ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Р17 - 11489



В.Г.Маханьков, В.К.Федянин

# НОВЫЙ ВИД КОЛЛЕКТИВНЫХ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С РЕЗОНАНСНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1978

Р17 - 11489

В.Г.Маханьков, В.К.Федянин

# НОВЫЙ ВИД КОЛЛЕКТИВНЫХ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ В ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С РЕЗОНАНСНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*Направлено в ТМФ*

Маханьков В.Г., Федянин В.К. Р17 - 11489

Новый вид коллективных частицеподобных возбуждений в одномерных системах с резонансным взаимодействием

Получены и исследованы солитоноподобные решения "возмущенного" уравнения Шредингера с кубической нелинейностью, описывающего широкий круг явлений в теории конденсированного состояния. Показано, что существует целый класс решений, который не может быть получен с помощью стандартной процедуры разложения по малому параметру, в том числе в рамках метода обратной задачи рассеяния. Приведен явный вид двух таких решений, из которого сразу следует вышеприведенное утверждение.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Makhankov V.G., Fedyanin V.K. P17 - 11489

A New Kind of Collective Particle-Like Excitations in One-Dimensional Systems with Resonanse Interaction

The soliton-like solutions to a perturbative Schrődinger equation with cublic nonlinearity, which describes a broad class of condensed matter theory phenomena, are obtained and investigated. The whole family of solutions is shown not to be obtained via the conventional expansion technique, particularly in the framework of the inverse scattering method. The explicit solution of such a family is given from which it just follows aforesaid.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communicotion of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubno 1978



I. Последние годы характеризуются все возрастающим интересом к частным решениям нелинейных дифференциальных уравнений: солитонам. Обусловлено это, конечно, не только тем, что нахождение, исследование и использование решений линейных уравнений, составившее обширную область математической физики, можно считать завершенным, и ученых потянуло на "экзотику нелинейщины". Нелинейные уравнения для различных процессов возникли, естественно, довольно давно; их свойства изучались, а решения использовались. Но систематическое повсеместное исследование их, резкое возрастание числа публикаций, посвященных солитонам в таких далеких, казалось бы, областях физики, как радиотехника, нелинейная оптика, физика плазмы, физика конденсированного состояния и теория элементарных частиц характерно именно для последнего десятилетия. Процесс этот в какой-то степени закономерен. Практически все явления в системе многих взаимодействующих частиц, моделируемые дифференциальными уравнениями, приводят к нелинейным уравнениям. Это, конечно, было осознано давно, и уместно отметить, что еще в тридцатые годы у нас в стране были предложены и развиты мощные общие методы исследования нелинейных уравнений, используемые повсеместно и теперь в различных теоретических и практических задачах науки и техники. В наиболее законченном виде они были оформлены в исследованиях Н.Н.Боголюбова /1/, создавшего новую область математической физики - "нелинейную механику". Нам представляется, и мы постараемся показать это ниже, что эти методы лягут в основу исследования тех нелинейных уравнений, о которых речь пойдет ниже.

Дело в том, что первоначально интерес к солитонным решениям нелинейных дифференциальных уравнений был обусловлен впечатляющими успехами в исследовании так называемых вполне интегрируемых систем: уравнений, имеющих счётное число полиномиальных законов сохранения. В первую очередь к таким относятся уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, уравнение Кортевега-де-Вриза, Синус-Гордона уравнение и некоторые другие (см. /2,3/), содержащие достаточно полный обзор как формальных способов нахождения частных решений уравнений такого типа, так и моделей физических процессов, приводящих к ним. Однако сравнительно недавно было осознано, что физически содержательные модели в теории как элементарных частиц, так и конденсированного состояния приводят к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных, могущим иметь солитоноподобные решения, но не являющимся вполне интегрируемым. Впервые это было продемонстрировано в численном эксперименте для уравнений поля Хиггса, Клейна-Гордона, модифицированного уравнения Буссинеска и "улучшенного" уравнения Кортевега-де-Вриза (см. /4/ и цитированную там литературу). В данной работе будет изложено аналитическое исследование вопросов существования солитоноподобных решений и найдены некоторые частные решения уравнения, полученного в /5/ *). В приведенных переменных

$$\varphi(x,t) \to \left(\frac{\tilde{\Delta}+2\tilde{\mu}}{2\tilde{h}}\right)^{1/2}\phi(x,t)\,,\quad t \to \frac{t}{(\tilde{\Delta}+2\tilde{\mu})^{1/2}}\,,\quad x \to \left(\frac{|\tilde{\mu}|}{\tilde{\Delta}+2\tilde{\mu}}\right)^{1/2} x$$

где, если говорить для определенности об одномерных молекулярных кристаллах, $\tilde{\Delta}$, $\tilde{\mu}$ -ширина щели и обменный интеграл, перенормированные эффектами экситон-фононного взаимодействия /5/, получаем уравнение

$$F(\phi,\alpha) \equiv i\phi_t - \phi + \alpha\phi^*_x + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = 0\,, \qquad \text{(I)}$$

являющееся "возмущенным вариантом" уравнения Шредингера с кубической нелинейностью. Возмущение обусловлено наличием члена $\alpha\phi^*_x$, где

$$\alpha = 2\left|\frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}}\right|\left(\frac{|\tilde{\mu}|}{\tilde{\Delta}+2\tilde{\mu}}\right)^{1/2},$$

*) Краткое обсуждение части затронутых нами здесь вопросов содержится в /6/.



$\tilde{\mu}'$ - "обменный" интеграл, связанный с резонансным взаимодействием. При физически разумном выборе параметров задачи $\tilde{\mu}' \sim \tilde{\mu}$, и, поскольку $(|\tilde{\mu}|, |\tilde{\mu}'|, |\tilde{h}|) \ll \tilde{\Delta}$, $\alpha \ll 1$, однако мы воспользуемся этим обстоятельством лишь при получении одного из приближенных решений, переходящих в известное решение уравнения $F(\phi,0) = 0$ и, следуя нашей работе /6/, обсудим некоторые общие свойства уравнения (I) и его решений. Будет показано, что возникают решения, кардинально отличающиеся от "возмущенных" решений уравнения $F(\phi,0) = 0$. На наш взгляд, это весьма примечательное обстоятельство. Представляется весьма заманчивым, не предвосхищая результатов дальнейших исследований, предположить, что одним из возможных путей построения теории многих взаимодействующих частиц может оказаться подход, оперирующий с моделями, которые приводят к подобного рода не вполне интегрируемым нелинейным уравнениям. Своеобразным нулевым приближением здесь могли бы служить вполне интегрируемые уравнения. При этом более детальное исследование специфики той или иной модели строится по отклонению соответствующего уравнения от "вполне интегрируемого аналога". Таким образом, роль параметра взаимодействия в теории могло бы играть отклонение от вполне интегрируемого уравнения, являющегося нулевым приближением. Подчеркнем еще раз, что свойства некоторых солитоноподобных решений "более реалистического" нелинейного уравнения могут кардинально отличаться от свойств хорошо изученных решений уравнений "нулевого приближения" (естественно, сформулированная возможность ничего общего не имеет с современными вариантами теории возмущения получения решений разложением по малому параметру). В вышеприведенном случае уравнения (I) это обусловлено тем, что необходимо исследовать свойства солитоноподобных решений как для амплитуды $A(x,t)$, так и для фазы $\Theta(x,t)$ комплексной функции

$$\phi(x,t) = A(x,t)\exp i\Theta(x,t)\,. \qquad (2)$$

П. Рассмотрим реализацию вышеочерченной программы на примере различных не вполне интегрируемых систем, для которых "нулевым" вполне интегрируемым уравнением является хорошо изученное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью (§3). Имея в виду естественное возникновение соответствующих уравнений для одномерных дискретных структур в "континуальном" приближении[5,7] *), можно записать такое уравнение в общем виде следующим образом:

$$i\phi_t - \phi + \phi_{xx} + |\phi|^2\phi = \Psi(\phi, \phi^*, \phi_x^*, \phi_{xx}, \dots), \qquad (3)$$

т.е. в виду $\mathcal{S}3$ "с правой частью". Функционал $\Psi$ представляет некоторый ряд по $\phi_x^*$, $|\phi_x|^2$, $|\phi_{xx}|^2\phi$, - линейные по $\phi$, $\phi_x$, $\phi_{xx}$ и $\phi^*$ члены либо учтены в левой части, либо не появляются из-за правил отбора, - с коэффициентами, являющимися комбинацией параметров гамильтониана. Для модели, исследованной в[6], $\Psi$ имеет вид

$$\Psi = -\alpha\phi_x^* + \gamma|\phi|^2_{xx}\cdot\phi + \frac{\gamma}{2}|\phi_{xx}|^2\phi .$$

Учет производных по "X" степени выше второй модифицирует и уравнение $\mathcal{S}3$ и вид $\Psi$ : $\mathcal{S}3$-уравнение уже не является "нулевым" приближением в этом случае. Уже первое приближение для $\Psi$, приводящее к (I), дает хороший нетривиальный пример не вполне интегрируемой системы, свойства некоторых солитоноподобных решений которой не могут быть изучены лишь с помощью разложения по параметру $\alpha$ (хотя при физически оправданном выборе параметров гамильтониана (см.[5]) $\alpha \ll$ I). Заметим, что уравнение (I) в том или ином приближении в разложении $\Psi$ может быть получено как уравнение Лагранжа на базе так называемого псевдолагранжиана $\tilde{\mathcal{L}}$ ($\phi_t, \phi_x, \phi, \dots, \eta_t, \eta, \dots$), в котором варьирование производится лишь по $\eta, \eta_t, \eta_x, \dots$ (с последующим приравниванием их в результате $\phi, \phi_t, \phi_x$). Псевдолагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}$ строится в случаях, когда амплитуда и фаза основного решения зависят от времени и координаты. Если зависимость слабая, то псевдолагранжев подход эквивалентен использованию усредненного лагранжиана[8]. Уравнение (I), являющееся приближенным ($k \ll 1$, $A \ll 1$), формально получается из

$$\tilde{\mathcal{L}} = \frac{i}{2}(\eta_t\eta^* - \eta_t^*\eta) - (\eta_x\eta_x^* + |\eta|^2 - \frac{1}{2}|\eta|^4) + \alpha\phi_x^*\eta^* .$$

Ниже мы исследуем характерные свойства модели типа (3) на примере уравнения (I).

---

*) Нам представляется, что метод получения уравнений для Шредингеровских амплитуд на базе уравнений движения для Гейзенберговских операторов и определенного выбора (пробной Шредингеровской) волновой функции системы, предложенной в /5/, является наиболее естественным для любой нетривиальной модели многих взаимодействующих частиц.



Ш. Действуя обычным образом, получим временные производные от плотностей числа частиц, импульса и энергии.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial j}{\partial x}, \qquad \rho = |\phi|^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 2\alpha(\phi_x^2 + \phi_x^{*2}) + \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mathcal{E} - \alpha(\phi^*\phi_x^* + \phi\phi_x) - (\phi^*\phi_{xx} + \phi\phi_{xx}^*)\right], \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = i\frac{\alpha\rho}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\phi^2 - \phi^{*2}) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho p(x) + \frac{i\alpha}{2}(\phi_x^{*2} - \phi_x^2) + i(\phi_x^*\phi_{xx} - \phi_x\phi_{xx}^*)\right],$$

где

$$p(x) = -i(\phi^*\phi_x - \phi\phi_x^*), \quad \mathcal{E}(x) = |\phi_x|^2 - \frac{1}{2}|\phi|^4, \quad j = p + \frac{i\alpha(\phi^2 - \phi^{*2})}{2} .$$

Или в интегральной форме

$$Q = \int\rho(x,t)\,dx = Const ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{d}{dt}\int p(x,t)\,dx = -2\alpha\int(\phi_x^2 + \phi_x^{*2})\,dx, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{d}{dt}\int\mathcal{E}(x,t)\,dx = \frac{i\alpha}{2}\int\rho(x,t)\frac{\partial}{\partial x}(\phi^2 - \phi^{*2})\,dx .$$

Очевидно, что при $\alpha = 0$ (4), (5) переходят в обычные законы сохранения уравнения $\mathcal{S}3$. В нашем случае точно сохраняется лишь полное число квазичастиц $Q$. Как мы увидим ниже, P и E сохраняются в среднем: $\langle P\rangle_t = \langle E\rangle_t = 0$, где $\langle\dots\rangle_t = T_0^{-1}\int_0^T(\dots)\,dt$.

Рассмотрим свойства некоторых решений волнового типа уравнения (I).

Простой подстановкой легко проверить, что колебания вида

$$\phi(x,t) = A\exp[-i(\omega t - \theta_0)] , \qquad (6)$$

где

$$A^2 = 1 - \omega , \quad \theta_0 = Const \qquad (7)$$

являются решениями (I).

Соотношение (7) играет роль дисперсионной формулы. Для нахождения решений волнового типа, когда $\phi_x \neq 0$ и $A \ll 1$, целесообразно записать (I) в виде системы двух уравнений. Полагая $\phi = u + iv$, имеем

$$U_t = V + \alpha V_x - V_{xx} - (U^2+V^2)U,$$
$$V_t = -U + \alpha U_x + U_{xx} + (U^2+V^2)V. \tag{8}$$

В нулевом по $A^2$ приближении с помощью Фурье-разложения найдем следующие решения линеаризованной системы (8):

$$U = A\cos\theta, \quad \theta = kx - \omega_0 t,$$
$$V = A\left[\frac{1+k^2}{\omega_0}\sin\theta - \frac{\alpha k}{\omega_0}\cos\theta\right] \tag{9}$$

с законом дисперсии

$$\omega_0^2 = (1+k^2) + \alpha^2 k^2. \tag{10}$$

Поправки, пропорциональные $A^2$ и выше, можно найти с помощью разложения

$$\delta U = A\left[\sum_0^\infty a_c^{(2n+1)}\cos(2n+1)\theta + \sum a_s^{(2n+1)}\sin(2n+1)\theta\right],$$

где $a_{c,s}^{(2n+1)} \sim A^2 a_{c,s}^{(2n-1)}$ или $a_{c,s}^{(2n+1)} \ll a_{c,s}^{(2n-1)}$,

$$\delta V = A\left[\sum_0^\infty b_c^{(2n+1)}\cos(2n+1)\theta + \sum_0^\infty b_s^{(2n+1)}\sin(2n+1)\theta\right].$$

Так, например, вместо (10) получим

$$\omega^2 = (1+k^2)^2 + \alpha^2 k^2 - 2(1+k^2)A^2. \tag{11}$$

Выражений для $\delta U, \delta V \sim A^3$ мы не приводим, так как они нам не понадобятся в дальнейшем и весьма громоздки.

Первое решение (6) представляет собой колебание с $\lambda \to \infty$ и частотой $\omega$, второе (9) есть волна с правильным видом дисперсии, распространяющаяся с фазовой скоростью $V_{ph} = \omega/k$ (при малых $k$ (10) совпадает с точной дисперсионной формулой, найденной в /9/). Волны вида (9) могут образовывать волновые пакеты, распространяющиеся с групповой скоростью $V_{gr} = (2+\alpha^2)k$. Из (10) следует также, что при малых $k$ член, пропорциональный $\alpha$, вносит относительно малый вклад также и в дисперсионные свойства системы (I).

Перейдем к рассмотрению вопросов устойчивости решений (6) и (9).



IУ. Основные особенности этой процедуры могут быть вполне проиллюстрированы на примере $A \to 1$ ($\omega_0 \to 0$, $k = 0$ ).

Действительно, полагая

$$U = A\cos\theta_0\left[1 + \delta_1 \exp(i\varkappa x - i\Omega t)\right],$$
$$V = A\sin\theta_0\left[1 + \delta_2 \exp(i\varkappa x - i\Omega t)\right], \quad \delta_i^* = \delta_i$$

и линеаризуя по $\delta_1$ и $\delta_2$, получим из (8)

$$\frac{\Omega^2}{\varkappa^2} = \left[\varkappa^2 + \alpha^2 - 2\right] - 2i\frac{\alpha}{\varkappa}\cos 2\theta_0 \tag{12}$$

или

$$\Omega = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}\left[\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}+1} - i\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}-1}\right],$$
$$a = \varkappa^2(\varkappa^2 + \alpha^2 - 2), \quad b = 2\alpha\varkappa\cos 2\theta_0, \tag{13}$$

а $\Omega$ и $\varkappa$ - суть, частота и волновое число возмущения. Зависимость инкремента (13) от $\varkappa$ представлена на рис. I.

В области малых амплитуд A << I и больших $\omega \to$ I, процедура получения дисперсионной формулы, связывающей $\Omega$ и $\varkappa$, усложняется. Здесь, однако, можно использовать то обстоятельство, что неустойчивость, если таковая имеется, обусловлена нелинейностью, а значит, время ее развития обратно пропорционально некоторой степени амплитуды ( $\sim A^{-\nu}$ ), и тем больше, чем меньше A. Это означает, что решение ($U, V$ ) есть функция двух времен - быстрого $\sim \omega^{-1}$ и медленного $\sim \Omega^{-1}$ [ж].

Запишем искомое решение в виде

$$U = A\left[\cos\omega t + (a_1\cos\omega t - a_2\sin\omega t)\exp i(\varkappa x - \Omega t)\right],$$
$$V = A\left[-\sin\omega t + (b_1\cos\omega t - b_2\sin\omega t)\exp i(\varkappa x - \Omega t)\right],$$

где $a_i$ и $b_i$ - малые константы. Подставим эти соотношения в уравнения (8) и линеаризуем систему по $a_i$ и $b_i$. Далее умножим каждое из них вначале на $\sin\omega t$ и усредним по быстрому времени, потом на $\cos\omega t$ и тоже усредним. В результате получим однородную линейную систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными $a_i$, $b_i$, приравнивая к нулю детерминант которой, получим искомое уравнение

---

ж) Что соответствует малой модуляции амплитуды A.

$$
\mathcal{D} = \begin{vmatrix}
-(\omega+\frac{1}{2}A^2), & i\Omega, & 0, & (\omega^2+\varkappa^2-\frac{3}{2}A^2+i\alpha\varkappa) \\
0, & -(\omega+\varkappa^2-\frac{1}{2}A^2-i\alpha\varkappa), & -(\omega-\frac{1}{2}A^2), & i\Omega, \\
-i\Omega, & -(\omega-\frac{1}{2}A^2), & -(\omega+\varkappa^2-\frac{1}{2}A^2+i\alpha\varkappa), & 0, \\
\omega^2+\varkappa^2-\frac{3}{2}A^2-i\alpha\varkappa, & 0, & i\Omega, & -(\omega+\frac{1}{2}A^2)
\end{vmatrix} = 0
$$

или

$$
\frac{\Omega^2}{\varkappa^2} = -\left[2A^2\left(1+\frac{\alpha^2\varkappa^2}{4}\right) - \varkappa^2\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2\right)\right]. \qquad (\mathrm{I4})
$$

Формула (I4) напоминает (I2), однако в (I4) отсутствует последний член в правой части. Видимо, с помощью описанной процедуры усреднения по быстрому времени он не может быть получен. Чтобы верифицировать (I4), используем более последовательный метод (аналог метода Боголюбова) разложения решения по гармоникам частоты $\omega$. А именно, представим ( $u$ , $v$ ) в виде

$$
u = A\Big[\cos\omega t + \sum_{n=0}^{\infty}\big(a_c^{(2n+1)}\cos(2n+1)\omega t - a_s^{(2n+1)}\sin(2n+1)\omega t\big)\times \exp i(\varkappa x - \Omega t)\Big],
$$

$$
v = A\Big[-\sin\omega t + \sum_{n=0}^{\infty}\big(b_c^{(2n+1)}\cos(2n+1)\omega t - b_s^{(2n+1)}\sin(2n+1)\omega t\big)\times \exp i(\varkappa x - \Omega t)\Big],
$$

$$
\Omega \ll \omega, \quad a_i^{(2n+1)} \ll a_i^{(2n-1)}, \quad b_i^{(2n+1)} \ll b_i^{(2n-1)} \quad i = c, s.
$$

Далее, после простой, но довольно громоздкой алгебры опять придем к двум системам из четырех уравнений: первая для $a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$, вторая для $a_i^{(3)}$, $b_i^{(3)}$. При этом оказывается, что $a_i^{(3)}$ и $b_i^{(3)} \sim A^2 a_i^{(1)}, A^2 b_i^{(1)}$, т.е., действительно, $b_i^{(3)} \ll b_i^{(1)}$, $a_i^{(3)} \ll a_i^{(1)}$ в силу $A^2 \ll$ I. детерминант же первой системы при $\Omega = \varkappa = 0$ равен нулю в силу дисперсионного соотношения (I0). В случае $\Omega$ и $\varkappa \neq 0$ он пропорционален $A^2$, поэтому в правой части системы для $a_i^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ можно оставить члены $\sim A^4$. В результате получим



$$
\frac{\Omega^2}{\varkappa^2} = -\left[2A^2\left(1+\frac{\alpha^2\varkappa^2}{4}\right) - \varkappa^2\left(1+\frac{\alpha^2}{2}\right) - i\alpha\varkappa\frac{A^4}{4}\right], \qquad (\mathrm{I5})
$$

т.е. формулу, аналогичную (I2), а следовательно, и (I3), в которой теперь

$$
a = \varkappa^2\left(\varkappa^2 + \frac{\alpha^2\varkappa^2}{2} - 2A^2\right), \quad b = \frac{\alpha\varkappa^3 A^4}{4} \qquad (\mathrm{I6})
$$

при этом $\varkappa$ , A $\ll$ I.
Неустойчивость (I2) и (I5) является модификацией хорошо известной модуляционной неустойчивости волновых пакетов в нелинейных диспергирующих средах (в плазме, например, ей подвержены пакеты ленгмюровских и многих других волн). Развитие ее в рамках $\mathcal{S}$3 уравнения приводит к образованию солитонов, при этом дисперсионная формула есть $\Omega^2 = \varkappa^2(2A^2 - \varkappa^2)$ . Присутствие члена $\alpha\phi_x^*$ в уравнении (I) приводит к более медленному спаду инкремента $\gamma = \mathrm{Im}\,\Omega$ в области больших $\varkappa \gg$ I (см. рис. I). Поэтому можно ожидать, что в рамках уравнения (I) произвольные начальные пакеты также окажутся неустойчивыми по отношению к разбиению на солитоноподобные объекты[ж)].

В связи с этим представляет интерес исследовать свойства солитоноподобных решений уравнения (I).

У. Как уже отмечалось выше, наиболее легко это удается сделать при $\alpha \ll 1$ с помощью теории возмущений, когда в качестве нулевого приближения выступает солитонное решение $\mathcal{S}$3. Используя представление (2), получим из (I)

$$
\begin{aligned}
&A_t + 2\theta_x A_x - \alpha A_x \sin 2\theta - \alpha\theta_x A\cos 2\theta + A\theta_{xx} = 0,\\
&-A\theta_t - A + A_{xx} - A\theta_x^2 + A^3 + \alpha A_x\cos 2\theta - \alpha A\theta_x \sin 2\theta = 0.
\end{aligned} \qquad (\mathrm{I7})
$$

Первое из этих уравнений с помощью доумножения на А приводится к виду (сравни (6))

$$
\frac{\partial}{\partial t}A^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\theta_x - \alpha\sin 2\theta\right)A^2 = 0.
$$

---

ж) Численные эксперименты, проведенные Ю.В.Катышевым в ЛВТА ОИЯИ, подтверждают это предположение.

Найдем, например, поправки $\sim\alpha$ к покоящемуся солитону уравнения $\mathcal{S}3$. Для этого рассмотрим случай $\theta_x \to 0$. Тогда имеем

$$A_t = \alpha A_x \sin 2\theta$$
$$-\theta_t A - A + A_{xx} + A^3 + \alpha A_x \cos\theta = 0. \qquad (18)$$

Из (18) следует, что $A(x,t)$ есть функция аргумента

$$\xi = x + \int_0^t \sin 2\theta(t')\,dt'. \qquad (19)$$

Будем искать решение для $\theta$ такого вида, чтобы

$$\theta_t = -\omega + \alpha f(\xi)\cos 2\theta. \qquad (20)$$

Подставляя это выражение в (18), получим для $A(\xi)$ уравнение $\mathcal{S}3$

$$(\omega-1)A + A_{\xi\xi} + A^3 = 0$$

с дополнительным условием

$$f(\xi) = (\ln A)'_{\xi}.$$

Поскольку решение $\mathcal{S}3$ есть

$$A = a_0\, ch^{-1}\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}\xi\right),\quad a_0 = \sqrt{2(1-\omega)}, \qquad (21)$$

находим

$$f(\xi) = -\frac{a_0}{\sqrt{2}}\, th\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}\xi\right) \qquad (22)$$

Сравнивая в уравнениях (17) отброшенные члены, пропорциональные $\theta_x$ и оставшиеся, находим, что решение (19)-(22) справедливо при $\alpha a_0 \ll 1$ и $a_0^2 \ll 1$ *). В этом случае (19) и (20) легко интегрируются, что дает

---

*) Это означает, что при получении (19)-(23) отброшены члены, пропорциональные $\alpha^2 a_0^2$ и $\alpha a_0^3$ по сравнению с единицей, и оставлены члены $\sim\alpha a_0$ и $\sim\alpha$.



$$\Phi(x,t) = \exp\left\{-i\left[\left(1-\frac{a_0^2}{2}\right)t + \frac{\alpha a_0}{2\sqrt{2}}\, th\left(\frac{a_0 x}{\sqrt{2}}\right)\sin 2t\right]\right\}\times \qquad (23)$$
$$\times\, a_0\, sech\left[\frac{a_0}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{1}{2}\alpha\cos 2t\right)\right].$$

При малом $\alpha$ солитонные решения уравнения (I) можно попытаться получить с помощью техники обратной задачи рассеяния, описанной в /10/. Однако следует учесть, что наше уравнение отличается от рассмотренного в /10/ дополнительным членом $-\Phi$ в левой части и коэффициентом 2 при $\Phi_x$.
Сделав замену $\Phi = \sqrt{2}\exp(-it)\,u(x,\tau)$, приведем уравнение (I) к виду, допускающему прямое использование формул [10]

$$iu_\tau + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = -\frac{\alpha}{2}u_x^*\exp(i\tau), \qquad (24)$$

где $\tau = 2t$. При $\alpha \to 0$ решение (24) записывается в виде

$$u_0 = 2\nu_0 \exp\left[i\frac{\mu_0}{\nu_0}z_0 + i\delta_0\right] sech\, z_0,$$
$$z_0 = 2\nu_0(x-\bar{x}_0),\quad \bar{x}_0 = 2\mu_0\tau,\quad \delta_0 = 2(\mu_0^2+\delta_0^2)\tau. \qquad (25)$$

Вводя, как всегда, $\exp i(\kappa x - \omega_0\tau)$ и обозначая $\kappa = 2\mu_0$, $a_0 = 2\sqrt{2}\,\nu_0$, получим обычное дисперсионное уравнение для $\mathcal{S}3$ солитона (3I) $2\omega_0 = \kappa^2 - a_0^2/2$.

В переменных $\mu, \nu, \xi$ и $\delta$ поправки первого порядка по $\alpha$, запишутся в следующем виде:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\alpha}{2}\, Re\int_{-\infty}^{\infty}\frac{iu_x^*}{ch\, z}\exp i\left(-\frac{\mu}{\nu}z - \delta + 2t\right)dz, \qquad (26)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\alpha}{2}\, Im\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sh\, z}{ch^2 z}(iu_x^*)\exp i\left(-\frac{\mu}{\nu}z - \delta + 2t\right),$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 4\mu + \frac{\alpha}{4\nu^2} Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{ch z} \left( i u_x^* \right) \exp i\left(-\frac{\mu}{\nu} z - \delta + 2t\right) dz \ ,$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 2\mu \frac{d\bar{x}}{dt} - 4(\mu^2 - \nu^2) + \frac{\alpha}{4\nu} Im \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{ch z} - \frac{z\, sh z}{ch^2 z}\right)(i u_x^*) \exp i\left(-\frac{\mu}{\nu} z - \delta + 2t\right) dz.$$

Первые два из этих уравнений являются частными случаями соотношений (5). Действительно, замечая, что первое выражение из (26) можно представить как:

$$\frac{d\nu}{dt} \sim \alpha\, Re \left[ e^{2it} \int_{-\infty}^{\infty} i u^* u_z^* dz \right] = 0 \ ,$$

видим, что $\nu \sim Q = Const.$

Аналогично можно показать, используя соотношение $\nu = Const$, что

$$\frac{d\mu}{dt} \sim \alpha \int (u_z^{*2} + u_z^2) dz \sim \frac{dP}{dt}$$

Приведем окончательные выражения для поправок к $\nu, \mu, x$ и $\delta$, полученных прямым вычислением интегралов, фигурирующих в правых частях (26),

$$\nu = \nu_0 = Const \ ,$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{4}{3} \alpha (\mu^2 + \nu^2) \frac{\tau}{sh \tau}\ Cos\, 2(\delta - t) \quad , \quad \tau = \frac{\pi\mu}{\nu}$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 4\mu - \alpha \frac{\tau}{sh \tau}\ Sin\, 2(\delta - t) \ ,$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 4(\mu^2 + \nu^2) + 2\alpha\nu \left\{ \frac{\tau}{\pi} + \frac{\pi}{3\tau}\left[1 - \left(1 + \frac{\tau^2}{\pi^2}\right)\tau\, cth \tau\right]\right\} \frac{\tau\, Sin\, 2(\delta - t)}{sh \tau}.$$

Эти уравнения легко могут быть решены методом итераций. Наиболее простые формулы получаются в случае



$$\nu = \nu_0 = Const,\ \mu \simeq -\frac{2}{3}\alpha \nu_0^2 Sin 2t,\ \bar{x} = -\frac{\alpha}{2} Cos 2t, \quad \delta = 4\nu_0^2 t$$

что дает для решения уравнения (I), восстановленного с помощью приема работы [10],

$$\tilde{\Phi} = \exp\left[-i\left(\left(1 - \frac{a_0^2}{2}\right)t + \frac{\alpha a_0^2 x}{6} Sin 2t\right)\right] \frac{a_0}{ch \frac{a_0}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\alpha}{2} Cos 2t\right)} \tag{27}$$

Подставляя решение (27) в первое уравнение (I7), замечаем, что оно так же, как и в предыдущем случае,удовлетворяется с точностью $O(\alpha a_0, a_0^2)$. Второму уравнению (I7) "решение" (27) не удовлетворяет даже в главном порядке по малому параметру $\alpha a_0$.

Тот факт, что возмущение в нелинейном уравнении может приводить к функционально иной (нежели невозмущенной) зависимости решения от координаты, вполне естествен (см., например, [11]).

УI. В заключение опишем решения, которые получаются при совпадении фазовой и групповой скоростей волн. Здесь мы не будем пользоваться малостью параметра $\alpha$. Введем переменные $\xi = x - Vt$ и $\eta = kx - \omega t$ так, что $A(\xi)$ и $\theta(\eta)$, тогда вместо уравнений (I7) получим

$$\begin{gathered} -VA_\xi - \alpha A_\xi Sin 2\theta - \alpha k A \theta_\eta Cos 2\theta + 2A_\xi k \theta_\eta + k^2 A \theta_{\eta\eta} = 0, \\ kVA_t \theta_\eta + A_{\xi\xi} - A + A^3 - k^2 A \theta_\eta^2 + \alpha A_\xi Cos 2\theta - \alpha k A \theta_\eta Sin 2\theta = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

Условие $V_{ph} = V_{gr}$ приводит к $\eta = k\xi$. В этом случае первое из уравнений (28) легко интегрируется, приводя к соотношению

$$A^2\left(\theta_\xi - \frac{V}{2} - \frac{\alpha}{2} Sin 2\theta\right) = Const.$$

Полагая, в силу граничных условий, для солитона $Const = 0$, получим

$$\xi + C = \begin{cases} 2(V^2 - \alpha^2)^{-1/2} arctg \dfrac{V tg\theta + \alpha}{\sqrt{V^2 - \alpha^2}} , & V^2 > \alpha^2 \\ -\dfrac{1}{V} tg\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right), & V^2 = \alpha^2 \\ (\alpha^2 - V^2)^{-1/2} ln \dfrac{V tg\theta + \alpha - \sqrt{\alpha^2 - V^2}}{V tg\theta + \alpha + \sqrt{\alpha^2 - V^2}} , & V^2 < \alpha^2. \end{cases}$$

Проиллюстрируем свойства полученных решений на примере покоящегося солитона: $V=0$. При этом фаза

$$\theta = \sigma + \theta_0 = \operatorname{arctg} e^{\alpha(x-x_0)} + \theta_\pm, \qquad \theta_+ = \pi(n+\tfrac{1}{2}), \quad \theta_- = \pi n;\ n=0,\pm1,\pm2,\dots \tag{29}$$

удовлетворяет синус-Гордон-уравнению $\theta_{\xi\xi} = \frac{\alpha^2}{4}\sin 4\theta$. При изменении $x$ от $-\infty$ до $+\infty$ происходит поворот фазы $\theta$ на угол $\pi/2$ в области ширины $\sim\alpha^{-1}$ вблизи начала координат.

Второе уравнение системы (28) приводится в этом случае к виду

$$A_{xx} - A + A^3 - \frac{3}{4}\alpha^2 A\sin 2\theta + \alpha A_x \cos 2\theta. \tag{30}$$

В зависимости от величины "начальной" фазы $\theta$ при $x\to-\infty$ уравнение (30) имеет разные знаки перед последним членом в его левой части. Выбор $\theta_+$ и $\theta_-$ в качестве начальной фазы приводит, соответственно, к *)

$$A_{xx} - A + A^3 - \frac{3}{4}\alpha^2 A \sin 2\sigma - \alpha A_x\cos 2\sigma = 0,\quad \theta_0=\theta_+,$$

$$A_{xx} - A + A^3 - \frac{3}{4}\alpha^2 A\sin 2\sigma + \alpha A_x \cos 2\sigma = 0,\quad \theta_0=\theta_-. \tag{31}$$

Эти уравнения могут быть легко исследованы при малых $\alpha$. С точностью до $O(\alpha)$ вместо первого уравнения (31) получим, используя (29), инвариантное относительно преобразования $x\to -x$ уравнение

$$A_{xx} - A + A^3 + \alpha A_x \operatorname{th}\alpha x = 0. \tag{32}$$

Домножая (32) на $A_x$, перепишем его в виде некоторого закона сохранения.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} A_x^2 - \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{4} A^4\right) = -\alpha A_x^2 \operatorname{th}\alpha x, \tag{33}$$

*) Следует отметить, что в работе [6] допущена неточность в определении значения $\theta_-$, вместо величины $\pi n$ там стоит $\pi(n+\frac{1}{2})$.



Рассмотрим для наглядности симметричные относительно начала координат решения (32). Мы имеем в этом случае граничную задачу на полуоси $x\ge 0$ с условием $A_x|_{x=0}=0$ (аналогично можно исследовать нечетные решения). Задача (32), (33) имеет простую механическую аналогию: колебания частицы единичной массы в потенциальном поле $U = -\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{4}A^4$ под действием силы трения $\sim\alpha A\operatorname{th}\alpha x$. Такая граничная задача, кроме одного безузлового солитонного решения, имеет целое счетное множество решений с узлами функции $A_n$ [4] (где $n$ нумерует число узлов). Каждому соответствует строго фиксированная амплитуда в начале координат, тем большая, чем больше $n$ (см. рис. 2). В силу малости $\alpha$ рассматриваемый спектр амплитуд будет весьма плотным, начинаясь с $a_0=\sqrt{2}$. Это качественно новое семейство решений, как уже подчеркивалось ранее, нельзя получить с помощью метода последовательных приближений.

В заключение приведем приближенный вид безузлового решения при $\alpha\ll 1$:

$$A_\alpha \simeq \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}x}\, e^{-\frac{\alpha}{2}\operatorname{th}^2 x\int_0^x \frac{\operatorname{th}\alpha y}{\operatorname{th}^2 y}dy} \equiv A_0 e^{\alpha f(x)}$$

Для $f(x)$ имеем асимптотики

$$f(x)\simeq -\frac{\alpha}{2}\operatorname{th}^2x\left(\frac{1}{2}x^2+\ln\operatorname{sh}x - x\operatorname{cth}x\right),\quad x\le 1,$$

$$f(x)\simeq -\frac{1}{2}\operatorname{th}^2x\,\ln\operatorname{ch}\alpha x,\quad x>1.$$

Так что при $x>1$ приближенное решение есть

$$A_\alpha = \sqrt{2}(\operatorname{ch}\alpha x)^{-1/2}(\operatorname{ch}x)^{-1}.$$

Из этого выражения видно, что учет члена, пропорционального $\alpha$, лишь весьма слабо изменяет решение $A_0$. Окончательно для стационарного солитона имеем

$$\Phi_\alpha^+ = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}x(\operatorname{ch}\alpha x)^{1/2}}\exp i\left[\operatorname{arctg}e^{\alpha x}+\pi(n+\tfrac{1}{2})\right],$$

или

$$\Phi_\alpha^- = \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch}x(\operatorname{ch}\alpha x)^{1/2}}\exp i\left[\operatorname{arctg}e^{\alpha x}+\pi n\right],\quad n=0,\pm1,\dots$$

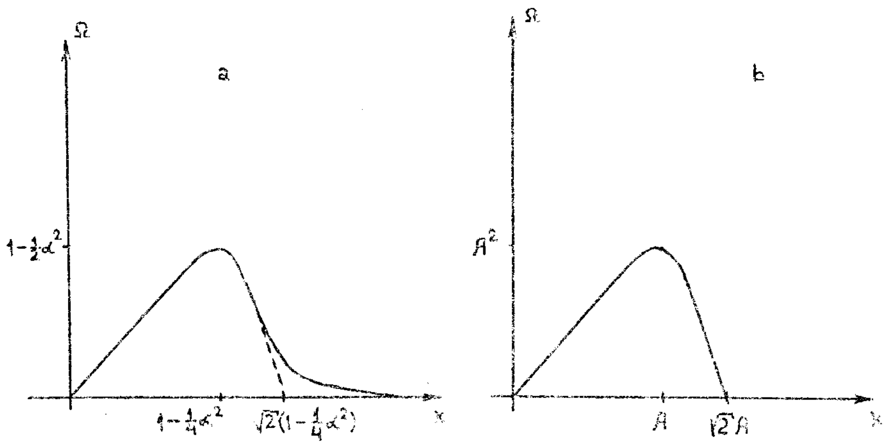


Рис. I

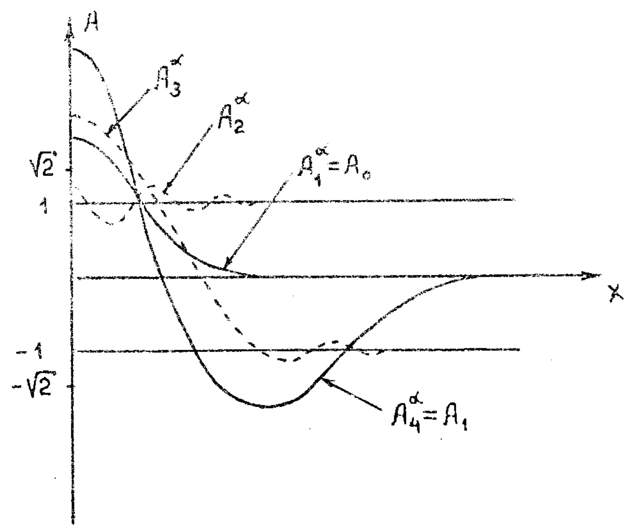


Рис.2



УП. Из всего вышеизложенного следует, что наличие в уравнении (I) малого члена $\sim\alpha\phi_x^*$ приводит к появлению богатого спектра решений, часть из которых не может быть получена методом итераций. Вопрос о том, с какой вероятностью исследованные нами решения будут осуществляться при распаде начального условия (решение задачи Коши) остается пока открытым. Однако можно надеяться что снятие запретов, налагаемых высшими законами сохранения и появление новых (в том числе качественно) решений будет приводить к более быстрому, чем в рамках $\mathcal{S}3$ /I2/, распаду начальных пакетов.

В заключение заметим, что выражение (23) описывает осциллирующий солитоноподобный объект, не излучающий во всяком случае в первом порядке по малому параметру. Ранее похожие объекты, так называемые бионы, были известны в рамках вполне интегрируемого синус-Гордон-уравнения.

## Литература


I. Н.Н.Боголюбов, Ю.Д.Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, ФМ, I963.
2. A.Scott, F.Chu, D.McLaughlin Proc. of IEEE, 61, 1443, 1-73.
3. D. ter Haar, "Nonlinear propagation behaviour in optical and other physical systems", Ref. 54/77, Oxford DIP, 1977.
4. V.G.Makhankov, Phys.Reports 35C, 1, 1978.
5. V.K.Fedyanin, V.G.Makhankov, L.V.Yakushevich, Phys.Lett. 61A, 256, 1977. ОИЯИ, PI7-I0488, Дубна, I977.
6. В.Г.Маханьков, В.К.Федянин. ДАН, 236, 838, I977.
7. A.S.Davydov, N.Kislukha, Phys.Stat.Sol. (b), 59, 465, 1973.
8. Дж.Уизем. "Линейные и нелинейные волны". Мир, М., I977.
9. В.К.Федянин, Л.В.Якушевич. ТМФ, 30, I33, I977.
I0. В.И.Карпман, В.М.Маслов. ЖЭТФ, 73, 537, I977 (№ 2).
II. V.G.Makhankov, Phys.Lett., 50A, 42, 1974.
I2. Kh.Abdulloev, I.Bogolubsky, V.Makhankov, Phys.Lett., 48A, 161, 1974.


Рукопись поступила в издательский отдел
I7 апреля I978 года.