СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р17 - 11908

И.Н.Коцев, М.И.Аройо

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША-ГОРДАНА ДЛЯ АНТИУНИТАРНЫХ ГРУПП.

IV. Точечные группы гексагональной и тригональной сингонии

1978

P17 - 11908

И.Н.Коцев, М.И.Аройо

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША-ГОРДАНА ДЛЯ АНТИУНИТАРНЫХ ГРУПП.

IV. Точечные группы гексагональной и тригональной сингонии

Коцев И.Н., Аройо М.И. Р17 - 11908

Коэффициенты Клебша-Гордана для антиунитарных групп. IV. Точечные группы гексагональной и тригональной сингонии

Для однозначных и двузначных копредставлений 35 антиунитарных шубниковских (магнитных) точечных групп гексагональной и тригональной (ромбоэдрической) сингонии найдены коэффициенты Клебша-Гордана (в виде приводящих унитарных матриц). Табулированные в работе коэффициенты согласованы с коэффициентами Вигнера. Приведены также таблицы характеров, базисных функций и таблицы умножения копредставлений. Применялся метод, основаный на известной лемме Рака (обобщенной авторами на случай копредставлений антиунитарных групп), имеющий ряд преимуществ по сравнению с ранее предлагавшимися. Таблицы необходимы при решении ряда задач теории кристаллического поля и спектроскопии твердого тела (правила отбора, теорема Вигнера-Эккарта и др.).

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Kotzev I.N., Aroyo M.I. P17 - 11908

Clebsh-Gordan Coefficients for Antiunitary Groups. IV. Point Groups of Hexagonal and Trigonal (Cryst.) System

For single and two-valued corepresentations of 35 antiunitary Shubnikov's (magnetic) points groups of hexagonal and trigonal (rhombohedrical) (cryst.) system Clebsch-Gordan coefficients have been found (as reducible unitary matrices). Coefficients tabulated are consistent to Wigner coefficients. Tables of characters, of basis functions and multiplication ones for corepresentations are presented. A method based on the known Racah lemma (generalized for the case of corepresentations of antiunitary groups) was applied. It has some advantages as compared to earlier proposed. Tables are necessary at solving some problems of crystal fields theory and solid state spectroscopy (selection rules, Wigner-Eckart theorem etc.).

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. Коэффициенты Клебша-Гордана для копредставлений антиунитарных групп впервые рассматривались в работе [1], где был предложен метод их вычисления. В первой части [2] настоящей серии работ [2-4] дано обобщение известной леммы Рака [5] и показано, что она имеет место для копредставлений. На базе этого предложен более эффективный метод и вычислены коэффициенты Клебша-Гордана для однозначных и двузначных копредставлений всех 90 антиунитарных шубниковских (магнитных) точечных групп [6] (исходными являлись коэффициенты Вигнера). В работе [3] дана общая схема вычислений и приведены полные таблицы коэффициентов и ряда других теоретико-групповых величин для групп кубической сингонии. Группы тетрагональной, орторомбической, моноклинной и триклинной сингонии рассмотрены в [4]. Здесь приводятся таблицы для групп гексагональной и тригональной сингонии.

2. Каждая из таблиц имеет следующую структуру.

а) Таблица характеров и базисных функций копредставлений, построенная по образцу стандартных таблиц для обычных представлений точечных групп [7]. Указаны также символы Δ^{β} неприводимых представлений унитарной подгруппы, "квазимомент" $j(\beta)$ и его "проекции" $\mu(\beta)$, тип копредставления по Вигнеру, характеры и матрицы фиксированного антиунитарного оператора a_0 .

б) Таблица соответствия копредставлений - редукция копредставлений D^{α} группы A на подгруппу B.

в) Таблица умножения копредставлений. Для удобства указаны лишь номера копредставлений, а кратность повторения c_β копредставления β дается в виде степенного показателя: β^{c_β} .

г) Таблица коэффициентов Клебша-Гордана для копредставлений. Приведены унитарные матрицы $U^{\beta_1\beta_2}$, приводящие кронекеровские произведения копредставлений к квазидиагональному виду. Для краткости опущены тривиальные коэффициенты $[1 1, \beta_2 b_2 | \beta_2 1 b_2] = 1$, а также матрицы $U^{\beta_2\beta_1}$. Соответствующие им коэффициенты определяются соотношением

$$[\beta_2 b_2, \beta_1 b_1 | \beta \rho_\beta b] = (-1)^{j(\beta_1)+j(\beta_2)-j(\beta\rho_\beta)} [\beta_1 b_1, \beta_2 b_2 | \beta\rho_\beta b] . \quad (2)$$

В отличие от аналогичного соотношения для коэффициентов Вигнера здесь квазимоменты $j(\beta\rho_\beta)$ повторяющихся копредставлений могут быть различными /3/, что указывается возле соответствующей матрицы $U^{\beta_1\beta_2}$. Для удобства звездочкой над β отмечены те столбцы матриц $U^{\beta_1\beta_2}$, элементы которых в соответствии с (2) меняют знак при перестановке индексов $\beta_1 b_1 \rightleftarrows \beta_2 b_2$.

Примеры применения выведенных коэффициентов приведены в /I,6/.

ГЕКСАГОНАЛЬНАЯ СИНГОНИЯ

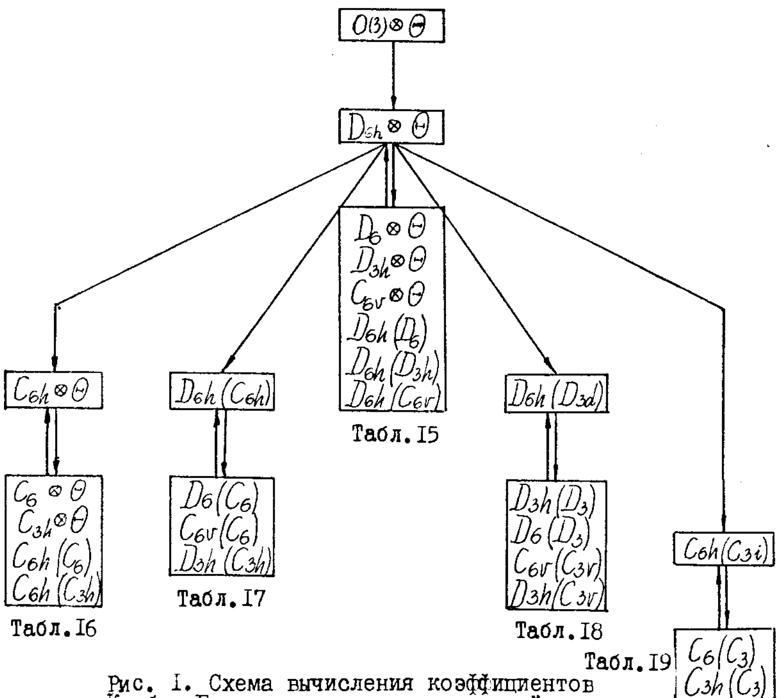

Рис. I. Схема вычисления коэффициентов Клебша-Гордана для копредставлений .

Таблица I5a*

G									$u\in H\subset G$						∂_0	
$D_6\otimes\Theta = 6221'$									E	(C_2)	$2C_3$	$2C_6$	$(3C_2')$	$(3C_2'')$	Θ	$\psi_b^{\beta\tau_\beta}$
$D_{6h}(D_6) = 6/m'm'm'$									E	(C_2)	$2C_3$	$2C_6$	$(3C_2')$	$(3C_2'')$	$I\Theta$	
$D_{3h}\otimes\Theta = \bar{6}m21'$									E	(σ_h)	$2C_3$	$2S_3$	$(3C_2')$	$(3\sigma_d)$	Θ	
$D_{6h}(D_{3h}) = 6'/mmm'$									E	(σ_h)	$2C_3$	$2S_3$	$(3C_2')$	$(3\sigma_d)$	$I\Theta$	
$C_{6v}\otimes\Theta = 6mm1'$									E	(C_2)	$2C_3$	$2C_6$	$(3\sigma_d)$	$(3\sigma_d)$	Θ	
$D_{6h}(C_{6v}) = 6/m'mm$									E	(C_2)	$2C_3$	$2C_6$	$(3\sigma_d)$	$(3\sigma_d)$	$I\Theta$	
D_β	$\Delta\beta$				тип	$j(D_\beta)$	$\mu(D_\beta)$									
D_1	Γ_1	A_1	A_1'	A_1	a	0	0		1	1	1	1	1	1	1	φ_0^0
D_2	Γ_2	A_2	A_2'	A_2	a	1	0		1	1	1	1	-1	-1	-1	φ_0^1
D_3	Γ_3	B_1	A_1''	B_2	a	3	3		1	-1	1	-1	1	-1	1	$i\sqrt{1/2}(\varphi_3^3-\varphi_{-3}^3)$
D_4	Γ_4	B_2	A_2''	B_1	a	3	-3		1	-1	1	-1	-1	1	1	$\sqrt{1/2}(\varphi_3^3+\varphi_{-3}^3)$
D_5	Γ_5	E_1	E''	E_1	a	1	1	-1	2	-2	-1	1	0	0	0	φ_1^1 ; φ_{-1}^1
D_6	Γ_6	E_2	E'	E_2	a	2	2	-2	2	2	-1	-1	0	0	0	φ_2^2 ; φ_{-2}^2
D_7	Γ_7	$\bar{E}_1$	$\bar{E}_1$	$\bar{E}_1$	a	1/2	1/2	-1/2	2	0	1	$\sqrt{3}$	0	0	0	$\varphi_{1/2}^{1/2}$; $\varphi_{-1/2}^{1/2}$
D_8	Γ_8	$\bar{E}_2$	$\bar{E}_2$	$\bar{E}_2$	a	5/2	5/2	-5/2	2	0	1	$-\sqrt{3}$	0	0	0	$\varphi_{5/2}^{5/2}$; $\varphi_{-5/2}^{5/2}$
D_9	Γ_9	$\bar{E}_3$	$\bar{E}_3$	$\bar{E}_3$	a	3/2	3/2	-3/2	2	0	-2	0	0	0	0	$\varphi_{3/2}^{3/2}$; $\varphi_{-3/2}^{3/2}$

$$D_{6h}\otimes\Theta = D_6\otimes\Theta\otimes C_i \quad — \quad 6/mmm = 6221'\otimes\bar{1}$$

$$D_5(\partial_0) = \begin{Vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{Vmatrix}, \quad D_6(\partial_0) = \begin{Vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{Vmatrix}, \quad D_7(\partial_0) = D_8(\partial_0) = D_9(\partial_0) = \begin{Vmatrix} & -1 \\ 1 & \end{Vmatrix}$$

Таблица I5б

$\mathcal{D}^j$	$\mathcal{D}^0$	$\mathcal{D}^{1/2}$	$\mathcal{D}^1$	$\mathcal{D}^{3/2}$	$\mathcal{D}^2$	$\mathcal{D}^{5/2}$	$\mathcal{D}^3$
$\mathcal{D}^j \downarrow D_6\otimes\Theta$	D_1	D_7	D_2+D_5	D_7+D_9	$D_1+D_5+D_6$	$D_7+D_8+D_9$	$D_2+D_3+D_4+D_5+D_6$

*Нумерация таблиц общая для всех работ этого цикла.

Таблица I5в

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	[1]	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	[1]	4	3	5	6	7	8	9
3	3	4	[1]	2	6	5	8	7	9
4	4	3	2	[1]	6	5	8	7	9
5	5	5	6	6	[1+6]+{2}	3+4+5	7+9	8+9	7+8
6	6	6	5	5	3+4+5	[1+6]+{2}	8+9	7+9	7+8
7	7	7	8	8	7+9	8+9	[2+5]+{1}	3+4+6	5+6
8	8	8	7	7	8+9	7+9	3+4+6	[2+5]+{1}	5+6
9	9	9	9	9	7+8	7+8	5+6	5+6	[2+3+4]+{1}

Таблица I5г

[2121|111] = -1
[3131|111] = 1
[4141|111] = 1
[2131|411] = i
[2141|311] = i
[3141|211] = -i

U^{55} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	1 1 1	$\overset{*}{2}$ 1 1	6 1 1	6 1 2
51 51			1	
51 52	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
52 51	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$		
52 52				1

U^{66} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	1 1 1	$\overset{*}{2}$ 1 1	6 1 1	6 1 2
61 61				1
61 62	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
62 61	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$		
62 62			1	

U^{77} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{1}$ 1 1	2 1 1	5 1 1	5 1 2
71 71			1	
71 72	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
72 71	$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
72 72				1

U^{88} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{1}$ 1 1	2 1 1	5 1 1	5 1 2
81 81				1
81 82	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
82 81	$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
82 82			1	

U^{99} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{1}$ 1 1	2 1 1	3 1 1	4 1 1
91 91			$i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$
91 92	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
92 91	$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
92 92			$-i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$

U^{25} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{5}$ 1 1	$\overset{*}{5}$ 1 2
21 51	-1	
21 52		1

U^{26} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{6}$ 1 1	$\overset{*}{6}$ 1 2
21 61	-1	
21 62		1

U^{27} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{7}$ 1 1	$\overset{*}{7}$ 1 2
21 71	-1	
21 72		1

U^{28} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{8}$ 1 1	$\overset{*}{8}$ 1 2
21 81	-1	
21 82		1

U^{29} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{9}$ 1 1	$\overset{*}{9}$ 1 2
21 91	-1	
21 92		1

U^{35} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	6 1 1	6 1 2
31 51		-i
31 52	i	

U^{36} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	5 1 1	5 1 2
31 61		-i
31 62	i	

U^{37} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{8}$ 1 1	$\overset{*}{8}$ 1 2
31 71		-i
	-i	

U^{38} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{7}$ 1 1	$\overset{*}{7}$ 1 2
31 81		-i
31 82	-i	

U^{39} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{9}$ 1 1	$\overset{*}{9}$ 1 2
31 91		i
31 92	i	

U^{45} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	6 1 1	6 1 2
41 51		1
41 52	1	

U^{46} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	5 1 1	5 1 2
		-1
	-1	

U^{47} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{8}$ 1 1	$\overset{*}{8}$ 1 2
41 71		-1
41 72	1	

U^{48} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{7}$ 1 1	$\overset{*}{7}$ 1 2
41 81		-1
41 82	1	

U^{49} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{9}$ 1 1	$\overset{*}{9}$ 1 2
41 91		1
41 92	1	

U^{56} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	3 1 1	4 1 1	5 1 1	5 1 2
51 61	$i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
51 62				1
52 61			1	
52 62	$-i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		

U^{57} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{7}$ 1 1	$\overset{*}{7}$ 1 2	9 1 1	9 1 2
51 71			1	
51 72	1			
52 71		-1		
52 72				1

U^{58} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{8}$ 1 1	$\overset{*}{8}$ 1 2	9 1 1	9 1 2
51 81		-1		
51 82				1
52 81			1	
52 82	1			

U^{59} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	7 1 1	7 1 2	8 1 1	8 1 2
51 91			1	
51 92		1		
52 91	1			
52 92				1

U^{67} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	8 1 1	8 1 2	$\overset{*}{9}$ 1 1	$\overset{*}{9}$ 1 2
61 71	1			
61 72			1	
62 71				-1
62 72		1		

U^{68} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	7 1 1	7 1 2	$\overset{*}{9}$ 1 1	$\overset{*}{9}$ 1 2
61 81				1
61 82		1		
62 81	1			
62 82			-1	

U^{69} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{7}$ 1 1	$\overset{*}{7}$ 1 2	$\overset{*}{8}$ 1 1	$\overset{*}{8}$ 1 2
61 91				-1
61 92	1			
62 91		-1		
62 92			1	

U^{78} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	3 1 1	4 1 1	$\overset{*}{6}$ 1 1	$\overset{*}{6}$ 1 2
71 81	$i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
71 82				1
72 81			-1	
72 82	$-i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		

U^{79} $\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$	$\overset{*}{5}$ 1 1	$\overset{*}{5}$ 1 2	6 1 1	6 1 2
71 91			1	
71 92		1		
72 91	-1			
72 92				1

Таблица I5г (продолжение)

U^{89}	$\overset{*}{5}11$	$\overset{*}{5}12$	611	612
81 91				1
81 92	-1			
82 91		1		
82 92			1	

Таблица I6а

G										$u \in H \subset G$						a_0	
$C_6 \otimes \Theta = 61'$										E	C_6	C_3	C_2	C_3^{-1}	C_6^{-1}	Θ	$\psi_b^{\beta\tau\beta}$
$C_{6h}(C_6) = 6/m'$										E	C_6	C_3	C_2	C_3^{-1}	C_6^{-1}	$I\Theta$	
$C_{3h} \otimes \Theta = \bar{6}1'$										E	S_3^{-1}	C_3	σ_h	C_3^{-1}	S_3	Θ	
$C_{6h}(C_{3h}) = 6'/m$										E	S_3^{-1}	C_3	σ_h	C_3^{-1}	S_3	$I\Theta$	
D_β	Δ^β				$j(D_\beta)$	$M(D_\beta)$											
D_1	Γ_1	A	A'	a	0	0				1	1	1	1	1	1	1	φ_0^0
D_2	Γ_4	B	A''	a	3	3				1	-1	1	-1	1	-1	1	$i\sqrt{1/2}(\varphi_3^3 - \varphi_{-3}^3)$
D_3	Γ_3	${}^1E_1$	${}^1E''$	c	2	2	-2			1	$-\omega^4$	$-\omega^2$	-1	ω^4	ω^2	0	$\varphi_2^2;\ \varphi_{-2}^2$
	Γ_2	${}^2E_1$	${}^2E''$							1	ω^2	ω^4	-1	$-\omega^2$	$-\omega^4$		
D_5	Γ_5	${}^1E_2$	${}^1E'$	c	1	1	-1			1	$-\omega^2$	ω^4	1	$-\omega^2$	ω^4	0	$\varphi_1^1;\ \varphi_{-1}^1$
	Γ_6	${}^2E_2$	${}^2E'$							1	ω^4	$-\omega^2$	1	ω^4	$-\omega^2$		
D_7	Γ_7	${}^1\bar{E}_3$	${}^1\bar{E}_3$	c	1/2	1/2	-1/2			1	ω	ω^2	i	$-\omega^4$	$-\omega^5$	0	$\varphi_{1/2}^{1/2};\ \varphi_{-1/2}^{1/2}$
	Γ_8	${}^2\bar{E}_3$	${}^2\bar{E}_3$							1	$-\omega^5$	$-\omega^4$	$-i$	ω^2	ω		
D_9	Γ_{11}	${}^1\bar{E}_1$	${}^1\bar{E}_1$	c	3/2	3/2	-3/2			1	$-i$	-1	i	-1	i	0	$\varphi_{3/2}^{3/2};\ \varphi_{-3/2}^{3/2}$
	Γ_{12}	${}^2\bar{E}_1$	${}^2\bar{E}_1$							1	i	-1	$-i$	-1	$-i$		
D_{11}	Γ_{10}	${}^1\bar{E}_2$	${}^1\bar{E}_2$	c	5/2	5/2	-5/2			1	ω^5	$-\omega^4$	i	ω^2	$-\omega$	0	$\varphi_{5/2}^{5/2};\ \varphi_{-5/2}^{5/2}$
	Γ_9	${}^2\bar{E}_2$	${}^2\bar{E}_2$							1	$-\omega$	ω^2	$-i$	$-\omega^4$	ω^5		

$$C_{6h} \otimes \Theta = C_6 \otimes \Theta \otimes C_i \text{ — } 6/m1' = 61' \otimes \bar{1} \qquad \omega = (\exp \pi i/6)$$

$$D_3(a_0) = \begin{Vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{Vmatrix}, \quad D_5(a_0) = \begin{Vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{Vmatrix}, \quad D_7(a_0) = D_9(a_0) = D_{11}(a_0) = \begin{Vmatrix} & -1 \\ 1 & \end{Vmatrix}$$

Таблица I6б

$D_\alpha(D_6 \otimes \Theta)$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
$D_\beta(C_6 \otimes \Theta)$	D_1	D_1	D_2	D_2	D_5	D_3	D_7	D_{11}	D_9

Таблица I6в

	1	2	3	5	7	9	11
1	1	2	3	5	7	9	11
2	2	1	5	3	11	9	7
3	3	5	[1]+{1+3}	2^2+5	9+11	7+11	7+9
5	5	3	2^2+3	[1+3]+{1}	7+9	7+11	9+11
7	7	11	9+11	7+9	[1+5]+{1}	3+5	2^2+3
9	9	9	7+11	7+11	3+5	[1+2]+{1+2}	3+5
11	11	7	7+9	9+11	2^2+3	3+5	[1+5]+{1}

$[2121|111] = 1$

Таблица I6г

U^{33}	111	$\overset{*}{1}21$	311	312
31 31				1
31 32	$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
32 31	$\sqrt{1/2}$	$-i\sqrt{1/2}$		
32 32			1	

U^{55}	111	$\overset{*}{1}21$	311	312
51 51			1	
51 52	$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
52 51	$\sqrt{1/2}$	$-i\sqrt{1/2}$		
52 52				1

U^{77}	$\overset{*}{1}11$	121	511	512
71 71			1	
71 72	$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
72 71	$-\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
72 72				1

U^{99}	$\overset{*}{1}11$	121	211	221
91 91			$i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$
91 92	$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
92 91	$-\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
92 92			$-i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$

$U^{11,11}$	$\overset{*}{1}11$	121	511	512
11,1 11,1				1
11,1 11,2	$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
11,2 11,1	$-\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
11,2 11,2			1	

U^{35}	211	221	511	512
31 51	$i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
31 52			1	
32 51				1
32 52	$-i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		

Таблица I6г (продолжение)

U^{23} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$5\ 1\ 1$	$5\ 1\ 2$
21 31		-1
21 32	-1	

U^{25} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$3\ 1\ 1$	$3\ 1\ 2$
21 51		1
21 52	1	

U^{27} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$\overset{*}{11}\ 1\ 1$	$\overset{*}{11}\ 1\ 2$
21 71		-1
21 72	1	

U^{29} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$9\ 1\ 1$	$9\ 1\ 2$
21 91		1
21 92	1	

U^{211} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$\overset{*}{7}\ 1\ 1$	$\overset{*}{7}\ 1\ 2$
21 111		-1
21 112	1	

U^{37} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$\overset{*}{9}\ 1\ 1$	$\overset{*}{9}\ 1\ 2$	$11\ 1\ 1$	$11\ 1\ 2$
31 71			1	
31 72	1			
32 71		-1		
32 72				1

U^{39} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$\overset{*}{7}\ 1\ 1$	$\overset{*}{7}\ 1\ 2$	$\overset{*}{11}\ 1\ 1$	$\overset{*}{11}\ 1\ 2$
31 91				-1
31 92	1			
32 91		-1		
32 92			1	

U^{311} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$7\ 1\ 1$	$7\ 1\ 2$	$\overset{*}{9}\ 1\ 1$	$\overset{*}{9}\ 1\ 2$
31 111				1
31 112		1		
32 111	1			
32 112			-1	

U^{57} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$\overset{*}{7}\ 1\ 1$	$\overset{*}{7}\ 1\ 2$	$9\ 1\ 1$	$9\ 1\ 2$
51 71			1	
51 72	1			
52 71		-1		
52 72				1

U^{59} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$7\ 1\ 1$	$7\ 1\ 2$	$11\ 1\ 1$	$11\ 1\ 2$
51 91			1	
51 92		1		
52 91	1			
52 92				1

U^{511} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$9\ 1\ 1$	$9\ 1\ 2$	$\overset{*}{11}\ 1\ 1$	$\overset{*}{11}\ 1\ 2$
51 111				-1
51 112		1		
52 111	1			
52 112			1	

U^{79} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$3\ 1\ 1$	$3\ 1\ 2$	$\overset{*}{5}\ 1\ 1$	$\overset{*}{5}\ 1\ 2$
71 91	1			
71 92				1
72 91			-1	
72 92		1		

U^{711} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$2\ 1\ 1$	$2\ 2\ 1$	$\overset{*}{3}\ 1\ 1$	$\overset{*}{3}\ 1\ 2$
71 111	$\boxed{i\sqrt{1/2}}$	$\boxed{\sqrt{1/2}}$		
71 112				1
72 111			-1	
72 112	$\boxed{-i\sqrt{1/2}}$	$\boxed{\sqrt{1/2}}$		

U^{911} / $\beta_1 b_1, \beta_2 b_2$	$3\ 1\ 1$	$3\ 1\ 2$	$\overset{*}{5}\ 1\ 1$	$\overset{*}{5}\ 1\ 2$
91 111		1		
91 112				-1
92 111			1	
92 112	1			

Таблица I7а

G						$u \in H \subset G$						a_0	
$D_6(C_6) = 62'2'$; $C_{6v}(C_6) = 6m'm'$						E / E / E	C_6 / C_6 / S_3	C_3 / C_3 / C_3	C_2 / C_2 / σ_h	C_3^{-1} / C_3^{-1} / C_3^{-1}	C_6^{-1} / C_6^{-1} / S_3^{-1}	$C_2'\theta$ / $\sigma_d\theta$ / $C_2\theta$	$\psi_b^{\beta\tau_\beta}$
D_β	Δ^β			$j(D_\beta)$	$M(D_\beta)$								
D_1	Γ_1 A	A'	a	0	0	1	1	1	1	1	1	1	φ_0^0
D_2	Γ_4 B	A''	a	3	3	1	-1	1	-1	1	-1	1	$\sqrt{1/2}(\varphi_3^3-\varphi_{-3}^3)$
D_3	Γ_3 ${}^1E_1$	${}^1E''$	a	2	2	1	$-\omega^4$	$-\omega^2$	-1	ω^4	ω^2	1	φ_2^2
D_4	Γ_2 ${}^2E_1$	${}^2E''$	a	2	-2	1	ω^2	ω^4	-1	$-\omega^2$	$-\omega^4$	1	φ_{-2}^2
D_5	Γ_5 ${}^1E_2$	${}^1E'$	a	1	1	1	$-\omega^2$	ω^4	1	$-\omega^2$	ω^4	1	φ_1^1
D_6	Γ_6 ${}^2E_2$	${}^2E'$	a	1	-1	1	ω^4	$-\omega^2$	1	ω^4	$-\omega^2$	1	φ_{-1}^1
D_7	Γ_7 ${}^1\bar{E}_3$	${}^1\bar{E}_3$	a	1/2	1/2	1	ω	ω^2	i	$-\omega^4$	$-\omega^5$	1	$\varphi_{1/2}^{1/2}$
D_8	Γ_8 ${}^2\bar{E}_3$	${}^2\bar{E}_3$	a	1/2	-1/2	1	$-\omega^5$	$-\omega^4$	$-i$	ω^2	ω	1	$\varphi_{-1/2}^{1/2}$
D_9	Γ_{11} ${}^1\bar{E}_1$	${}^1\bar{E}_1$	a	3/2	3/2	1	$-i$	-1	i	-1	i	1	$\varphi_{3/2}^{3/2}$
D_{10}	Γ_{12} ${}^2\bar{E}_1$	${}^2\bar{E}_1$	a	3/2	-3/2	1	i	-1	$-i$	-1	$-i$	1	$\varphi_{-3/2}^{3/2}$
D_{11}	Γ_{10} ${}^1\bar{E}_2$	${}^1\bar{E}_2$	a	5/2	5/2	1	ω^5	$-\omega^4$	i	ω^2	$-\omega$	1	$\varphi_{5/2}^{5/2}$
D_{12}	Γ_9 ${}^2\bar{E}_2$	${}^2\bar{E}_2$	a	5/2	-5/2	1	$-\omega$	ω^2	$-i$	$-\omega^4$	ω^5	1	$\varphi_{-5/2}^{5/2}$

$$D_{6h}(C_{6h}) = D_6(C_6)\otimes C_i \text{ — } 6/mm'm' = 62'2'\otimes\bar{1}$$

Таблица I7б

$D^d(D_6\otimes\Theta)$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
$D_\beta(D_6(C_6))$	D_1	D_1	D_2	D_3	D_5+D_6	D_3+D_4	D_7+D_8	$D_{11}+D_{12}$	D_9+D_{10}

Таблица I7в

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	1	6	5	4	3	12	11	10	9	8	7
3	3	6	4	1	2	5	11	9	12	7	10	8
4	4	5	1	3	6	2	10	12	8	11	7	9
5	5	4	2	6	3	1	9	7	11	8	12	10
6	6	3	5	2	1	4	8	10	7	12	9	11
7	7	12	11	10	9	8	5	1	3	6	2	4
8	8	11	9	12	7	10	1	6	5	4	3	2
9	9	10	12	8	11	7	3	5	2	1	4	6
10	10	9	7	11	8	12	6	4	1	2	5	3
11	11	8	10	7	12	9	2	3	4	5	6	1
12	12	7	8	9	10	11	4	2	6	3	1	5

Таблица I7г

[31 31 | 411] = 1	[21 71 | 1211] = 1	[41 71 | 1011] = -1	[61 81 | 1011] = 1
[41 41 | 311] = 1	[21 91 | 1011] = 1	[41 91 | 811] = -1	[61 101 | 1211] = 1
[51 51 | 311] = 1	[21 111 | 811] = 1	[41 111 | 711] = 1	[61 121 | 1111] = 1
[61 61 | 411] = 1	[21 31 | 611] = -1	[41 61 | 211] = 1	[71 91 | 311] = 1
[71 71 | 511] = 1	[21 61 | 311] = 1	[41 81 | 1211] = 1	[71 111 | 211] = 1
[111 111 | 611] = 1	[21 81 | 1111] = 1	[41 101 | 1111] = 1	[91 111 | 411] = 1
[121 121 | 511] = 1	[21 101 | 911] = 1	[41 121 | 911] = -1	[71 101 | 611] = 1
[91 91 | 211] = 1	[21 121 | 711] = 1	[51 71 | 911] = 1	[81 111 | 311] = -1
[31 41 | 111] = 1	[31 51 | 211] = 1	[51 91 | 1111] = 1	[91 121 | 611] = -1
[51 61 | 111] = 1	[31 71 | 111] = 1	[51 111 | 1211] = -1	[81 91 | 511] = -1
[81 81 | 611] = 1	[31 91 | 1211] = -1	[51 81 | 711] = 1	[71 1211 | 411] = 1
[71 81 | 111] = 1	[31 111 | 1011] = 1	[51 101 | 811] = 1	[101 111 | 511] = 1
[111 121 | 111] = 1	[31 61 | 511] = 1	[61 111 | 911] = 1	[81 101 | 411] = 1
[101 101 | 211] = 1	[31 81 | 911] = 1	[61 71 | 811] = -1	[81 121 | 211] = 1
[91 101 | 111] = 1	[31 101 | 711] = 1	[61 91 | 711] = 1	[101 121 | 311] = 1
[21 41 | 511] = -1	[31 121 | 811] = 1	[51 121 | 1011] = 1	[91 121 | 611] = -1
[21 51 | 411] = 1	[41 51 | 611] = 1		

Таблица I8a

G					$u\in H\subset G$			a_0	
$D_6(D_3)=6'22'$					E	$2C_3$	$3C_2'$	$C_2\Theta$	$\psi_b^{\beta\tau_\beta}$
$D_{3h}(D_3)=\bar{6}'m'2$					E	$2C_3$	$3C_2'$	$\sigma_h\Theta$	
$C_{6v}(C_{3v})=6'mm'$					E	$2C_3$	$3\sigma_v$	$C_2\Theta$	
$D_{3h}(C_{3v})=\bar{6}'m2'$					E	$2C_3$	$3\sigma_v$	$\sigma_h\Theta$	
D_β	Δ^β		$j(D_\beta)$	$\mu(D_\beta)$					
D_1	$\Gamma_1=A_1$	a	0	0	1	1	1	1	φ_0^0
D_2	$\Gamma_2=A_2$	a	1	0	1	1	-1	1	φ_0^1
D_3	$\Gamma_3=E$	a	1	1 -1	2	-1	0	0	$\varphi_1^1\ ;\ \varphi_{-1}^1$
D_4	$\Gamma_4=\bar{E}_1$	a	1/2	1/2 -1/2	2	1	0	0	$\varphi_{1/2}^{1/2}\ ;\ \varphi_{-1/2}^{1/2}$
D_5	$\Gamma_5={}^1\bar{E}$	a	3/2	3/2	1	-1	i	1	$\sqrt{1/2}\,(i\varphi_{3/2}^{3/2}+\varphi_{-3/2}^{3/2})$
D_6	$\Gamma_6={}^2\bar{E}$	a	3/2	-3/2	1	-1	$-i$	1	$\sqrt{1/2}\,(-\varphi_{3/2}^{3/2}+i\varphi_{-3/2}^{3/2})$

$$D_{6h}(D_{3d})=D_6(D_3)\otimes C_i-6'/m'mm'=6'22'\otimes\bar{1}$$

$$D_3(a_0)=\begin{Vmatrix} & -1\\ -1 & \end{Vmatrix}$$

$$D_4(a_0)=\begin{Vmatrix} & i\\ i & \end{Vmatrix}$$

Таблица I8б

$D_\alpha(D_6\otimes\Theta)$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
$D_\beta[D_6(D_3)]$	D_1	D_2	D_1	D_2	D_3	D_3	D_4	D_4	$D_5^+D_6$

Таблица I8в

	1	2	3	4	5	6
1	[1]	2	3	4	5	6
2	2	[1]	3	4	6	5
3	3	3	[1]+{2+3}	4+5+6	4	4
4	4	4	4+5+6	[2+3]+{1}	3	3
5	5	6	4	3	[2]	1
6	6	5	4	3	1	[2]

Таблица I8г

[21 21 | 111] = -1   [21 51 | 611] = i

[51 51 | 11] = i [21 61 | 511] = i

[61 61 | 1211] = i [51 61 | 111] = 1

U^{33}

β	1	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{3}$
ρ_β	1	1	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	1	1	2
31 31				1
31 32	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
32 31	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$		
32 32			-1	

U^{44}

β	$\overset{*}{1}$	2	3	3
ρ_β	1	1	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	1	1	2
41 41			1	
41 42	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
42 41	$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
42 42				1

U^{34}

β	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{4}$	5	5
ρ_β	1	1	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2	1	2
31 41			$-i\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$
31 42	1			
32 41		-1		
32 42			$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$

U^{23}

β	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{3}$
ρ_β	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2
21 31	-1	
21 32		1

U^{24}

β	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{4}$
ρ_β	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2
21 41	-1	
21 42		1

U^{35}

β	4	4
ρ_β	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2
31 51		1
32 51	i	

U^{36}

β	4	4
ρ_β	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2
31 61		i
32 61	1	

U^{45}

β	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{3}$
ρ_β	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2
41 51		-1
42 51	1	

U^{46}

β	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{3}$
ρ_β	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2
41 61		1
42 61	1	

Таблица I9a

G					$u\in H\subset G$			a_0	
$C_6(C_3)=3'$					E	C_3	C_3^{-1}	$C_2\Theta$	$\psi_b^{\beta\tau_\beta}$
$C_{3h}(C_3)=\bar{6}'$					E	C_3	C_3^{-1}	$\sigma_h\Theta$	
D_β	Δ^β		$j(D_\beta)$	$\mu(D_\beta)$					
D_1	$\Gamma_1=A$	a	0	0	1	1	1	1	φ_0^0
D_2	$\Gamma_2={}^1E$	c	1	1 -1	1	ω^2	$-\omega$	0	$\varphi_1^1\ ;\ \varphi_{-1}^1$
	$\Gamma_3={}^2E$				1	$-\omega$	ω^2		
D_4	$\Gamma_4={}^1\bar{E}$	c	1/2	1/2 -1/2	1	ω	ω^2	0	$\varphi_{1/2}^{1/2}\ ;\ \varphi_{-1/2}^{1/2}$
	$\Gamma_5={}^2\bar{E}$				1	$-\omega^2$	$-\omega$		
D_6	$\Gamma_6=\bar{A}$	a	3/2	3/2	1	-1	-1	i	$\sqrt{1/2}\,(\varphi_{3/2}^{3/2}+\varphi_{-3/2}^{3/2})$

$$D_2(a_0)=\begin{Vmatrix} & -1\\ -1 & \end{Vmatrix}$$

$$D_4(a_0)=\begin{Vmatrix} & -i\\ -i & \end{Vmatrix}$$

$$\omega=\exp(\pi i/3)$$

$$C_{6h}(C_{3i}) = C_6(C_3)\otimes C_i - 6'/m' = 3'\otimes\bar{1}$$

Таблица I9б

$D_\alpha(D_6\times\Theta)$	D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6	D_7 D_8 D_9
$D_\beta(C_6(C_3))$	D_1 D_1 D_1 D_1 D_2 D_2	D_4 D_4 $2D_6$

Таблица I9в

	1	2	4	6
1	[1]	2	3	4
2	2	[1]+{1+2}	$4+6^2$	4
4	3	$4+6^2$	[1+2]+{1}	2
6	4	4	2	{1}

Таблица I9г

[61 61 | 111] = 1

U^{22} β	1	1^*	2^*	2^*
ρ_β	1	2	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	1	1	2
21 21				1
21 22	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
22 21	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$		
22 22			-1	

U^{44} β	1^*	1	2	2
ρ_β	1	2	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	1	1	2
41 41			1	
41 42	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
42 41	$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
42 42				1

U^{24} β	4^*	4^*	6	6
ρ_β	1	1	1	2
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2	1	1
21 41			$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$
21 42	1			
22 41		-1		
22 42			$\sqrt{1/2}$	$-i\sqrt{1/2}$

U^{26} β	4	4
ρ_β	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2
21 61		1
22 61	1	

U^{46} β	2^*	2^*
ρ_β	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	2
41 61		1
42 61	-1	

ТРИГОНАЛЬНАЯ (РОМБОЭДРИЧЕСКАЯ) СИНГОНИЯ

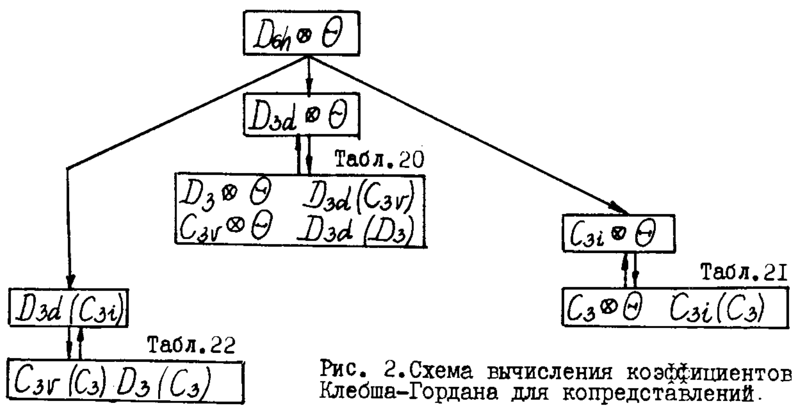

Рис. 2. Схема вычисления коэффициентов Клебша–Гордана для копредставлений.

Таблица 20а

G	$u\in H\subset G$	a_0	
$D_3\otimes\Theta = 321'$	E $2C_3$ $3C_2'$	Θ	$\psi^{\beta\tau_\beta}_{b}$
$D_{3d}(D_3) = \bar{3}'m'$	E $2C_3$ $3C_2'$	$I\Theta$	
$C_{3v}\otimes\Theta = 3m1'$	E $2C_3$ $3\sigma_v$	Θ	
$D_{3d}(C_{3i}) = \bar{3}'m$	E $2C_3$ $3\sigma_v$	$I\Theta$	

D_β	Δ^β		$J(D_\beta)$	$M(D_\beta)$					
D_1	$\Gamma_1=A_1$	a	0	0	1	1	1	1	φ^0_0
D_2	$\Gamma_2=A_2$	a	1	0	1	1	-1	-1	φ^1_0
D_3	$\Gamma_3=E$	a	1	1 -1	2	-1	0	0	φ^1_1 ; φ^1_{-1}
D_4	$\Gamma_4=\bar{E}_1$	a	1/2	1/2 $-1/2$	2	1	0	0	$\varphi^{1/2}_{1/2}$; $\varphi^{1/2}_{-1/2}$
D_5	$\Gamma_5={}^1\bar{E}$, $\Gamma_6={}^2\bar{E}$	c	3/2	3/2 $-3/2$	1 ; 1	-1 ; -1	i ; $-i$	0	$\varphi^{3/2}_{3/2}$; $\varphi^{3/2}_{-3/2}$

$$D_3(a_0) = \begin{Vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{Vmatrix} \qquad D_4(a_0) = \begin{Vmatrix} & -1 \\ 1 & \end{Vmatrix} \qquad D_5(a_0) = \begin{Vmatrix} & -1 \\ 1 & \end{Vmatrix}$$

$$D_{3d}\otimes\Theta = D_3\otimes\Theta\otimes C_i - \bar{3}m1' = 4321'\otimes\bar{1}$$

Таблица 20б

$D_\alpha(D_6\otimes\Theta)$	D_1 D_2 D_3 D_4 D_5 D_6	D_7 D_8 D_9
$D_\beta(D_3\otimes\Theta)$	D_1 D_2 D_2 D_1 D_3 D_3	D_4 D_4 D_5

Таблица 20в

	1	2	3	4	5
1	[1]	2	3	4	5
2	2	[1]	3	4	5
3	3	3	[1]+{2+3}	4+5	4^2
4	4	4	4+5	[2+3]+{1}	3^2
5	5	5	4^2	3^2	$[1+2^2]+\{1\}$

Таблица 20г

[21 21 | 111] = 1

U^{33} β	1	2^*	3	3
ρ_β	1	1	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	1	1	2
31 31				1
31 32	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
32 31	$\sqrt{1/2}$	$-\sqrt{1/2}$		
32 32			1	

U^{44} β	1^*	2	3	3
ρ_β	1	1	1	1
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	1	1	2
41 41			1	
41 42	$\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
42 41	$-\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$		
42 41				1

U^{55} β	1^*	1	2	2
ρ_β	1	2	1	2
$\beta_1 b_1\ \beta_2 b_2$ \ b	1	1	1	1
51 51		$-\sqrt{1/2}$		$\sqrt{1/2}$
51 52	$\sqrt{1/2}$		$\sqrt{1/2}$	
52 51	$-\sqrt{1/2}$		$\sqrt{1/2}$	
52 51		$\sqrt{1/2}$		$\sqrt{1/2}$

Таблица 20г (продолжение)

U^{34}: β	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{4}$	5	5
p_β	1	1	1	1
b	1	2	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$				
31 41			1	
31 42	1			
32 41		-1		
32 42				1

U^{35}: β	4	4	4	4
p_β	1	1	2	2
b	1	2	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$				
31 51				-1
31 52		1		
32 51	1			
32 52			1	

U^{45}: β	$\overset{*}{3}$	$\overset{*}{3}$	3	3
p_β	1	1	2	2
b	1	2	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$				
41 51				1
41 52		1		
42 51	-1			
42 52			1	

$j(3,1)=1$ $\quad j(3,2)=2$

U^{24}: β	4	4
p_β	1	1
b	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$		
21 41	-1	
21 42		1

U^{23}: β	3	3
p_β	1	1
b	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$		
21 31	-1	
21 32		1

U^{25}: β	5	5
p_β	1	1
b	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$		
21 51	-1	
21 52		1

Таблица 21а

G					$u\in H\subset G$			a_0	$\psi_b^{\beta\tau_\beta}$
$C_3\otimes\Theta=31'$; $C_{3i}(C_3)=\bar{3}'$					E / E	C_3 / C_3	C_3^{-1} / C_3^{-1}	Θ / 1Θ	
D_β	Δ^β		$j(D_\beta)$	$\mu(D_\beta)$					
D_1	$\Gamma_1=A_1$	a	0	0	1	1	1	1	φ_0^0
D_2	$\Gamma_2={}^1E$	c	1	1 $\quad$ -1	1	ω^2	$-\omega$	0	$\varphi_1^1;\ \varphi_{-1}^1$
	$\Gamma_3={}^3E$				1	$-\omega$	ω^2		
D_4	$\Gamma_4={}^1\bar{E}$	c	1/2	1/2 $\quad$ -1/2	1	ω	ω^2	0	$\varphi_{1/2}^{1/2};\ \varphi_{-1/2}^{1/2}$
	$\Gamma_5={}^2\bar{E}$				1	$-\omega^2$	$-\omega$		
D_6	$\Gamma_6=\bar{A}$	b	3/2	3/2 $\quad$ -3/2	1	-1	-1	0	$\varphi_{3/2}^{3/2};\ \varphi_{-3/2}^{3/2}$
	$\Gamma_6=\bar{A}$				1	-1	-1		

$$C_{3i}\otimes\Theta=C_3\otimes\Theta\otimes C_i - \bar{3}1'=31'\otimes\bar{1}$$

$$D_2(a_0)=\begin{Vmatrix} & 1 \\ 1 & \end{Vmatrix}$$

$$D_4(a_0)=\begin{Vmatrix} & -1 \\ 1 & \end{Vmatrix}$$

$$D_6(a_0)=\begin{Vmatrix} & -1 \\ 1 & \end{Vmatrix}$$

Таблица 21б

$D_\alpha(D_6\otimes\Theta)$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
$D_\beta(C_3\otimes\Theta)$	D_1	D_1	D_1	D_1	D_2	D_2	D_4	D_4	D_6

Таблица 21в

	1	2	4	6
1	1	2	3	4
2	2	[1]+{2+1}	4+6	4^2
4	3	4+6	[1+2]+{1}	2^2
6	4	4^2	2^2	[1^3]+{1}

Таблица 21г

U^{22}: β	1	$\overset{*}{1}$	2	2
p_β	1	2	1	1
b	1	1	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$				
21 21				1
21 22	$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
22 21	$\sqrt{1/2}$	$-i\sqrt{1/2}$		
22 22			1	

U^{44}: β	1	$\overset{*}{1}$	2	2
p_β	1	2	1	1
b	1	1	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$				
41 41			1	
41 42	$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
42 41	$\sqrt{1/2}$	$-i\sqrt{1/2}$		
42 42				1

U^{66}: β	1^*	1	1	1
p_β	1	2	3	4
b	1	1	1	1
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$				
61 61			$-i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$
61 62	$\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
62 61	$-\sqrt{1/2}$	$i\sqrt{1/2}$		
62 62			$i\sqrt{1/2}$	$\sqrt{1/2}$

U^{24}: β	$\overset{*}{4}$	$\overset{*}{4}$	6	6
p_β	1	1	1	1
b	1	2	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$				
21 41			1	
21 42	1			
22 41		-1		
22 42				1

U^{26}: β	4	4	4	4
p_β	1	1	2	2
b	1	2	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$				
21 61				-1
21 62		1		
22 61	1			
22 62			1	

U^{46}: β	$\overset{*}{2}$	$\overset{*}{2}$	2	2
p_β	1	1	2	2
b	1	2	1	2
$\beta_1 b_1 \beta_2 b_2$				
41 61				1
41 62		1		
42 61	-1			
42 62			1	

Таблица 22а

G					$u\in H\subset G$			a_0	$\psi_b^{\beta\tau_\beta}$
$C_{3v}(C_3)=3m'$; $D_3(C_3)=32'$					E / E	C_3 / C_3	C_3^{-1} / C_3^{-1}	$\sigma_{d1}\Theta$ / $C'_{21}\Theta$	
D_β	$\Delta\beta$		$j(D_\beta)$	$\mu(D_\beta)$					
D_1	$\Gamma_1=A_1$	a	0	0	1	1	1	1	φ_0^0
D_2	$\Gamma_2={}^1E$	a	1	1	1	ω^2	$-\omega$	1	φ_1^1
D_3	$\Gamma_3={}^2E$	a	1	-1	1	$-\omega$	ω^2	1	φ_{-1}^1
D_4	$\Gamma_4={}^1\bar{E}$	a	1/2	1/2	1	ω	ω^2	1	$\varphi_{1/2}^{1/2}$
D_5	$\Gamma_5={}^2\bar{E}$	a	1/2	-1/2	1	$-\omega^2$	$-\omega$	1	$\varphi_{-1/2}^{1/2}$
D_6	$\Gamma_6=\bar{A}$	a	3/2	3/2	1	-1	-1	1	$\varphi_{3/2}^{3/2}$

$$O_{3d}(C_{3i})=D_3(C_3)\otimes C_i - \bar{3}m'=32'\otimes\bar{1}$$

Таблица 22б

$D_\alpha[D_6\otimes\Theta]$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9
$D_\beta[D_3(C_3)]$	D_1	D_1	D_1	D_1	D_2+D_3	D_2+D_3	D_4+D_5	D_4+D_5	$2D_6$

Таблица 22в

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	2	5	6	4
4	4	6	5	2	1	3
5	5	4	6	1	3	2
6	6	5	4	3	2	1

Таблица 22г

$[21\ 21\|311]=1$	$[21\ 31\|111]=1$	$[31\ 51\|611]=1$
$[31\ 31\|211]=1$	$[21\ 41\|611]=1$	$[31\ 61\|411]=1$
$[41\ 41\|211]=1$	$[21\ 51\|411]=1$	$[41\ 51\|111]=1$
$[51\ 51\|\ 11]=1$	$[21\ 61\|511]=-1$	$[41\ 61\|311]=1$
$[61\ 61\|111]=1$	$[31\ 41\|511]=-1$	$[51\ 61\|211]=-1$

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Н.Коцев. К теории копредставлений магнитных групп. ИРЭ АН УССР, Харьков, 1972 (см.также И.Н.Коцев, Кристаллография, 19 , 459 (1974)).
2. И.Н.Коцев, М.И.Аройо. Сообщения ОИЯИ, Р17-10987, Дубна, 1977.
3. И.Н.Коцев, М.И.Аройо. Сообщения ОИЯИ, Р17-11906, Дубна, 1978.
4. И.Н.Коцев, М.И.Аройо. Сообщения ОИЯИ, Р17-11907, Дубна, 1978 .
5. G.Racah. Phys.Rev., 76, 1352 /1949/ .
6. J.N.Kotzev, M.I.Aroyo. Clebsh-Gordan Coefficients for Magnetic Groups and Generalized Racah's Lemma. XI International Congress of Crystallography, August 1978, Warsaw, Abstract 01.I.15.
7. G.F.Koster, J.O.Dimmock, R.G.Wheeler, H.Statz. Properties of the Thirty-two Point Groups. MIT-Press, Cambridge, Mass., 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 сентября 1978 года.