ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р17 - 11429

В.Г.Маханьков, В.К.Федянин

СОЛИТОНОПОДОБНОЕ РЕШЕНИЕ S3-УРАВНЕНИЯ, "ВОЗМУЩЕННОГО" РЕЗОНАНСНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1978

P17 - 11429

В.Г.Маханьков, В.К.Федянин

СОЛИТОНОПОДОБНОЕ РЕШЕНИЕ S3-УРАВНЕНИЯ, "ВОЗМУЩЕННОГО" РЕЗОНАНСНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в "Physics Letters"

Маханьков В.Г., Федянин В.К. P17 - 11429

Солитоноподобное решение S3 -уравнения, "возмущенного" резонансным взаимодействием

Получено решение солитонного типа для "возмущенного" уравнения Шредингера с кубической нелинейностью, которое описывает широкий круг явлений в физике конденсированного состояния (в частности, экситон-фононные возбуждения в одномерных молекулярных кристаллах). Показано, что такое решение не может быть получено с помощью теории возмущений использующей метод обратной задачи рассеяния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Makhankov V.G., Fedynanin V.K. P17 - 11429

A Soliton-Like Solution for the S3 Equation Perturbed by Resonance Interaction

A soliton-type solution for the "perturbed" Schrödinger equation with cubic nonlinearity is obtained which describes a wide range of phenomena in the condensed matter physics (in particular, exciton-phonon interactions in one-dimensional molecular crystals). It is shown that such a solution could not be obtained by the application of the perturbation theory which uses the inverse scattering method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В работе[I] в длинноволновом приближении было получено дифференциальное уравнение для шредингеровских амплитуд вероятностей $\varphi(x,t)$

$$i\varphi_t - \varphi + \alpha\varphi_x^* + \varphi_{xx} + |\varphi|^2\varphi = 0 . \qquad (I)$$

Заметим, что уравнения такого типа описывают не только экситон-фононные возбуждения в одномерных молекулярных кристаллах, применительно к которым шло обсуждение в[I], но и квазиспиновые системы, экситоны большой плотности, ряд других модельных систем с четверным фермионным и , при определенных ограничениях, бозонным взаимодействием.

В работе[2] для произвольных значений α были исследованы общие свойства солитоноподобных решений и найдены некоторые частные решения (см.также[3]). В физически содержательных моделях, однако, $\alpha \ll 1$ (параметр α пропорционален, грубо говоря, отношению энергии взаимодействия ближайших соседей $\mu' \sim 0{,}0I$ эВ к величине "щели" $\Delta \sim I$ эВ - энергии возбуждения молекулы). По этой причине несомненный интерес представляет нахождение и исследование решений уравнения (I),"близких" к решению $S3$ -уравнения, в которое переходит (I) при $\alpha = 0$.

С этой целью представим $\varphi(x,t)$ в виде:

$$\varphi(x,t) = A(x,t)\, exp\, i\,\theta(x,t) . \qquad (2)$$

Подстановка (2) в (I) и элементарные преобразования приводят нас к двум уравнениям для "амплитуды" $A(x,t)$ и "фазы" $\theta(x,t)$.

$$A_t + 2\theta_x A_x - \alpha A_x \sin 2\theta - \alpha A\theta_x \cos 2\theta + A\theta_{xx} = 0 \qquad (3)$$
$$A\theta_t + A - A_{xx} + A\theta_x^2 - A^3 - \alpha A_x \cos 2\theta + \alpha A\theta_x \sin 2\theta = 0 .$$

Будем искать "поправки" по α" к покоящемуся солитону уравнения $S3$, т.е. рассмотрим случай $\theta_x \to 0$ (полученное ниже решение позволит оценить порядок отброшенных членов уравнения и параметры малости). Имеем в таком случае:

$$A_t - \alpha A_x \sin 2\theta = 0 \; ; \qquad (4.I)$$

$$A\theta_t - A + A_{xx} + A^3 + \alpha A_x \cos 2\theta = 0 . \qquad (4.2)$$

Из (4.I) следует, что амплитуда $A(x,t)$ есть функция аргумента ξ

$$\xi = x + \alpha \int_0^t \sin 2\theta \, dt' . \qquad (5)$$

Ищем решение для θ в виде функции, удовлетворяющей требованию

$$\theta_t = -\omega + \alpha f(\xi) \cos 2\theta , \qquad (6)$$

$f(\xi)$ – неизвестная функция ξ .

Подставляя (6) в (4.2) и требуя, чтобы $f(\xi)$ определялась соотношением

$$f(\xi) = (\ln A)_\xi , \qquad (7)$$

приходим для $A(\xi)$ к уравнению $S3$:

$$(\omega - 1)A + A_{\xi\xi} + A^3 = 0 , \qquad (8)$$

солитонное решение которого определяется хорошо известными формулами:

$$A = a_0 \, ch^{-1}\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}\xi\right) , \quad a_0 = \sqrt{2(1-\omega)} . \qquad (9)$$

Формулы (9) и (7) дают для $f(\xi)$

$$f(\xi) = -\frac{a_0}{\sqrt{2}} \, th\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}\xi\right) . \qquad (10)$$

Воспользовавшись теперь представлением (2) и формулами (9),(I0), несложно установить, что порядок слагаемых, отброшенных в уравнениях (3), следующий:

$$\theta_x A_x \sim \frac{\alpha a_0^4}{\omega} , \quad \alpha\theta_x A \sim \frac{\alpha^2 a_0^3}{\omega} , \quad A\theta_{xx} \sim \frac{\alpha a_0^4}{\omega} ;$$

$$A\theta_x^2 \sim \frac{\alpha^2 a_0^5}{\omega} , \quad \alpha A \theta_x \sim \frac{\alpha^2 a_0^3}{\omega} .$$

Поскольку $\alpha A_x \sim \alpha a_0^2$, а $\omega \simeq 1 - \frac{a_0^2}{2}$, заключаем, что решения (9),(I0) справедливы при

$$\alpha a_0 \ll 1 , \quad a_0^2 \ll 1 . \qquad (11)$$

Суммируя (5),(6),(9),(I0), имеем для $\varphi(x,t)$ следующую формулу:

$$\varphi(x,t) = exp\left\{-i\left[\left(1-\frac{a_0^2}{2}\right)t + \frac{\alpha a_0}{2\sqrt{2}} th\left(\frac{a_0}{\sqrt{2}}x\right)\sin 2t\right]\right\} \cdot$$
$$\cdot\, a_0 \, sech\left[\frac{a_0}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{\alpha}{2}\cos 2t\right)\right] . \qquad (12)$$

Заметим, что зависимость фазы (I2) от координаты $\propto th x$ напоминает зависимость фазы $\propto arctg(e^x)$ стационарного солитонного решения уравнения (I), полученного в [2] в предположении, что

$$A = A(\eta = x - vt) , \quad \theta = (k\eta) .$$

Представляется естественным попытаться получить решение (I) при $\alpha \ll 1$ также приемом, предложенным в работе [4]. В основу

этого приема кладется вычисление поправок по "возмущению α " к решению "невозмущенного" уравнения (в нашем случае уравнения $S3$). Если воспользоваться подстановкой

$$\varphi(x,t) = e^{-i\tau/2}\sqrt{2}\; u(\tau,x) \qquad \tau = 2t ,$$

то уравнение (I) преобразуется к виду

$$i u_\tau + \frac{1}{2}u_{xx} + |u|^2 u = i\left(+i\frac{\alpha}{2} u_x^* e^{i\tau}\right) , \qquad (13)$$

который позволяет прямо воспользоваться формулами работы [4] для вычисления "поправок от возмущения $\left(i\frac{\alpha}{2} u_x^* \exp i\tau\right)$ " к решению уравнения (I3) при $\alpha = 0$, которое теперь удобно записать в виде:

$$u_0 = 2\nu_0 \exp\left(i\frac{\mu_0}{\nu_0} z_0 + i\delta_0\right) sech\, z_0 ,$$

$$z_0 = 2\nu_0 (x - \bar{x}_0) , \quad \bar{x}_0 = 2\mu_0\tau , \quad \delta_0 = 2(\mu_0^2 + \nu_0^2) .$$

Представляя решение уравнения (I3) в аналогичной форме

$$u = 2\nu \exp\left(i\frac{\mu}{\nu} z + i\delta\right) sech\, z , \quad z = 2\nu(x - \bar{x}) \qquad (14)$$

и пользуясь формулами первого адиабатического приближения [4] для $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$, $\frac{d\bar{x}}{dt}$ и $\frac{d\delta}{dt}$ (мы учли, что $\tau = 2t$) при включении "возмущения $\left(i\frac{\alpha}{2} u_x^* e^{i\tau}\right)$"

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\alpha}{2} Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ch z}(i u_x^*) e^{-i\frac{\mu}{\nu}z - i\delta + 2it} \, dz$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\alpha}{2} Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sh z}{ch^2 z}(i u_x^*) e^{-i\frac{\mu}{\nu}z - i\delta + 2it} \, dz \qquad (15)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 4\mu + \frac{\alpha}{4\nu^2} Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{ch z}(i u_x^*) e^{-\frac{\mu}{\nu}z - i\delta + 2it} \, dz$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 2\mu\frac{d\bar{x}}{dt} - 4(\mu^2 - \nu^2) + \frac{\alpha}{2\nu} Im \int \left(\frac{1}{ch z} - \frac{z\, sh z}{ch^2 z}\right)(i u_x^*) e^{-i\frac{\mu}{\nu} - i\delta + 2it} \, dz$$

получаем, после несложных, но длинных выкладок :

$$\nu = \nu_0$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{4}{3}\alpha(\mu^2 + \nu^2)\frac{\frac{\pi\mu}{\nu}}{sh\, \pi\mu/\nu}\cos(2\delta - 2t)$$

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = 4\mu - \alpha\frac{\frac{\mu\pi}{\nu}}{sh\frac{\pi\mu}{\nu}}\sin(2\delta - 2t)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 4(\mu^2 + \nu^2) + 2\alpha\nu\left\{\frac{\mu}{\nu} + \frac{\nu}{3\mu}\left[1 - \left(1 + \frac{\mu^2}{\nu^2}\right)\frac{\mu\pi}{\nu} cth\frac{\mu\pi}{\nu}\right]\right\} \times$$
$$\times \frac{\frac{\mu\pi}{\nu}}{sh\frac{\mu\pi}{\nu}}\sin(2\delta - 2t) . \qquad (16)$$

Тот факт, что для уравнения (I) $\nu = \nu_0 = const$, естествен: первое соотношение из (I5) после интегрирования по частям дает $\frac{d\nu}{dt} = 0$, но несложно усмотреть, что $\nu \propto Q$, а, согласно/2/, Q – число квантов – есть единственная сохраняющаяся величина для уравнения (I). Уравнения (I6) могут быть решены итерациями. Наиболее простые формулы получаем в случае $\mu_0 \ll \nu_0$:

$$\delta = 4\nu^2 t\,, \quad \mu = -\frac{2}{3}\alpha\nu^2 \sin 2t\,, \quad \bar{x} = -\frac{\alpha}{2}\cos 2t\,, \tag{I7}$$

что дает для (2) следующее выражение:

$$\varphi(x,t) = \frac{a_0}{ch\, z}\exp\left\{-i\left[\left(1-\frac{a_0^2}{2}\right)t + \frac{\alpha a_0^2 x}{6}\sin 2t\right]\right\}, \quad z = \frac{a_0}{\sqrt{2}}(x-\bar{x})\,. \tag{I8}$$

Если подставить (I8) в (3), то несложно усмотреть, что второе уравнение (3) не удовлетворяется в главном порядке по возмущению; не удовлетворяется, естественно, и (4.2). Первое уравнение (3) и уравнение (4.I) удовлетворяются в предположении (II).

Структура формул (I4),(I6) показывает, что данный вывод не зависит от предположения $\mu_0 \ll \nu_0$, позволившего прийти при $\alpha a_0 \ll 1$ и $a_0^2 \ll 1$ к (I7). Решение (I8) отличается от (I2) в первую очередь за счет второго слагаемого ($\propto x$), обнаруживающего "секулярное" поведение: именно характерное поведение $f(\xi)$ (см. (I0)) при $\xi \to \infty$ и позволяет удовлетворить уравнению (I) или системам (3),(4) в главном порядке по возмущению. Прием построения решения "возмущенного" нелинейного уравнения, основанный на построении поправок к решению "нулевого приближения", полученному методом обратной задачи теории рассеяния для уравнения при $\alpha = 0$, по-видимому, должен быть дополнен анализом того, какие типы возмущающих операторов допускают его использование.

Уместно напомнить в связи с этим, что методы теории возмущений для нелинейных дифференциальных уравнений при их практической реализации требуют большой аккуратности и известной осторожности/5/; здесь зачастую в "решениях" возникают "секулярные" члены, обусловленные некорректностью использованных аппроксимаций.

В заключение заметим, что решение (I2) описывает осциллирующий в пространстве и времени объект, не излучающий во всяком случае в первом порядке по α.

Литература

I. V.K.Fedyanin, V.G.Makhankov, L.V.Yakushevich, Phys. Lett 61A, 256, 1977. В.Г.Маханьков, В.К.Федянин, Л.В.Якушевич. ОИЯИ, PI7-I0488, Дубна, I977.

2. В.Г.Маханьков, В.К.Федянин. ДАН СССР, 236, 838, I977; V.K.Fedyanin, V.G.Makhankov, JINR, E17-10507, Dubna, 1977.

3. V.G.Makhankov, Phys. Reports, 35C, 1, 1978.

4. V.I.Karpman, E.M.Maslov, Phys. Lett., 60A, 307, 1977, В.И.Карпман, Е.М.Маслов, ЖЭТФ,73,537,I977.

5. Н.Н.Боголюбов, Ю.Д.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М.,I963.

Рукопись поступила в издательский отдел
3I марта I978 года.