ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р17 - 10289

В.А.Загребнов, А.Клемм, П.Цише

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАТЕРИИ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

1976

P17 - 10289

В.А.Загребнов, А.Клемм,* П.Цише*

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАТЕРИИ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Направлено в *"Journal of Physics A"*

---

* Технический университет, Дрезден, ГДР

Загребнов В.А., Клемм А., Цише П. P17 - 10289

Точно решаемая модель взаимодействия материи с электромагнитным полем

Предлагается обобщенная модель Дикке, включающая в себя: (1) пространственное изменение электромагнитного поля; (2) квантовые дебайевские колебания атомов около положений равновесия. Показано, что удельная свободная энергия на одну частицу для такой модели может быть вычислена в термодинамическом пределе точно.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Zagrebnov V.A., Klemm A., Ziesche P. P17 - 10289

An Exactly Soluble Model for Matter Interacting with Radiation

A generalized Dicke model including: (1) the spatial variation of electromagnetic field, (2) quantum Debye vibrations of atoms around their equilibrium positions is proposed. It is proved the free energy per particle for such a model can be calculated in the thermodynamic limit exactly and rigorously.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

I. Введение

Недавно, в работах /I,2/ было дано строгое исследование новой модели для материи (твердое тело), взаимодействующей с квантованным полем излучения. В этих работах, кроме учета пространственного изменения электромагнитного поля в резонаторе Λ, предполагается, что N двухуровневых атомов в Λ совершают классические колебания $\{u_j\}$ около положений равновесия $\{\ell_j\}$ гармонической решетки. В работе /I/ обсуждается также связь этой новой модели с моделями типа Дикке /3,4/. Целью настоящей работы является доказательство того, что свободная энергия на один атом для этой модели может быть вычислена в термодинамическом пределе точно даже в том случае, когда атомы совершают не классические, а квантовые колебания $\{\hat{u}_j\}$.

В разделе 2 дано определение гамильтониана и выяснены некоторые его свойства. В разделе 3 мы исследуем соответствующую статистическую сумму и свободную энергию на один атом в термодинамическом пределе $N\to\infty$, $|\Lambda|\to\infty$, $|\Lambda|/N=v$, здесь $|\Lambda|$ - объем резонатора. Некоторые математические результаты, необходимые для изложения, собраны в Приложении.

2. Гамильтониан

Чтобы избежать усложнений, мы рассмотрим простейшую версию модели с одной фотонной модой $\{\omega_k, \mathbb{k}\}$ и одной продольной фононной модой $\{\Omega_q, \mathbb{q}\}$ такую, что $\mathbb{k}=\mathbb{q}=\mathbb{Q}$, $|\mathbb{Q}|=\pi/a$. Здесь a-постоянная решетки в направлении $\mathbb{Q}$ (детали см. /I,2/). Обобщения на случай многоуровневых атомов, конечного числа мод, ненулевой величины фазы φ электромагнитного поля и т.д. можно осуществить, используя методы работ /2,3,5/.

Для стоячей синусоидальной электромагнитной волны в резонаторе Λ, фаза которой $\varphi=0$, гамильтониан нашей модели имеет следующий вид (обсуждение см. /I/, а также /6/):

$$H_N=\omega_Q b_Q^+ b_Q+\epsilon\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\hat{\lambda}_j(\sigma_j^+ b_Q+\sigma_j^- b_Q^+)+\Omega_Q a_Q^+ a_Q\,, \quad (2.I)$$

где

$$\hat{\lambda}_j=\lambda \sin(Q\ell_j+Q\hat{u}_j)\,,\qquad \hat{u}_j=\frac{a_Q^++a_Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}\cos Q\ell_j\,. \quad (2.2)$$

Здесь $\ell_j=a\cdot j$, а гильбертово пространство состояний $\mathcal{H}=\mathcal{H}_a\otimes\mathcal{H}_b\otimes\otimes\mathcal{H}_\sigma$, где $\mathcal{H}_a$ и $\mathcal{H}_b$ – фоковские пространства, соответствующие операторам рождения-уничтожения (a_Q^+,a_Q) (фононы) и (b_Q^+,b_Q) (фотоны); $\mathcal{H}_\sigma$ – 2^N-мерное пространство состояний N двух-уровневых атомов с разностью между уровнями, равной ϵ, которые описываются операторами Паули $\{\sigma_j^\alpha\}$: $\alpha=x,y,z$; $\sigma_j^\pm=\sigma_j^x\pm i\sigma_j^y$.

Предложение 2.I. Пусть оператор H_N определен выражением (2.I), (2.2), тогда H_N самосопряжен на области $D(T_N)=D(H_N)$, где $T_N\equiv H_N(\lambda=0)$, и $\exp(-H_N/\theta)$ для $\theta>0$ – ядерный оператор (Tr -класс).

Доказательство проводится так же, как и в работах /3,5/, если заметить, что оператор $\hat{\lambda}_j=\lambda\sin\left[\frac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(a_Q^++a_Q)\right]$(2.2) ограничен на $\mathcal{H}_a$. Следовательно, оператор $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\hat{\lambda}_j(\sigma_j^+b_Q+\sigma_j^-b_Q^+)$ является возмущением T_N, малым в смысле Като (см., например, /7/).

Пусть теперь $\mathcal{P}_n=P_a^{(n)}\otimes\mathbb{1}_b\otimes\mathbb{1}_\sigma$ проектор на конечномерное подпространство фононных состояний с не более, чем n фононами, так что $\mathcal{P}_n\to\mathbb{1}_a\otimes\mathbb{1}_b\otimes\mathbb{1}_\sigma$ сильно при $n\to\infty$. Определим оператор $H_N^{(n)}=\mathcal{P}_nH_N\mathcal{P}_n$ и рассмотрим:

$$Z_n(\theta,N)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_a}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_b}\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\sigma}\mathcal{P}_n\exp(-H_N^{(n)}/\theta)\equiv\mathrm{Tr}\,\mathcal{P}_n\exp(-H_N^{(n)}/\theta). \quad (2.3)$$

Предложение 2.2 Пусть $Z(\theta,N)=\mathrm{Tr}\exp(-H_N/\theta)$ статистическая сумма для нашей модели (2.I), здесь θ – температура системы, тогда

$$\lim_{n\to\infty}Z_n(\theta,N)=Z(\theta,N)\,. \quad (2.4)$$

Доказательство. $\{\mathcal{P}_n\}$, определенные выше, образуют возрастающую дискретную последовательность проекторов такую, что $\mathcal{P}_{n+1}-\mathcal{P}_n$ – одномерный проектор в $\mathcal{H}_a$ для любого $n=1,2,\ldots$; $\mathcal{P}_n[\mathcal{H}_a\otimes D_b(H_N)\otimes\mathcal{H}_\sigma]\subset D(H_N)$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n[\mathcal{H}_a\otimes D_b(H_N)\otimes\mathcal{H}_\sigma]=\mathrm{Core}\,H_N$. Следовательно, операторы $\{\exp(-H_N^{(n)}/\theta)\}$ сходятся к $\exp(-H_N/\theta)$ в ядерной топологии /8/. Однако $\mathrm{Tr}(\cdot)$, как известно (см., например, /7/), непрерывен в ядерной топологии, что и приводит к (2.4). ■

3. Свободная энергия на одну частицу

В этом разделе мы вначале построим некоторую нижнюю и верхнюю границы для статистической суммы нашей модели (2.4). Для этого используем обрезанные когерентные состояния Глаубера для фононов (см. например /9/):

$$|\alpha,n\rangle=P_a^{(n)}|\alpha\rangle\,. \quad (3.I)$$

Наш подход близок к методу, предложенному в работе /3/, который мы обобщаем на случай, когда когерентные состояния используются для описания не только фотонов, но и фононов.

Нижняя граница. Из работы /3/ для нашей модели (2.I) следует, что

$$Z_-(\theta,N)\leqslant Z(\theta,N)\,, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{aligned}
&Z_-(\theta,N)=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_a}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1}d^2\beta\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_b}\exp\left[-H_N(\beta,\beta^*)/\theta\right]\,,\\
&H_N(\beta,\beta^*)=\omega_Q|\beta|^2+\epsilon\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\lambda\,\mathrm{Sin}\left[\frac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(a_Q^++a_Q)\right]\times\\
&\times(\sigma_j^+\beta+\sigma_j^-\beta^*)+\Omega_Q a_Q^+a_Q\,,\qquad d^2\beta=d(\mathrm{Re}\beta)\,d(\mathrm{Im}\beta)\,.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

Предложение 3.I Пусть $Z_-(\theta,N)$-вспомогательная функция, определенная выражением (3.3), тогда

$$Z_0(\theta,N)\leqslant Z_-(\theta,N)\,, \tag{3.4}$$

где

$$\begin{aligned}
&Z_0(\theta,N)=\frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}^1}d^2\alpha\int_{\mathbb{C}^1}d^2\beta\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_b}\exp\left[-H_N(\alpha,\alpha^*;\beta,\beta^*)/\theta\right]\,,\\
&H_N(\alpha,\alpha^*;\beta,\beta^*)=\omega_Q|\beta|^2+\epsilon\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z+\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{Sin}\left[\frac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(\alpha^*+\alpha)\right]\times\\
&\times\exp(-Q^2/2N\Omega_Q)(\sigma_j^+\beta+\sigma_j^-\beta^*)+\Omega_Q|\alpha|^2.
\end{aligned}\tag{3.5}$$

Доказательство. Воспользуемся обрезанными когерентными состояниями для фононов (3.I) и определим

$$\begin{aligned}
Z_-^{(n)}(\theta,N)&=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_a}P_a^{(n)}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1}d^2\beta\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_b}\exp\left[-H_N^{(n)}(\beta,\beta^*)/\theta\right]=\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}^1}d^2\alpha\int_{\mathbb{C}^1}d^2\beta\,\langle\alpha,n|\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_b}\exp\left[-H_N^{(n)}(\beta,\beta^*)/\theta\right]|\alpha,n\rangle\,,
\end{aligned}\tag{3.6}$$

где $H_N^{(n)}(\beta,\beta^*)=\mathcal{P}_n H_N(\beta,\beta^*)\mathcal{P}_n$. Тогда с помощью неравенства Пайерлса-Боголюбова: $\langle\alpha,n|\exp[-H_N^{(n)}(\beta,\beta^*)/\theta]|\alpha,n\rangle\geqslant\langle\alpha,n|\alpha,n\rangle\times\exp\{-\langle\alpha,n|H_N^{(n)}(\beta,\beta^*)|\alpha,n\rangle/\theta\langle\alpha,n|\alpha,n\rangle\}$ получим

$$\begin{aligned}
Z_-^{(n)}(\theta,N)\geqslant\frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}^1}d^2\alpha\int_{\mathbb{C}^1}d^2\beta\;K_n(\alpha,\alpha)\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_b}\exp\Big[-\Big\{\omega_Q|\beta|^2+\epsilon\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z+\\
+\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}(\sigma_j^+\beta+\sigma_j^-\beta^*)\frac{\langle\alpha,n|\,\mathrm{Sin}\left[\frac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(a_Q^++a_Q)\right]|\alpha,n\rangle}{K_n(\alpha,\alpha)}+\Omega_Q|\alpha|^2\frac{K_{n-1}(\alpha,\alpha)}{K_n(\alpha,\alpha)}\Big\}/\theta\Big]\,,
\end{aligned}$$

здесь $K_n(\alpha,\alpha)=\exp(-|\alpha|^2)\sum_{\ell=0}^{n}\frac{|\alpha|^{2\ell}}{\ell!}$. Оператор $\mathrm{Sin}\left[\frac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(a_Q^++a_Q)\right]$ ограничен на $\mathcal{H}_a$, следовательно, сильная сходимость проекторов $\mathrm{s}\text{-}\lim_{n\to\infty}P_a^{(n)}=\mathbb{1}_a$ влечет за собой

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\langle\alpha,n|\,\mathrm{Sin}\left[\frac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(a_Q^++a_Q)\right]|\alpha,n\rangle=\\
&=\langle\alpha\,|\,\mathrm{Sin}\left[\frac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(a_Q^++a_Q)\right]|\alpha\rangle\,.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Матричный элемент в правой части (3.7) можно вычислить с помощью формулы Бейкера-Хаусдорфа. Это, вместе с теоремой Лебега о последовательности функций, сходящихся при $n\to\infty$ в $L^1(\mathbb{R}^1)$(см. Приложение), Предложением 2.2 и $\lim_{n\to\infty}K_n(\alpha,\alpha)=1$ доказывает (3.4). ■

Верхняя граница. Из работы /3/ также следует, что для нашей модели (2.I)

$$Z(\theta,N)\leqslant Z_-(\theta,N)\exp(\omega_a/\theta)\,. \tag{3.8}$$

Предложение 3.2 Пусть $Z_-(\theta,N)$ - вспомогательная функция, определенная выражением (3.3), тогда

$$Z_-(\theta,N)\leqslant Z_0(\theta,N)\exp(\Omega_a/\theta)\,. \tag{3.9}$$

Доказательство. Следуя методу работы /I0/ определим (ср. (3.3))

$$\begin{aligned}
&Z_m^{(n)}=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1}d^2\beta\,\exp(-\omega_Q|\beta|^2/\theta)\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_a}P_a^{(n)}\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_b}\left[1-\widetilde{H}_N^{(n)}(\beta,\beta^*)/m\theta\right]^m,\\
&\widetilde{H}_N^{(n)}(\beta,\beta^*)=\mathcal{P}_n H_N(\beta,\beta^*)\mathcal{P}_n-\omega_Q|\beta|^2\,.
\end{aligned}\tag{3.I0}$$

Поскольку след в (3.I0) конечномерный, $\lim_{m\to\infty}Z_m^{(n)}=Z_-^{(n)}$ (3.6).
Теперь удобно воспользоваться "диагональным" представлением $\hat{H}_N(\alpha,\beta,\varepsilon)$ оператора $\widetilde{H}_N(\beta,\beta^*)$, которое строится с помощью фононных когерентных состояний (см. Приложение). Для корректности

дальнейших рассуждений введем множитель, обеспечивающий сходимость интегралов, возникающих при использовании такого представления оператора $\widetilde{H}_N(\beta,\beta^*)$. Нам понадобятся следующие формулы (см. (П.2), (П.3)):

$$\{a_Q^+ a_Q\}_{\varepsilon>0} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2\alpha\, (|\alpha|^2-1)\exp(-\varepsilon|\alpha|^2)\,|\alpha\rangle\langle\alpha| \quad ;$$

$$\{\sin[\tfrac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(a_Q^+ + a_Q)]\}_{\varepsilon>0} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2\alpha\, \sin[\tfrac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(\alpha^*+\alpha)]\times \tag{3.11}$$

$$\times\exp(-Q^2/2N\Omega_Q)\exp(-\varepsilon|\alpha|^2)\,|\alpha\rangle\langle\alpha| .$$

Следовательно, $\widetilde{H}_N(\beta,\beta^*)\to\hat{\widetilde{H}}_N(\alpha,\beta,\varepsilon)=\hat{H}_N(\alpha,\beta,\varepsilon)-\omega_Q|\beta|^2$, причем $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} Z_-^{(n)}[\hat{H}_N(\alpha,\beta,\varepsilon)] = Z_-^{(n)}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} Z_m^{(n)}[\hat{\widetilde{H}}_N(\alpha,\beta,\varepsilon)] = Z_-^{(n)}(\varepsilon)$. Для $Z_m^{(n)}(\varepsilon) = Z_m^{(n)}[\hat{\widetilde{H}}_N(\alpha,\beta,\varepsilon)]$, как показал Либ /10/, имеется следующая оценка сверху:

$$Z_m^{(n)}(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2\alpha\, K_n(\alpha,\alpha)\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2\beta\,\exp(-\omega_Q|\beta|^2/\theta)\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\sigma}[1-\widetilde{H}_N(\alpha,\beta,\varepsilon)/m\theta]^m;$$

$$\widetilde{H}_N(\alpha,\beta,\varepsilon)=\epsilon\sum_{j=1}^N\sigma_j^z+\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^N\sin[\tfrac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(\alpha^*+\alpha)]\exp(-Q^2/2N\Omega_Q)\times$$

$$\times(\sigma_j^+\beta+\sigma_j^-\beta^*)\exp(-\varepsilon|\alpha|^2)+\Omega_Q(|\alpha|^2-1)\exp(-\varepsilon|\alpha|^2).$$

Наличие множителя $\exp(-\varepsilon|\alpha|^2)$ и быстрое убывание $K_n(\alpha,\alpha)$ при $|\alpha|\to\infty$ позволяют воспользоваться для последовательности в правой части неравенства (3.12) теоремой Лебега, из которой следует, что

$$Z_-^{(n)}(\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2\alpha\, K_n(\alpha,\alpha)\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2\beta\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\sigma}\exp[-\widetilde{H}_N(\alpha,\beta,\varepsilon)/\theta]\times$$

$$\times\exp(-\omega_Q|\beta|^2/\theta).$$

Полагая далее, с учетом все той же теоремы Лебега, $\varepsilon\to+0$ (см. (3.12)), получим

$$Z_-^{(n)}\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2\alpha\, K_n(\alpha,\alpha)\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2\beta\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\sigma}\exp[-H_N(\alpha,\alpha^*;\beta,\beta^*)/\theta]\exp(\Omega_Q/\theta). \tag{3.13}$$

Гамильтониан $H_N(\alpha,\alpha^*;\beta,\beta^*)$ (см. (3.5)) содержит член $\Omega_Q|\alpha|^2$, следовательно, используя еще раз теорему Лебега, теперь уже для правой части (3.13) при $n\to\infty$, и Предложение 2.2, получаем (3.9). ■

Теперь нам понадобится следующее

Предложение 3.3. Пусть $Z_o(\theta,N)\equiv Z_o(\theta,N,\lambda_N=\lambda\exp(-Q^2/2N\Omega_Q))$ статистическая сумма, определяемая (3.5), тогда для соответствующей свободной энергии на один атом $f_N^{(o)}(\theta,\lambda_N)=-\frac{\theta}{N}\ln Z_o(\theta,N,\lambda_N)$

$$\lim_{N\to\infty} f_N^{(o)}(\theta,\lambda_N)=f_o(\theta,\lambda)\ , \tag{3.14}$$

где

$$f_o(\theta,\lambda)=\lim_{N\to\infty} f_N^{(o)}(\theta,\lambda)\ . \tag{3.15}$$

Доказательство. Из неравенства Боголюбова (т.е. выпуклости $f_N^{(o)}(\theta,\xi)$ по $\xi\in\mathbb{R}^1$) получаем

$$\Delta_N\frac{1}{N}\langle H_I\rangle_{\xi=\lambda_N}\leqslant f_N^{(o)}(\theta,\lambda_N)-f_N^{(o)}(\theta,\lambda)\leqslant\Delta_N\frac{1}{N}\langle H_I\rangle_{\xi=\lambda}\ , \tag{3.16}$$

где $\Delta_N H_I\equiv H_N(\alpha,\alpha^*;\beta,\beta^*|\lambda_N)-H_N(\alpha,\alpha^*;\beta,\beta^*|\lambda)$ (см. (3.5)), т.е.

$$H_I=\frac{\lambda}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^N\sin[\tfrac{Q}{\sqrt{N\Omega_Q}}(\alpha^*+\alpha)](\sigma_j^+\beta+\sigma_j^-\beta^*),\ \Delta_N=\exp(-Q^2/2N\Omega_Q)-1, \tag{3.17}$$

$$\langle H_I\rangle_\xi=Z_o^{-1}(\theta,N|\xi)\frac{1}{\pi^2}\int_{\mathbb{C}^1} d^2\alpha\int_{\mathbb{C}^1} d^2\beta\,\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_\sigma}\{H_I\exp[-H_N(\alpha,\alpha^*;\beta,\beta^*|\xi)/\theta]\}\ .$$

Величина $|\frac{1}{N}\langle H_I\rangle_\xi|$ ограничена непрерывной функцией $c(\theta,\xi)$, следовательно, (3.14) является прямым следствием (3.15)-(3.17). ■

Следствие 3.1. Сравнивая неравенства (3.2), (3.4) и (3.8), (3.9), мы получаем, с учетом (3.14), (3.15), что

$$\lim_{N\to\infty}\{-\frac{\theta}{N}\ln Z(\theta,N)\}=f_o(\theta,\lambda)\ . \tag{3.18}$$

4. Заключение

Для предложенной в этой работе модели взаимодействия материи с излучением (2.1) свободная энергия на один атом $f_N(\theta) = -\frac{\theta}{N}\ln Z(\theta,N)$ обладает следующими свойствами:

(I) термодинамический предел: $\lim_{N\to\infty} f_N(\theta)$ существует и совпадает с $f_0(\theta,\lambda)$ (3.I8);

(2) величину $f_0(\theta,\lambda)$ можно вычислить точно, если воспользоваться (3.5) и методом перевала; нетрудно видеть, что она совпадает со свободной энергией на один атом (в термодинамическом пределе) для модели (2.I) с классическими фононами вместо квантовых /I,2/.

Авторы приносят благодарность В.Б.Приезжеву и В.Тиммерману за обсуждение некоторых вопросов, затронутых в настоящей работе.

Приложение

I. Здесь мы напомним теорему Лебега, которая часто использовалась выше (см. например /7/):

Теорема. (Лебег) Пусть $\{F_n(x)\}$ - последовательность вещественных функций с $x\in\mathbb{R}^1$ такая, что $F_n(x)\in L^1(\mathbb{R}^1)$ и $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=F(x)$ почти всюду. Если существует $G(x)\in L^1(\mathbb{R}^1)$ такая, что $|F_n(x)|\leq G(x)$ почти всюду, тогда

(I) $F(x)\in L^1(\mathbb{R}^1)$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\|F-F_n\|_{L^1(\mathbb{R}^1)}=0$.

2. Пусть $\mathcal{H}_a$ - пространство Фока с вакуумом $|0\rangle_a$, соответствующее бозонной моде (a^+,a) . Тогда для произвольного комплексного числа $z\in\mathbb{C}^1$ глауберовское когерентное состояние имеет вид:

$$|z\rangle=\exp(-|z|^2/2)\sum_{n=0}^{\infty} z^n\frac{(a^+)^n}{n!}|0\rangle_a \quad . \tag{П.I}$$

Для $z\in\mathbb{C}^1$ состояния $\{|z\rangle\}$ образуют "сверхполное" множество векторов в $\mathcal{H}_a$. Важную особенность этого свойства когерентных состояний выражает следующая

Теорема /II,I2/. Пусть A - оператор с плотной областью определения $D(A)\subset\mathcal{H}_a$ и для любого n : $|n\rangle\in D(A)$, здесь $|n\rangle=\frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle_a$. Если ряд $\sum_{n,m=0}\langle n|A|m\rangle\frac{(z_1^*)^n z_2^m}{\sqrt{n!m!}}$ сходится абсолютно для любых конечных величин $|z_1|$, $|z_2|$, тогда:

(I) оператор A однозначно определяется своими диагональными элементами $\langle z|A|z\rangle$, $z\in\mathbb{C}^1$;

(2) A имеет следующее "диагональное" представление

$$A=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2z\,\varphi(z)\,|z\rangle\langle z| \quad , \tag{П.2}$$

где $\varphi(z)$ - обобщенная функция, которая удовлетворяет уравнению

$$\langle z|A|z\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}^1} d^2z'\,\varphi(z')\exp(-|z-z'|^2) \quad . \tag{П.3}$$

Литература:

I. А.Клемм, В.А.Загребнов. Препринт ОИЯИ, EI7-9600, Дубна,1976.

2. В.А.Загребнов, А.Клемм. Препринт ОИЯИ, PI7-I0249, Дубна, 1976.

3. K.Hepp, E.H.Lieb. Phys.Rev. A8, 25I7 (I973).

4. F.T.Hioe. Phys.Rev. A8, I440 (I973).

5. В.А.Загребнов, Й.Г.Бранков, Н.С.Тончев. Препринт ОИЯИ, E4-88I8, Дубна, I975; ДАН СССР 225, 7I (I975).

6. C.Kittel. Quantum Theory of Solids, N.Y.-London I963.

7. M.Reed, B.Simon. Methods of Modern Physics, vol.I, Academic Press, New York, I972.

8. M.Breitenecker. Reports on Math.Phys. 4, 28I (I973).

9. J.R.Klauder, E.C.G.Sudarshan. Fundamentals of Quantum Optics, New York-Amsterdam, I968.

I0. E.H.Lieb. Comm.Math.Phys. 3I, 327 (I973).

11. C.I.Menta, E.C.G.Sudarshan. Phys.Rev. 138, B274 (1965).

12. J.R.Klauder, J.McKenna, D.G.Currie.Journ.Math.Phys.6,733(1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
9 декабря 1976 года.