_{(S)}\{f(S)\Gamma(t,S)-\Gamma(t,S)f(S)\}\rho_t(S)=$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} f(S_t)\mathcal{D}_{t_0} + \frac{i}{\hbar}\mathop{Sp}_{(S,\Sigma)}\{f(S_t)\Gamma(t,S_t)-\Gamma(t,S_t)f(S_t)\}\mathcal{D}_{t_0}.$$

Но левая часть этого тождества может быть, очевидно, также представлена выражением

$$\mathop{Sp}_{(S)} f(S)\frac{\partial\rho_t(S)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\mathop{Sp}_{(S)} f(S)\{\Gamma(t,S)\rho_t(S)-\rho_t(S)\Gamma(t,S)\}. \qquad (I,40)$$

Таким образом, получаем:

$$\mathop{Sp}_{(S)} f(S)\left\{\frac{\partial\rho_t(S)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\Gamma(t,S)\rho_t(S)-\rho_t(S)\Gamma(t,S)]\right\} =$$

$$= \mathop{Sp}_{(S)}\rho(S)\,T^{F}_{S^L,S^R}\left\{\Delta(L,R)f(S)\frac{\partial\Phi(t,t_0)}{\partial t}e^{\Phi(t,t_0)}\right\}. \qquad (I,40')$$

Воспользуемся теперь формулой (V') § 3 Дополнения, когда $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{A}_k^{(1)}$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{B}_k^{(1)}$ представлены выражениями (I,33).

Найдем

$$\frac{\partial\Phi(t,t_0)}{\partial t} = \frac{1}{\hbar^2}\int_{t_0}^{t}d\tau\sum_{(k)}\Big\{(1+N_k)e^{i\omega_k(t-\tau)}\overset{L}{C_k}(\tau,S)\overset{+R}{C_k}(t,S)+N_k e^{-i\omega_k(t-\tau)}\overset{+L}{C_k}(\tau,S)\overset{R}{C_k}(t,S)+ \qquad (I,4I)$$

$$+(1+N_k)e^{-i\omega_k(t-\tau)}\overset{L}{C_k}(t,S)\overset{+R}{C_k}(\tau,S)+N_k e^{i\omega_k(t-\tau)}\overset{+L}{C_k}(t,S)\overset{R}{C_k}(\tau,S) -$$

$$-e^{i\omega_k(t-\tau)}(1+N_k)\overset{(L)}{C_k}(\tau,S)\cdot\overset{+(L)}{C_k}(t,S) - e^{-i\omega_k(t-\tau)}N_k\overset{+L}{C_k}(\tau,S)C^{(L)}(t,S) -$$

$$-e^{-i\omega_k(t-\tau)}(1+N_k)\overset{(R)}{C_k}(t,S)\overset{+(R)}{C}(\tau,S) - e^{i\omega_k(t-\tau)}N_k\overset{+R}{C_k}(t,S)C^{(R)}(\tau,S)\Big\}.$$

Подставляя (I,4I) в (I,40), получим:

$$\mathop{Sp}_{(S)} f(S)\left\{\frac{\partial\rho_t(S)}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}[\Gamma(t,S)\rho_t(S)-\rho_t(S)\Gamma(t,S)]\right\} = \qquad (I,42)$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\mathop{Sp}_{(S)}\rho(S)T^{F}_{S^L,S^R}\Big\{\Delta(L,R)e^{\Phi(t,t_0)}\sum_{k}\int_{t_0}^{t}d\tau\Big\{(1+N_k)e^{i\omega_k(t-\tau)}\times$$

$$\times \overset{(L)}{C_k}(\tau,S)[f(S)\overset{+R}{C_k}(t,S)-\overset{+L}{C_k}(t,S)f(S)] + N_k e^{i\omega_k(t-\tau)}[\overset{+L}{C_k}(t,S)f(S)-f(S)\overset{+R}{C_k}(t,S)]\overset{R}{C_k}(\tau,S)\Big\}+$$

$$+\mathop{Sp}_{(S)}\rho(S)T^{F}_{S^L,S^R}\Big\{\Delta(L,R)e^{\Phi(t,t_0)}\sum_{(k)}\int_{t_0}^{t}d\tau\Big\{N_k e^{-i\omega_k(t-\tau)}\overset{+L}{C_k}(\tau,S)[f(S)\overset{R}{C_k}(t,S)-\overset{L}{C}(t,S)f(S)]+$$

$$+e^{-i\omega_k(t-\tau)}(1+N_k)[\overset{L}{C_k}(t,S)f(S)-f(S)\overset{R}{C_k}(t,S)]\overset{+R}{C_k}(\tau,S)\Big\}\Big\}.$$

Обозначим

$$f(S)\overset{+}{C_k}(t,S)-\overset{+}{C_k}(t,S)f(S)=F_{1,k}(t,S),$$
$$f(S)\,C_k(t,S)-C_k(t,S)f(S)=F_{0,k}(t,S). \qquad (I,43)$$

Тогда с учетом (I,36), (I,37) получим:

$$\mathop{Sp}_{(S)} \rho(S) T^{F}_{S_t^L S^R} \{ \Delta(L,R) e^{\Phi(t,t_0)} C^L(\tau,S) [f(S) \overset{+}{C}{}^R_k(t,S) - \overset{+}{C}{}^L_k(t,S) f(S)] \} =$$

$$= \mathop{Sp}_{(S)} \rho(S) T^{F_{(1k)}} \{ \Delta(L,R) e^{\Phi(t,t_0)} C^L(\tau,S) F_{1,k}(t,S) \} = \qquad (I,44)$$

$$= \mathop{Sp}_{(S)} \rho(S) \mathop{Sp}_{(\Sigma)} C(\tau,S_\tau) F_{1,k}(t,S_t) \mathcal{D}(\Sigma) = \mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} C(\tau,S_\tau) F_{1,k}(t,S_t) \mathcal{D}_{t_0},$$

и совершенно аналогично:

$$\mathop{Sp}_{(S)} \rho(S) T^{R}_{S_t^L S^R} \{ \Delta(L,R) e^{\Phi(t,t_0)} \times [\overset{+}{C}{}^L_k(t,S) f(S) - f(S) \overset{+}{C}{}^R_k(t,S)] C^R_k(\tau,S) =$$

$$= -\mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} F_{1,k}(t,S_t) C(\tau,S_\tau) \mathcal{D}_{t_0}. \qquad (I,45)$$

$$\mathop{Sp}_{(S)} \rho(S) T^{t}_{S_t^L S^R} \{ \Delta(L,R) e^{\Phi(t,t_0)} \overset{+}{C}{}^L_k(\tau,S) \times [f(S) C_k(t,S) - C_k(t,S) f(S)] \} =$$

$$= \mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} \overset{+}{C}_k(\tau,S_\tau) F_{0,k}(t,S_t) \mathcal{D}_{t_0}.$$

$$\mathop{Sp}_{(S)} \rho(S) T^{t}_{S_t^L S^R} \{ \Delta(L,R) e^{\Phi(t,t_0)} [C^L_k(t,S) f(S) - f(S) C^R_k(t,S)] \overset{+}{C}{}^R_k(t,S) \} =$$

$$= -\mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} F_{0,k}(t,S_t) \overset{+}{C}_k(\tau,S_\tau) \mathcal{D}_{t_0}.$$

Таким образом, уравнение (I,42) может быть переписано в виде

$$\mathop{Sp}_{(S)} \{ f(S) \frac{\partial \rho_t(S)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [f(S) \Gamma(t,S) - \Gamma(t,S) f(S)] \rho_t(S) \} =$$

$$= \mathop{Sp}_{(S)} f(S) \{ \frac{\partial \rho_t(S)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\Gamma(t,S) \rho_t(S) - \rho_t(S) \Gamma(t,S)] \} =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{(k)} \int_{t_0}^{t} d\tau \mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} e^{i\omega_k(t-\tau)} \{ (1+N_k) C_k(\tau,S_\tau) [f(S_t) \overset{+}{C}_k(t,S_t) - \overset{+}{C}_k(t,S_t) f(S_t)] +$$

$$+ N_k [\overset{+}{C}_k(t,S_t) f(S_t) - f(S_t) \overset{+}{C}_k(t,S_t)] C_k(\tau,S_\tau) \} \mathcal{D}_{t_0} + \qquad (I,46)$$

$$+ \frac{1}{\hbar^2} \sum_{(k)} \int_{t_0}^{t} d\tau \mathop{Sp}_{(S,\Sigma)} e^{-i\omega_k(t-\tau)} \{ N_k \overset{+}{C}_k(\tau,S_\tau) [f(S_t) C_k(t,S_t) - C_k(t,S_t) f(S_t)] +$$

$$+ (1+N_k) [C_k(t,S_t) f(S_t) - f(S_t) C_k(t,S_t)] \overset{+}{C}_k(\tau,S_\tau) \} \mathcal{D}_{t_0}.$$

Рассмотрим частный случай, когда

$$\overset{+}{C}_k(t,S) = C_{-k}(t,S) \qquad (I,47)$$

и когда в сумме $\sum_{(k)}$ всегда

$$\sum_{(k)} F(k) = \sum_{(k)} F(-k). \qquad (I,48)$$

Эти условия автоматически выполняются в примере (I). В примере II они выполняются, если

$$|L_k| = |L_{-k}|. \qquad (I,49)$$

Положим, действительно,

$$L_k = |L_k| e^{i\varphi_k}; \quad L_k^* = |L_k| e^{-i\varphi_k}.$$

и перейдем к бозе-амплитудам

$$b_k \to b_k e^{-i\varphi_k}; \quad b_k^+ \to b_k^+ e^{i\varphi_k}.$$

В (I,4) можно заменить

$$C_k(t,S) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}} |L_k| \sum_{(f)} \overset{+}{a}_{f+k} a_f, \qquad (I,50)$$

$$\overset{*}{C}_k(t,S) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}} |L_k| \sum_{(f)} \overset{+}{a}_{f-k}\, a_f \ ,$$

Условие (I,48) выполняется тривиально ввиду того, что квази-дискретный спектр (K) имеет вид (I,3).

Итак, возьмем случай, когда условия (I,47), (I,48) выполнены. Заменим тогда в первой сумме по k в правой части (I,46) $\vec{K} \to -\vec{K}$.

Тогда (I,46) примет вид:

$$Sp\left\{ f(S)\frac{\partial \rho_t(S)}{\partial t} + \frac{\Gamma(t,S)f(S) - f(S)\Gamma(t,S)}{i\hbar}\rho_t(S)\right\} = \qquad (I,5I)$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\sum_{(k)} \int_{t_0}^{t} d\tau \left\{ (1+N_k)e^{i\omega_k(t-\tau)} + N_k e^{-i\omega_k(t-\tau)} \right\} \underset{(S,\Sigma)}{Sp}\, C_{-k}(\tau,S_\tau)\{ f(S_t)C_k(t,S_t) -$$

$$- C_k(t,S_t)f(S_t)\} \mathcal{D}_{t_0} +$$

$$+ \frac{1}{\hbar^2}\sum_{(k)} \int_{t_0}^{t} d\tau \left\{ N_k e^{i\omega_k(t-\tau)} + (1+N_k)e^{-i\omega_k(t-\tau)} \right\} Sp\{ C_k(t,S_t)f(S_t) -$$

$$- f(S_t)C_k(t,S_t)\} C_{-k}(\tau,S_\tau)\, \mathcal{D}_{t_0}.$$

В частности, для примера I

$$C_k(t,S) = \frac{e^{\varepsilon t}}{\sqrt{V}}\, \mathcal{I}(k)\left(\frac{\hbar}{2\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \ ; \quad \mathcal{I}(k) = \overset{*}{\mathcal{I}}(k) = \mathcal{I}(-k)$$

и (I,5I) дает

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\left\{ f(S)\frac{\partial \rho_t(S)}{\partial t} + \frac{(\Gamma(t,S)f(S) - f(S)\Gamma(t,S))}{i\hbar}\rho_t(S)\right\} =$$

$$= \frac{1}{V} e^{2\varepsilon t}\sum_{(k)} \frac{\mathcal{I}^2(k)}{2\hbar\omega_k}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-\varepsilon(t-\tau)}\left\{ (1+N_k)e^{i\omega_k(t-\tau)} + N_k e^{-i\omega_k(t-\tau)}\right\} \underset{(S,\Sigma)}{Sp}\, e^{-i\vec{k}\vec{r}(\tau)}\left\{ f(S_t)e^{i\vec{k}\vec{r}(t)} - e^{i\vec{k}\vec{r}(t)} f(S_t)\right\} \mathcal{D}_{t_0} +$$

$$+ \frac{1}{V} e^{2\varepsilon t}\sum_{(k)} \frac{\mathcal{I}^2(k)}{2\hbar\omega_k}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-\varepsilon(t-\tau)}\left\{ N_k e^{i\omega_k(t-\tau)} + (1+N_k)e^{-i\omega_k(t-\tau)}\right\} \underset{(S,\Sigma)}{Sp}\left\{ e^{i\vec{k}\vec{r}(t)} f(S_t) -\right.$$

$$\left. - f(S_t)e^{i\vec{k}\vec{r}(t)}\right\} e^{-i\vec{k}\vec{r}(\tau)}\mathcal{D}_{t_0},$$

то есть получили уравнение (2,I9) препринта /I/.

(Н.Н.Боголюбов. EI7-II822, Дубна, I978).

§ 2. Дополнение

Исключение фононных переменных с помощью Т-произведений

Здесь рассмотрим методику исключения фононных переменных с помощью Т-произведений. Будут построены полезные формулы для средних от хронологических и антихронологических упорядоченных Т-произведений.

а) Введем систему Σ с гамильтонианом:

$$H(\Sigma) = \sum_{(k)} \hbar\omega_k b_k^{+} b_k \ ,$$

$\ldots b_k \ \ldots \overset{+}{b_k}$ ... – бозе-амплитуды.

Пусть $\mathcal{A}(\xi), \mathcal{B}(\xi)$ – линейные формы из бозе-амплитуд. Отсюда следует, что коммутаторы

$[\mathcal{A}(\xi);\mathcal{A}(\tau)]$, $[\mathcal{A}(\xi),\mathcal{B}(\tau)]$, $[\mathcal{B}(\xi),\mathcal{B}(\tau)]$ – С-числа.

Здесь $[\mathcal{U},\mathcal{B}] = \mathcal{U}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{U}$.

Поэтому нетрудно видеть, что

$$T\left\{e^{\int_{t_0}^{t} A(\xi)d\xi}\right\} = e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi\, [A(\tau), A(\xi)]} \cdot e^{\int_{t_0}^{t} A(\xi)d\xi},$$

$$\overset{(a)}{T}\left\{e^{\int_{t_0}^{t} B(\xi)d\xi}\right\} = e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi\, [B(\xi), B(\tau)]} \cdot e^{\int_{t_0}^{\tau} B(\xi)d\xi}.$$

Здесь T, $\overset{(a)}{T}$ – хронологическое и антихронологическое произведения с упорядочением по временной переменной.

Заметим, что

$$\mathcal{D}(\Sigma) = \mathcal{D}_{eq}(\Sigma) = Z^{-1} e^{-\beta H(\Sigma)}; \quad Z = \underset{(\Sigma)}{Sp}\, e^{-\beta H(\Sigma)},$$

$$Sp\, \overset{(a)}{T}\left\{e^{\int_{t_0}^{t} B(\xi)d\xi}\right\} T\left\{e^{\int_{t_0}^{t} A(\xi)}\right\} \mathcal{D}(\Sigma) =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi \{[B(\xi); B(\tau)] + [A(\tau); A(\xi)]\}} \cdot \underset{(\Sigma)}{Sp}\, e^{\int_{t_0}^{t} B(\xi)d\xi} \cdot e^{\int_{t_0}^{t} A(\xi)d\xi}\, \mathcal{D}(\Sigma).$$

$$\left[\int^{t} B(\xi)d\xi;\ \int^{t} A(\xi)d\xi\right] = \text{С-числа},$$

$$e^{-\int_{t_0}^{t} B(\xi)d\xi} \cdot e^{\int_{t_0}^{t} A(\xi)d\xi} = e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi\, [B(\xi); A(\tau)]} \cdot e^{\int_{t_0}^{t} B(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{t} A(\xi)d\xi}.$$

Так как

$$\int_{t_0}^{t} B(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{t} A(\xi)d\xi \ -$$

линейная форма из $b_k \ldots \ b_k^+$, то:

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, e^{\left(\int_{t_0}^{t} B(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{t} A(\xi)d\xi\right)} = \exp\tfrac{1}{2}\left\langle \left(\int_{t_0}^{t} B(\xi)d\xi + \int_{t_0}^{t} A(\xi)d\xi\right)^2 \right\rangle_{\Sigma} =$$

$$= \exp\tfrac{1}{2}\left\{\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi \left[\langle B(\tau)B(\xi)\rangle_{\Sigma} + \langle A(\xi)\cdot A(\tau)\rangle_{\Sigma} + \langle B(\xi)\, A(\tau)\rangle_{\Sigma} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \langle A(\tau)\, B(\xi)\rangle_{\Sigma}\right]\right\}.$$

Здесь $\langle \mathcal{U}\rangle_{\Sigma} = \underset{(\Sigma)}{Sp}\, \mathcal{U}\cdot \mathcal{D}(\Sigma)$.

Поэтому, если $\mathcal{U}$ есть С – величина, то

$$\langle \mathcal{U}\rangle_{\Sigma} = \mathcal{U}.$$

Итак,

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, \overset{(a)}{T}\left\{e^{\int_{t_0}^{t} B(\xi)d\xi}\right\} T\left\{e^{\int_{t_0}^{t} A(\xi)d\xi}\right\} \mathcal{D}(\Sigma) = e^{\Phi(t,t_0)}, \qquad \text{(I)}$$

где

$$\Phi(t,t_0) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi \langle B(\xi)B(\tau) - B(\tau)B(\xi) + A(\tau)A(\xi) - A(\xi)A(\tau)\rangle_{\Sigma} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi \langle B(\xi)A(\tau) - A(\tau)\cdot B(\xi) + B(\tau)\cdot B(\xi) + A(\xi)\cdot A(\tau) + B(\xi)\cdot A(\tau) +$$

$$+ A(\tau)\cdot B(\xi)\rangle_{\Sigma},$$

---

* Если A и B коммутируют с $[A, B]$, то здесь используются формулы:

а) $e^{A}\cdot e^{B} = e^{\frac{1}{2}[A,B]}\cdot e^{A+B}$.

б) $\langle e^{A}\rangle_{\Gamma} = e^{\frac{1}{2}\langle A^2\rangle_{\Gamma}}$, где A – линейная форма из бозе-операторов и

$$\Gamma = \sum_{(\omega)} E_\omega b_\omega^+ b_\omega.$$

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi \langle \mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{B}(\tau)\rangle_\Sigma - \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi \langle \mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(\xi)\rangle_\Sigma +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi \langle \mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(\xi)\rangle_\Sigma = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi \langle \mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{B}(\tau)\rangle_\Sigma + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\tau}^{t} d\xi \langle \mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(\xi)\rangle_\Sigma =$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi \langle \overset{(a)}{T}\{\mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(\xi)\}\rangle_\Sigma .$$

Аналогично имеем

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi \langle \mathcal{A}(\tau)\cdot\mathcal{A}(\xi)\rangle_\Sigma - \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi \langle \mathcal{A}(\xi)\cdot\mathcal{A}(\tau)\rangle_\Sigma + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi \langle \mathcal{A}(\xi)\cdot\mathcal{A}(\tau)\rangle_\Sigma =$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi \langle \mathcal{A}(\tau)\cdot\mathcal{A}(\xi)\rangle_\Sigma + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\tau}^{t} d\xi \langle \mathcal{A}(\xi)\cdot\mathcal{A}(\tau)\rangle_\Sigma =$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi \langle T\{\mathcal{A}(\tau)\cdot\mathcal{A}(\xi)\}\rangle_\Sigma .$$

Таким образом,

$$\Phi(t,t_0) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi \{\langle \overset{a}{T}\{\mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(\xi)\}\rangle_\Sigma + \langle T\{\mathcal{A}(\tau)\cdot\mathcal{A}(\xi)\}\rangle_\Sigma + 2\langle \mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{A}(\tau)\rangle_\Sigma\} \quad \text{(II)}$$

и производная по t будет равна

$$\frac{\partial\Phi(t,t_0)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\xi \{\langle \mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{B}(t)\rangle_\Sigma + \langle \mathcal{A}(t)\cdot\mathcal{A}(\xi)\rangle_\Sigma + 2\langle \mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{A}(t)\rangle_\Sigma\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} d\tau \{\langle \mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(t)\rangle_\Sigma + \langle \mathcal{A}(t)\cdot\mathcal{A}(\tau)\rangle_\Sigma + 2\langle \mathcal{B}(t)\cdot\mathcal{A}(\tau)\rangle_\Sigma\} = \quad \text{(III)}$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\tau \{\langle \mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(t)\rangle_\Sigma + \langle \mathcal{A}(t)\cdot\mathcal{A}(\tau)\rangle_\Sigma + \langle \mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{A}(t)\rangle_\Sigma + \langle \mathcal{B}(t)\cdot\mathcal{A}(\tau)\rangle_\Sigma\}.$$

а) Возможна и другая форма записи для Φ ($\underline{II}$). Нетрудно заметить, что $\overset{(a)}{T}\{\mathcal{B}(\tau).\mathcal{B}(\xi)\}$, $T\{\mathcal{A}(\tau).\mathcal{A}(\xi)\}$ симметричны по отношению к $\tau \rightleftarrows \xi$. Поэтому

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi \overset{(a)}{T}\{\mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(\xi)\} = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0,\ \tau<\xi}^{t} d\xi \overset{(a)}{T}\{\mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(\xi)\} + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0,\ \tau>\xi}^{t} d\xi \overset{(a)}{T}\{\mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(\xi)\} =$$

$$= 2\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0,\ \tau>\xi}^{t} d\xi\cdot \mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{B}(\tau) = 2\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi\, \mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{B}(\tau).$$

Аналогично

$$\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi\, T\{\mathcal{A}(\tau)\cdot\mathcal{A}(\xi)\} = 2\int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi\, \mathcal{A}(\tau)\cdot\mathcal{A}(\xi).$$

Итак, (II')

$$\Phi(t,t_0) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{\tau} d\xi \{\langle \mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{B}(\tau)\rangle_\Sigma + \langle \mathcal{A}(\tau)\cdot\mathcal{A}(\xi)\rangle_\Sigma\} + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{t_0}^{t} d\xi \langle \mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{A}(\tau)\rangle_\Sigma .$$

б) Пусть

$$\mathcal{A}(\tau) = \sum_{(k)} \{\mathfrak{U}_k(\tau) b_k e^{-i\omega_k\tau} + \mathfrak{U}'_k(\tau) b_k^+ e^{i\omega_k\tau}\},$$

$$\mathcal{B}(\tau) = \sum_{k} \{\mathcal{B}_k(\tau) b_k e^{-i\omega_k\tau} + \mathcal{B}'_k(\tau) b_k^+ e^{i\omega_k\tau}\}. \quad \text{(IV)}$$

Положим

$$\frac{e^{-\beta\hbar\omega_k}}{1-e^{-\beta\hbar\omega_k}} = N_k .$$

Операторы $\mathfrak{U}_k$, $\mathfrak{U}'_k$, $\mathcal{B}_k$, $\mathcal{B}'_k$ коммутируют между собой и не действуют на Σ.

(С – число по отношению к Σ).

Тогда $\langle b_k^+ b_k\rangle_\Sigma = N_k$, $\langle b_k b_k^+\rangle_\Sigma = 1+N_k$.

Поэтому

$$<\mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{B}(\tau)>_{\Sigma} = \sum_{(k)}\{\mathcal{B}_k(\xi)\mathcal{B}_k'(\tau)(1+N_k)e^{-i\omega_k(\xi-\tau)} + \mathcal{B}_k'(\xi)\mathcal{B}_k(\tau)N_k e^{i\omega_k(\xi-\tau)}\},$$

$$<\mathcal{A}(\tau)\cdot\mathcal{A}(\xi)>_{\Sigma} = \sum_{(k)}\{\mathcal{A}_k(\tau)\mathcal{A}_k'(\xi)(1+N_k)e^{-i\omega_k(\tau-\xi)} + \mathcal{A}_k'(\tau)\mathcal{A}_k(\xi)N_k e^{i\omega_k(\tau-\xi)}\},$$

$$<\mathcal{B}(\xi)\cdot\mathcal{A}(\tau)>_{\Sigma} = \sum_{(k)}\{\mathcal{B}_k(\xi)\cdot\mathcal{A}_k'(\tau)(1+N_k)e^{-i\omega_k(\xi-\tau)} + \mathcal{B}_k'(\xi)\cdot\mathcal{A}_k(\tau)N_k\cdot e^{i\omega_k(\xi-\tau)}\},$$

$$<\mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{B}(t)>_{\Sigma} = \sum_{(k)}\{\mathcal{B}_k(\tau)\mathcal{B}_k'(t)(1+N_k)e^{i\omega_k(t-\tau)} + \mathcal{B}_k'(\tau)\mathcal{B}_k(t)e^{-i\omega_k(t-\tau)}\}, \qquad (\mathrm{IV}^{\mathrm{I}})$$

$$<\mathcal{A}(t)\cdot\mathcal{A}(\tau)>_{\Sigma} = \sum_{(k)}\{\mathcal{A}_k(t)\cdot\mathcal{A}_k'(\tau)(1+N_k)e^{-i\omega_k(t-\tau)} + \mathcal{A}_k'(t)\cdot\mathcal{A}_k(\tau)N_k e^{i\omega_k(t-\tau)}\},$$

$$<\mathcal{B}(\tau)\cdot\mathcal{A}(t)>_{\Sigma} = \sum_{(k)}\{\mathcal{B}_k(\tau)\mathcal{A}_k'(t)e^{i\omega_k(t-\tau)}(1+N_k) + \mathcal{B}_k'(\tau)\mathcal{A}_k(t)N_k e^{-i\omega_k(t-\tau)}\},$$

$$<\mathcal{B}(t)\cdot\mathcal{A}(\tau)>_{\Sigma} = \sum_{(k)}\{\mathcal{B}_k(t)\mathcal{A}_k'(\tau)(1+N_k)e^{-i\omega_k(t-\tau)} + \mathcal{B}_k'(t)\mathcal{A}_k(\tau)N_k\cdot e^{i\omega_k(t-\tau)}\}.$$

в) Р е з ю м е

Если $\mathcal{A}(\tau)$, $\mathcal{B}(\tau)$ представляются суммами IУ, то ввиду I, Π^{I}, Ш

$$\underset{(\Sigma)}{Sp}\, \overset{(a)}{T}\{e^{\int_{t_0}^{t}\mathcal{B}(\xi)d\xi}\}\cdot T\{e^{\int_{t_0}^{t}\mathcal{A}(\xi)d\xi}\}\mathcal{D}(\Sigma) = e^{\phi(t,t_0)},$$

$$\phi(t,t_0) = \int_{t_0}^{t}d\tau\int_{t_0}^{\tau}d\xi\sum_{(k)}\{\mathcal{B}_k(\xi)\mathcal{B}_k'(\tau)e^{-i\omega_k(\xi-\tau)}(1+N_k) + \mathcal{B}_k'(\xi)\mathcal{B}_k(\tau)e^{i\omega_k(\xi-\tau)}N_k +$$

$$+\mathcal{A}_k(\tau)\mathcal{A}_k'(\xi)e^{-i\omega_k(\tau-\xi)}(1+N_k) + \mathcal{A}_k'(\tau)\mathcal{A}_k(\xi)e^{i\omega_k(\tau-\xi)}N_k\} +$$

$$+\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{t_0}^{t}d\xi\sum_{(k)}\{\mathcal{B}_k(\xi)\mathcal{A}_k'(\tau)e^{-i\omega_k(\xi-\tau)}(1+N_k) + \mathcal{B}_k'(\xi)\mathcal{A}_k(\tau)e^{i\omega_k(\xi-\tau)}N_k\}.$$

$$\frac{\partial\phi(t,t_0)}{\partial t} = \int_{t_0}^{t}d\tau\sum_{(k)}\{\mathcal{B}_k(\tau)\mathcal{B}_k'(t)(1+N_k)e^{i\omega_k(t-\tau)} + \mathcal{B}_k'(\tau)\mathcal{B}_k(t)N_k e^{-i\omega_k(t-\tau)} +$$

$$(\mathrm{V})$$

$$+\mathcal{A}_k(t)\mathcal{A}_k'(\tau)(1+N_k)e^{-i\omega_k(t-\tau)} + \mathcal{A}_k'(t)\mathcal{A}_k(\tau)N_k e^{i\omega_k(t-\tau)} + \mathcal{B}_k(\tau)\mathcal{A}_k'(t)(1+N_k)e^{i\omega_k(t-\tau)} +$$

$$+N_k\mathcal{B}_k'(\tau)\mathcal{A}_k(t)e^{-i\omega_k(t-\tau)} + (1+N_k)\mathcal{B}_k(t)\mathcal{A}_k'(\tau)e^{-i\omega_k(t-\tau)} + N_k\mathcal{B}_k'(t)\mathcal{A}_k(\tau)e^{i\omega_k(t-\tau)}\}.$$

Л и т е р а т у р а

1. Bogolubov N.N. JINR, E17-11822, Dubna, 1978.
2. Devreese J.T., Evard R. Linear and Nonlinear Transport in Solids. Plenum Press., 1976, p.91.
3. Thornber K.K., Feynman R.P. Phys.Rev., 1970, B1, p.4099.

Рукопись поступила в издательский отдел
I2 октября I978 года.