

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



3-144

21/3-77

P17 - 10249

1004/2-77

В.А.Загребнов, А.Клемм

О МОДЕЛИ ДИККЕ
С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1976

P17 - 10249

В.А.Загребнов, А.Клемм*

О МОДЕЛИ ДИККЕ
С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Направлено в "Journ. of Stat. Phys."

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

* Технический университет, Дрезден, ГДР.

Загребнов В.А., Клемм А.

P17 - 10249

О модели Дикке с флуктуирующими параметрами

Доказана теорема, позволяющая распространить обобщенный метод термодинамически эквивалентного гамильтониана Н.Н.Боголюбова (мл.) на некоторый класс моделей Дикке, которые содержат флуктуирующие параметры. Обобщаются некоторые результаты, касающиеся модели Дикке с пространственно-переменным электромагнитным полем, атомы которой совершают классические дебаевские колебания около положений равновесия.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

Zagrebнов V.A., Klemm A.

P17 - 10249

On the Dicke-Type Model with Some Hidden Variables

The main theorem about the exactness of the generalized version of the Bogoliubov (Jr.) thermodynamically-equivalent-Hamiltonian method for Dicke-type models which include some hidden variables is proved. Some generalizations are done of earlier investigations according to a Dicke-type model with spatial variation of electromagnetic field and classical Debye vibrations of atoms around their equilibrium positions. They refer to the range of electromagnetic field phase ϕ and to violation of the one-mode approximation for vibrations.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

I. Введение

С тех пор, как в 1970 году Хепп и Лио /1/ впервые математически строго исследовали термодинамические свойства модели Дикке, которая упрощенно описывает картину взаимодействия между системой из N двухуровневых атомов, помещенных в резонатор Λ , и квантованным электромагнитным полем, появилось много работ, обобщающих эту модель в разных направлениях $x/$.

В нашей предыдущей работе /2/ мы исследовали модель Дикке, обобщенную в следующих двух направлениях:

I) Так же, как Хепп, Лио /3/, Хио /4/ и Томпсон /5/, мы учитываем пространственное изменение электромагнитного поля. Если не учитывать этот факт, то в термодинамическом пределе во взаимодействии будет участвовать лишь электромагнитная волна с волновым вектором $k=0$. Однако, в отличие от предыдущих версий /4/, в нашей модели резонатор в термодинамическом пределе становится бесконечным.

$x/$ Обзор последних работ содержится в /2/.

2) Одновременно мы предположили, что атомы совершают классические колебания около положений равновесия. Однако, в отличие от Хюе /4/, вместо эйнштейновских колебаний мы рассматриваем коллективные дебаевские колебания.

В работе /2/ мы использовали метод термодинамически эквивалентного гамильтониана (ТЭГ), который был развит для широкого класса моделей типа Дикке в работах /6,7/. Этот метод позволяет точно вычислить свободную энергию на один атом системы в термодинамическом пределе: $N \rightarrow \infty$, $|\Lambda| \rightarrow \infty$ ($|\Lambda|$ — объем резонатора Λ), $|\Lambda|/N = \nu$. Поскольку фотоны с волновым вектором \mathbf{k} взаимодействуют сильно только с теми продольными фононами, у которых волновой вектор \mathbf{q} — коллинеарен и соизмерим с \mathbf{k} , в /2/ мы ограничились рассмотрением случая одной моды $\mathbf{q} = \mathbf{k}$. Было обнаружено, что термодинамические свойства системы сильно зависят от фазы φ стоячей синусоидальной электромагнитной волны в прямоугольном резонаторе Λ . Термодинамические свойства системы (сжимаемая модель Дикке) были исследованы в двух предельных случаях: $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. В случае $\varphi = 0$, в отличие от аналогичной модели Хюе /4/, при низких температурах происходит бозе-конденсация фотонов и классических фононов с $\mathbf{q} = \mathbf{k}$, которая сопровождается макроскопической деформацией решетки и превращением фазового перехода второго рода (в случае жесткой решетки) в переход первого рода ^{x/}. В случае $\varphi = \pi/2$ колебания решетки не влияют на обычный фазовый переход второго рода в сверхизлучающее состояние, когда конденсируется только фотонная мода /1,6/.

^{x/} Аналогичное термодинамическое поведение демонстрирует большинство сжимаемых спин-решеточных моделей, которые ранее рассматривались в рамках некоторых приближений (см. /8-10/ и литературу, цитируемую там), а также модели с другими типами флуктуирующих параметров /11/. В работе /2/ и в настоящей работе показано, что некоторые из таких моделей могут быть решены строго и точно.

Целью настоящей работы является рассмотрение тех случаев, которые не были проанализированы в работе /2/. Мы исследуем термодинамические свойства нашей модели в зависимости от фазы φ , когда она изменяется между $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$. Кроме того, мы рассмотрим обобщение нашей модели на случай двух фононных мод и исследуем условия бозе-конденсации классических фононов в этом многомодовом случае.

В разделе 2 приведено доказательство основной теоремы, в котором суммируются аргументы, приведенные в работе /2/ в пользу того, что метод ТЭГ Боголюбова (мл.), обобщенный на случай моделей типа модели Дикке в /6,7/, дает точный результат и в случае, когда в модель включены флуктуирующие параметры, соответствующие, например, колебательным степеням свободы. В разделе 3 определяется гамильтониан системы, которая исследуется в следующих разделах; в разделе 4 исследованы термодинамические свойства системы для $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, а в разделе 5 для случая двух фононных мод с $\varphi = 0$.

2. Гамильтониан Дикке с флуктуирующими параметрами

Класс гамильтонианов, который мы рассмотрим ниже, описывает взаимодействие материи (M), помещенной в резонатор Λ с квантованным бозонным полем (B). Пространство состояний \mathfrak{H} для такой системы является тензорным произведением соответствующих пространств: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_B \otimes \mathfrak{H}_M$. Здесь B — это свободное электромагнитное поле с конечным числом мод, а \mathfrak{H}_B — фокковское пространство с бозонными операторами рождения и уничтожения $\{b_k^+, b_k\}$ для фотонов с энергиями $\omega_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, L$. Без учета дополнительных степеней свободы (таких, как трансляции /3/, колебания около положений равновесия /2,4/ и др.), M — это система из N атомов

с гамильтонианом $H_M(\Lambda^N)$, который описывает только внутренние степени свободы атомов, отвечающие взаимодействию с бозонным полем B . Мы будем предполагать, что $H_M(\Lambda^N)$ порождает плотность свободной энергии

$$f_N [H_M(\Lambda^N)] = -\frac{\beta^{-1}}{N} \ln T_{\mathfrak{S}_M} \exp [-\beta H_M(\Lambda^N)], \quad (2.1)$$

такую, что в термодинамическом пределе существует

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ |\Lambda| \rightarrow \infty \\ \frac{|\Lambda|}{N} = \nu}} f_N [H_M(\Lambda^N)] = f_M(\beta, \nu). \quad (2.2)$$

Гамильтониан взаимодействующих подсистем B и M в случае, когда в резонатор Λ помещено N двухуровневых атомов, имеет следующий вид $x/$:

$$H_D = \sum_{k=1}^L \omega_k b_k^+ b_k \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \epsilon \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_j^z + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^N (\lambda_{kj} b_k^+ \otimes \mathcal{G}_j^- + \lambda_{kj}^* b_k \otimes \mathcal{G}_j^+). \quad (2.3)$$

Здесь $H_M(\Lambda^N) = \epsilon \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_j^z$, а \mathfrak{S}_M является 2^N -мерным пространством состояний N двухуровневых атомов (с разностью энергий между уровнями ϵ), которые описываются операторами Паули для половинного спина \mathcal{G}_j^α : $\alpha = x, y, z$, $\mathcal{G}_j^\pm = \mathcal{G}_j^x \pm i \mathcal{G}_j^y$.

Следуя методу ТЭГ $/6, 7/$, построим для H_D аппроксимирующий гамильтониан:

$$H_0(\bar{\eta}, \bar{\eta}^*) = \sum_{k=1}^L \omega_k (b_k^+ + \frac{\bar{\eta}_k^*}{\omega_k} \sqrt{N})(b_k + \frac{\bar{\eta}_k}{\omega_k} \sqrt{N}) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \epsilon \sum_{j=1}^N \mathcal{G}_j^z - \mathbb{1} \otimes \sum_{k=1}^L \frac{1}{\omega_k} (J_k^- \bar{\eta}_k^* + J_k^+ \bar{\eta}_k) + \mathbb{1} \otimes N \sum_{k=1}^L \frac{|\bar{\eta}_k|^2}{\omega_k}, \quad (2.4)$$

$x/$ 0 происхождении такого гамильтониана взаимодействия см. /1, 2, 12/. Обобщение на случай многоуровневых атомов, антирезонансных членов и т.п. не представляет труда, см. обсуждение в работах /1-3, 6, 7/.

где

$$J_k^+ = \sum_{j=1}^N \lambda_{kj}^* \mathcal{G}_j^+, \quad J_k^- = \sum_{j=1}^N \lambda_{kj} \mathcal{G}_j^-, \quad k=1, 2, \dots, L; \quad (2.5)$$

а $(\bar{\eta}, \bar{\eta}^*) = \{\bar{\eta}_k, \bar{\eta}_k^*\}_{k=1}^L$ - решение уравнения

$$\text{abs min}_{(\eta, \eta^*)} f_N [H_0(\eta, \eta^*)] = f_N [H_0(\bar{\eta}, \bar{\eta}^*)]. \quad (2.6)$$

Для случая, когда последовательность $\{\lambda_{kj}\}_{j=1}^\infty$ констант связи такова, что

$$\sup_{\{j\}} |\lambda_{kj}| = \tilde{\lambda}_k < \infty \quad k=1, 2, \dots, L, \quad (2.7)$$

имеем следующее

Предположение 2.1 (Бранков, Загребнов, Тончев $/6, 7/$).

Пусть H_D и $H_0(\bar{\eta}, \bar{\eta}^*)$ - операторы гамильтона, определенные выше выражениями (2.3)-(2.6), а $\tilde{\lambda} = \max_{\{k\}} \tilde{\lambda}_k$, тогда

$$0 \leq f_N [H_0(\bar{\eta}, \bar{\eta}^*)] - f_N [H_D] \leq L \sqrt{\tilde{\lambda}} \delta(\beta^{-1}, \omega_1, \dots, \omega_L, |\epsilon|, \tilde{\lambda}) \epsilon_N, \quad (2.8)$$

где $\delta(\beta^{-1}, \omega_1, \dots, \omega_L, |\epsilon|, \tilde{\lambda})$ непрерывная функция с областью определения $D = \{\beta^{-1} \geq 0, \omega_k > 0, |\epsilon| \geq 0, \tilde{\lambda} > 0\}$, и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_N = 0. \quad (2.9)$$

Лемма 2.1. Пусть $\{\lambda_{kj}\}$ - набор флуктуирующих констант связи ($k=1, 2, \dots, L$; $j=1, 2, \dots, \infty$), для которого функции распределения при каждом фиксированном N $\{g_N(\{\lambda_{kj}\}_{j=1}^N)\}$ таковы, что:

- 1) $\int \prod_{(kj)} d^2 \lambda_{kj} g_N(\{\lambda_{kj}\}_{j=1}^N) \leq C$; ($d^2 \lambda_{kj} = d(\text{Re } \lambda_{kj}) d(\text{Im } \lambda_{kj})$);
- 2) существует $\tilde{\lambda}_j$ такое, что для произвольного N $g_N(\{\lambda_{kj}\}_{j=1}^N) = 0$, когда $|\lambda_{kj}| \geq \tilde{\lambda}_j$; тогда для $f_N [H_0(\bar{\eta}, \bar{\eta}^*)] = f_N [\bar{H}_0]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f_N [\bar{H}_0] - f_N [H_D]) = 0; \quad (2.10)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\langle f_N [\bar{H}_0] \rangle - \langle f_N [H_D] \rangle) = 0, \quad (2.11)$$

где

$$\bar{f}_N[H] = \int \prod_{(kj)} d^2 \lambda_{kj} f_N[H] g_N(\{\lambda_{kj}\}) ; \quad (2.12)$$

$$\langle f_N[H] \rangle = -\frac{\beta^{-1}}{N} \ln \int \prod_{(kj)} d^2 \lambda_{kj} \text{Tr} \exp(-\beta H) g_N(\{\lambda_{kj}\}). \quad (2.13)$$

Доказательство. Согласно Предположению 2.1, для $\Delta_N = f_N[\bar{H}_0] - f_N[H_D]$ у нас имеется равномерная оценка:

$$0 \leq \sup_{|\lambda_{kj}| \leq \tilde{\lambda}_g} \Delta_N(\{\lambda_{kj}\}) \leq L \sqrt{\tilde{\lambda}_g} \delta(\beta^{-1}, \omega_1, \dots, \omega_L, |\epsilon|, \tilde{\lambda}_g) \epsilon_N. \quad (2.14)$$

Остальное есть немедленное следствие (2.14). Ч.т.д.

Следствие 2.1. Пусть $\{\lambda_{kj}(\xi_1, \dots, \xi_r)\}$ - последовательность параметров связи, зависящих от конечного числа действительных переменных $\{\xi_n\}_{n=1}^r$ таких, что:

$$1) \max_k \sup_{\{j, \xi_n\}} |\lambda_{kj}(\xi_1, \dots, \xi_n)| \leq \tilde{\lambda} ; \quad (2.15)$$

2) существует функция распределения $\varpi(\xi_1, \dots, \xi_r) \geq 0$ такая,

что

$$\int \prod_{n=1}^r d\xi_n \varpi(\xi_1, \dots, \xi_r) \leq K. \quad (2.16)$$

Тогда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \{ \langle f_N[\bar{H}_0(\{\xi_n\})] \rangle_\xi - \langle f_N[H_D(\{\xi_n\})] \rangle_\xi \} = 0, \quad (2.17)$$

где

$$\langle f_N[H(\{\xi_n\})] \rangle_\xi \equiv -\frac{\beta^{-1}}{N} \ln \left\{ \int \prod_{n=1}^r d\xi_n \text{Tr} \exp[-\beta H(\{\xi_n\})] \times \varpi(\xi_1, \dots, \xi_r) \right\}; \quad H(\{\xi_n\}) \equiv H(\{\lambda_{kj}(\{\xi_n\})\}). \quad (2.18)$$

Таким образом, проблема исследования системы с гамильтонианом $H_D(\{\xi_n\})$ сводится к более простой задаче с термодинамическим эквивалентным гамильтонианом $H_0(\{\bar{\eta}_k(\{\xi_n\}), \bar{\eta}_k^*(\{\xi_n\})\}, \{\xi_n\}) \equiv \bar{H}_0(\{\xi_n\})$, где $\{\bar{\eta}_k(\{\xi_n\})\}_{k=1}^L$ - решения уравнения (2.6) для каждого фиксированного набора переменных $\{\xi_n\}_{n=1}^r$. Дальнейший прогресс в исследовании системы с гамильтонианом

$H_D(\{\xi_n\})$, содержащем флуктуирующие параметры $\{\xi_n\}_{n=1}^r$, связан с уточнением вида функции распределения $\varpi(\xi_1, \dots, \xi_r)$. Физически интересный случай реализуется, когда дополнительные переменные

$\{\xi_n\}_{n=1}^r$ соответствуют амплитудам классических колебаний, которые совершают рассматриваемые нами двухуровневые атомы, если их поместить в узлы гармонической решетки, гамильтониан которой имеет вид:

$$H_{ph} = \sum_{j=1}^N \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \Phi_{ij}^{\alpha\beta} u_i^\alpha u_j^\beta. \quad (2.19)$$

Здесь $\{\Phi_{ij}^{\alpha\beta}\}$ - элементы матрицы силовых постоянных решетки ($\alpha, \beta = x, y, z$), а $u_j^\alpha = R_j^\alpha - l_j^\alpha$ - смещение j -го атома массы m из положения равновесия $l_j^\alpha \equiv \langle R_j^\alpha \rangle_{H_{ph}}$. Отклонения атомов из $\{l_j^\alpha\}$ приводят к изменению величин констант связи в гамильтониане (2.3).

Последнее приводит к сильному взаимодействию между атомной подсистемой и некоторым конечным числом классических фоновых мод $\{\xi_n\}$. Они соответствуют определенным волновым векторам $\{q_n\}$ и поляризациям $\{e^\alpha(q_n, s_n)\}$ где $\{s_n\}$ индексы соответствующих колебательных ветвей ^{x/}:

$$u_j^\alpha = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q,s} e^\alpha(q, s) u(q, s) \exp(iq l_j); \quad (2.20)$$

$$\xi_n \equiv N^{-1/2} |u(q_n, s_n)| \quad (n=1, 2, \dots, r).$$

Функция распределения для флуктуирующих параметров $\{\xi_n\}_{n=1}^r$ в этом случае имеет вид (ср. (2.16)):

$$\varpi_N(\xi_1, \dots, \xi_r) = \exp \left\{ -\beta N \sum_{n=1}^r \frac{\Omega_{q_n, s_n}^2}{2} \xi_n^2 \right\}, \quad (2.21)$$

где $\{\Omega_{q_n, s_n} \geq 0\}_{n=1}^r$ - частоты, соответствующие модам $\{u(q_n, s_n)\}_{n=1}^r$.

Теорема 2.1. Пусть $H_D(\{\xi_n\})$ - семейство гамильтонианов (2.3), зависящих от конечного числа флуктуирующих параметров $\{\xi_n\}_{n=1}^r$ через константы связи $\{\lambda_{kj}(\{\xi_n\})\}$, которые удовлетворяют ус-

^{x/} См. работу /2/ и ниже раздел 3.

ловию (2.15), а $\{\mathcal{D}_N(\xi_1, \dots, \xi_r | h)\}$ - последовательность функций распределения, порождаемая $h = h(\xi_1, \dots, \xi_r)$:

$$\mathcal{D}_N(\xi_1, \dots, \xi_r | h) = \exp[-\beta N h(\xi_1, \dots, \xi_r)] . \quad (2.22)$$

Если функции (2.22) удовлетворяют условию (2.16) равномерно по N , тогда:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ f_N[\bar{H}_0(\{\bar{\xi}_n\}) + h(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r) - \langle f_N[H_D(\{\xi_n\})] \rangle_{\xi} \right\} = 0, \quad (2.23)$$

здесь $\{\bar{\xi}_n\}_{n=1}^r$ является решением уравнения:

$$\begin{aligned} \text{abs min}_{\{\xi_n\}} \{ f_N[\bar{H}_0(\{\xi_n\}) + h(\xi_1, \dots, \xi_r) \} \\ = f_N[\bar{H}_0(\{\bar{\xi}_n\}) + h(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r) . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Доказательство. Пусть $\{\bar{\xi}_n\}_{n=1}^r$ - решение уравнения (2.24); мы введем

$$\begin{aligned} \Delta_N^{(1)} &= \langle f_N[\bar{H}_0(\{\xi_n\})] \rangle_{\xi} - \langle f_N[H_D(\{\xi_n\})] \rangle_{\xi} ; \\ \Delta_N^{(2)} &= f_N[\bar{H}_0(\{\bar{\xi}_n\}) + h(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r) - \langle f_N[\bar{H}_0(\{\xi_n\})] \rangle_{\xi} . \end{aligned}$$

Тогда (2.23) следует из

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N^{(1)} = 0 ; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N^{(2)} = 0 . \quad (2.25)$$

Первый предел является немедленным следствием свойств (2.15) и (2.16) (см. Следствие 2.1). Чтобы доказать второй предел в (2.25), рассмотрим определение величины $\langle f_N[\bar{H}_0(\{\xi_n\})] \rangle_{\xi}$ (см. (2.18)):

$$I_N = \int \prod_{n=1}^r d\xi_n \text{Tr} \exp[-\beta \bar{H}_0(\{\xi_n\})] \exp[-\beta N h(\xi_1, \dots, \xi_r)] . \quad (2.26)$$

Если принять во внимание (2.15), тогда интеграл (2.26) можно оценить при $N \rightarrow \infty$ методом перевала (см., например, /13/):

$$I_N = \exp \left\{ -\beta N f_N[\bar{H}_0(\{\bar{\xi}_n\})] \right\} \exp[-\beta N h(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_r)] \times \left(\frac{\pi}{N} \right)^{\frac{1}{2}} (C_0 + O(N^{-s}))^{\chi} . \quad (2.27)$$

Здесь $\{\bar{\xi}_n\}_{n=1}^r$ - решение уравнения (2.24). Следовательно, при

$$|\Delta_N^{(2)}| = O\left(\frac{\ln N}{N}\right) .$$

Следствие 2.2. Гамильтониан модели Ликке, содержащий конечное число классических фононных мод в качестве флуктуирующих параметров:

$$\mathcal{H} = H_D(\{\xi_n\}) + H_{ph} , \quad (2.28)$$

термодинамически эквивалентен аппроксимирующему гамильтониану

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \bar{H}_0(\{\bar{\xi}_n\}) + N \sum_{n=1}^r \frac{\Omega_{q_n, s_n}^2}{2} \bar{\xi}_n^2 + H'_{ph} ; \\ H'_{ph} &= H_{ph} - N \sum_{n=1}^r \frac{1}{2} \Omega_{q_n, s_n}^2 \bar{\xi}_n^2 , \end{aligned} \quad (2.29)$$

с $\{\bar{\xi}_n\}_{n=1}^r$, удовлетворяющим уравнению (2.24). Здесь функция распределения $\mathcal{D}_N(\xi_1, \dots, \xi_r | h)$ порождается $h = h(\xi_1, \dots, \xi_r)$, соответствующей упругой части гамильтониана решетки с конечным числом мод:

$$h(\xi_1, \dots, \xi_r) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^r \Omega_{q_n, s_n}^2 \xi_n^2 .$$

3. Сжимаемая модель Ликке

Рассмотрим стоячую синусоидальную электромагнитную волну с волновым вектором \mathbf{k} , коллинеарным оси OX с заданной фазой φ в резонаторе Λ . Рассматриваемая нами модель является сжимаемым гармоническим кристаллом (в узлах которого находятся

^{X/} Показатель s у N^{-s} соответствует C_{2s} - первому ненулевому коэффициенту разложения, следующему за C_0 .

двухуровневые атомы), помещенным в макроскопический прямоугольный резонатор, одна из осей которого параллельна OX . Гамильтониан такой системы является простейшим вариантом гамильтониана (2.3), флуктуирующие параметры которого соответствуют колебательным степеням свободы.

Чтобы избежать усложнений, не влияющих на ход дальнейших рассуждений, мы рассмотрим гамильтониан с одной фотонной модой, — обобщение на конечное число мод не представляет труда ^{16/}. Последовательность констант взаимодействия (2.15), (2.20) в этом случае определяется следующим хорошо известным выражением ^{17/}:

$$\lambda_{kj}(\{\xi_n\}) = \lambda_j(\{\xi_n\}) = \lambda \sin(kR_j + \varphi), \quad (3.1)$$

или ($|k|=k$)

$$\lambda_j(\{\xi_n\}) = \lambda \sin(kaj + 2k \sum_{n=1}^r \cos(q_n \ell_j) \xi_n + \varphi). \quad (3.2)$$

Здесь a — постоянная решетки в направлении OX , а $\{q_n\}_{n=1}^r$ соответствует продольным модам $\{s_n\} = \ell$ с векторами поляризации $\{e(q_n, \ell)\}$, параллельными OX . В нашей работе ^{12/} были рассмотрены только два предельных случая: $\varphi=0, \varphi=\pi/2$ для $|k|=|q|=Q=\pi/a$, здесь мы рассмотрим обобщение на случаи:

- 1) одной фоновой моды и произвольного φ ;
- 2) двух фоновых мод и $\varphi=0$.

Согласно Теореме 2.1, доказанной в предыдущем разделе, для выяснения термодинамических свойств сжимаемой модели Дикке необходимо вычислить ($k=1$) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{abs min}_{\eta, \eta^*, \{\xi_n\}} \{f_N[H_0(\eta, \eta^*, \{\xi_n\})] + h(\xi_1, \dots, \xi_r)\}. \quad (3.3)$$

Здесь $Nh(\xi_1, \dots, \xi_r)$ — потенциальная энергия сжимаемой гармонической решетки, соответствующая конечному числу мод $\{q_n\}_{n=1}^r$ (см. (2.21)).

^{17/} О физических соображениях по поводу формы $\lambda_j(\{\xi_n\})$ см работы ^{12, 4/}.

Решения задачи на абсолютный минимум (3.3) мы будем искать среди решений следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} f_N[H_0(\eta, \eta^*, \{\xi_n\})] &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta^*} f_N[H_0(\eta, \eta^*, \{\xi_n\})] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \xi_n} \{f_N[H_0(\eta, \eta^*, \{\xi_n\})] + h(\xi_1, \dots, \xi_r)\} &= 0, \quad (n=1, 2, \dots, r), \end{aligned} \quad (3.4)$$

причем $\tilde{f}_N[H_0(\eta, \eta^*, \{\xi_n\})] = f_N[H_0(\eta, \eta^*, \{\xi_n\})] + h(\xi_1, \dots, \xi_r)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_N[H_0(\eta, \eta^*, \{\xi_n\})] &= -\frac{\beta^{-1}}{N} \sum_{j=1}^N \ln 2ch \frac{\beta E_j}{2} + \frac{|\eta|^2}{\omega_Q} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^r \Omega_{q_n, \ell}^2 \xi_n^2; \quad E_j = \sqrt{\epsilon^2 + 4|\eta|^2 \frac{\lambda_j^2}{\omega_Q^2}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, в термодинамическом пределе (3.4) и (3.5) дают нам точное решение для сжимаемой модели Дикке (2.3), (3.2), у которой колебательные степени свободы соответствуют флуктуирующим параметрам (2.21).

4. Термодинамические свойства модели для произвольных φ .

В этом разделе мы вначале обсудим свойства модели в приближении одной фоновой моды $|q|=Q$, когда фаза электромагнитной волны φ изменяется в области $[0, \pi/2]$. В этом случае константа связи λ_j имеет два различных значения в зависимости от номера узла решетки j (3.2):

$$\lambda_{1,2} = \lambda \sin(2Q\xi \mp \varphi). \quad (4.1)$$

Следуя методу, предложенному в разделах 2 и 3, минимизируем функцию (3.5), тогда соответствующие уравнения (3.4) принимают вид:

$$|\eta| = \frac{1}{2\omega_Q} \left\{ \frac{\text{th} \frac{\beta E_1}{2}}{E_1} |\lambda_1|^2 + \frac{\text{th} \frac{\beta E_2}{2}}{E_2} |\lambda_2|^2 \right\} |\eta|;$$

$$\Omega_a^2 \xi^2 = \frac{2Q\lambda}{\omega_a} \left\{ \frac{th \frac{\beta E_1}{2}}{E_1} |\lambda_1| \cos(2Q\xi - \varphi) + \frac{th \frac{\beta E_2}{2}}{E_2} |\lambda_2| \cos(2Q\xi + \varphi) \right\} |\eta|^2. \quad (4.2)$$

Мы не можем решить эту систему аналитически для температуры $\theta = \beta^{-1} \neq 0$. Поэтому в дальнейшем будем полагать $\theta = 0$ и $\epsilon = 0$.

Теперь нетрудно видеть, что уравнения (4.2) имеют два типа решений: тривиальное $\xi' = 0$ и нетривиальное $\xi'' \neq 0$, которое находится в области $(\varphi/2Q, (\pi - \varphi)/2Q)$, см. рис. 1. Заметим также, что решение ξ'' уменьшается с возрастанием фазы φ , и при φ больше некоторого $\varphi^* \leq \pi/4$ нетривиальные решения ξ'' отсутствуют (см. рис. 2). Решениям $\xi' = 0$ и $\xi'' \neq 0$ соответствуют следующие решения для $|\eta|$ (см. рис. 3).

$$\begin{aligned} |\eta'| &= \frac{\lambda}{2} \sin \varphi; \\ |\eta''| &= \frac{\lambda}{2} \sin(2Q\xi'') \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При некотором значении фазы $\varphi = \varphi'$ эти решения становятся равными по величине. Теперь необходимо решить вопрос о том, какое из двух решений $\{|\eta'|, \xi'\}$ или $\{|\eta''|, \xi''\}$ "устойчиво", т.е. которое из них является решением проблемы отыскания абсолютного минимума (3.3): $\{|\eta|, \xi\}$. Сравнивая функцию $\tilde{f}_N [N_0(|\eta|(\xi), \xi)]$ в точках $\{|\eta'|, \xi'\}$ и $\{|\eta''|, \xi''\}$, получаем условия, обеспечивающие неравенство нулю величины $\bar{\xi}$:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi \leq \sin^2 2Q\xi'' - \frac{2\Omega_a^2 \omega_a}{\lambda^2} \frac{(\xi'')^2}{\cos^2 \varphi}. \quad (4.4)$$

Такая ситуация имеет место тогда, когда фаза $\varphi < \varphi^{**}$, величина $\varphi^{**} = \varphi$ соответствует равенству в (4.4). Совпадение $|\eta'|$ и $|\eta''|$ в точке $\varphi = \varphi'$ приводит к условию $\operatorname{tg} \varphi' = \sin 2Q\xi''$, следовательно, скачек решения $\bar{\xi} = \xi'$ в тривиальное $\bar{\xi} = \xi' = 0$ про-

исходит в точке φ^{**} , причем $\varphi^{**} \leq \varphi' \leq \varphi^* \leq \pi/4$ (см. рис. 3). Случай $\varphi^{**} = \pi/4$ реализуется в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ или $\Omega_a^2 \rightarrow 0$, если же $\lambda = 0$ или $\Omega_a^2 \rightarrow \infty$, - никакого структурного фазового перехода в системе не происходит.

Из рис. 3 видно, что при нулевой температуре $\theta = 0$ каждому из $\xi'(\varphi)$, $\xi''(\varphi)$ соответствуют ненулевые значения параметра $|\eta|^{X/}$: $|\eta'(\varphi)| \neq 0$, $|\eta''(\varphi)| \neq 0$. Следовательно, для $\varphi < \varphi^{**}$ оба ξ - решения ("устойчивое" $\bar{\xi} = \xi''$ и тривиальное $\bar{\xi}' = 0$) приводят к ненулевой величине параметра $|\eta|$. Эта картина для $\theta = 0$ однозначно указывает на то, что при $\theta \neq 0$ термодинамическое поведение нашей модели будет соответствовать фазовому переходу первого рода. С другой стороны, для $\varphi : \varphi^{**} < \varphi \leq \pi/4$, когда тривиальное решение $\bar{\xi}' = 0$ является устойчивым, может происходить лишь фазовый переход второго рода в сверхизлучающее состояние без конденсации фононной моды /2/.

Различные значения величины φ^{**} можно получить, решая уравнения (4.3), (4.4) для различных параметров модели $\{\Omega_a, \omega_a, \lambda\}$. Результаты, полученные выше для $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, легко перенести на случай, когда фаза φ не принадлежит $[0, \pi/2]$. С физической точки зрения это очевидно, если принять во внимание периодичность функции f_N (4.2) по отношению к изменению φ .

5. Модель с двумя фононными модами

В работе /2/ для упругих степеней свободы мы ограничились приближением одной моды: $|k| = |q| = \pi/a$. Основанием для такого приближения служит сильное взаимодействие между фотонами и коле-

^{X/} При $\varphi = 0$ $|\eta'(\varphi=0)| = 0$, однако в этом случае, как известно из /2/, термодинамическое поведение системы соответствует фазовому переходу первого рода. Параметр $|\eta|$ определяет плотность конденсата фотонов: $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \langle B_q^+ B_q \rangle_{N_D} = v \frac{|\eta|^2}{\omega_a}$ (см. /1, 6/).

баниями, если их волновые вектора коллинеарны и сравнимы. Кроме этой, существуют и другие колебательные моды $|q_n| = \pi/n a$ ($n=2,3,\dots,N$), которые также резонансно взаимодействуют с фотонами. Каждая дополнительная мода, включаемая в модель, увеличивает число $\{\lambda_{kj}\}$ -подсистем по отношению к параметру взаимодействия (см. (3.2) и (4.1)).

Чтобы исследовать изменение термодинамических свойств нашей модели при замене одной упругой моды на их конечное число (см. разделы 2 и 3), мы рассмотрим случай двух мод с $|k|=|Q_1|=\pi/a$ и $|Q_2|=\pi/2a$. Это приводит к трем подсистемам (см. (3.2)) с

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda \sin(2Q_1\xi_1 - \varphi) ; \\ \lambda_2 &= \lambda \sin(2Q_1\xi_1 + 2Q_1\xi_2 + \varphi) ; \\ \lambda_3 &= \lambda \sin(2Q_1\xi_1 - 2Q_1\xi_2 + \varphi) . \end{aligned} \quad (5.1)$$

Принцип мини-макса для функции

$$\begin{aligned} \tilde{f}_N [H_0(\eta_1, \xi_1, \xi_2)] &= -\frac{\beta}{2} [\ln 2 \operatorname{ch} \beta E_1 + \frac{1}{2} \ln 2 \operatorname{ch} \beta E_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \ln 2 \operatorname{ch} \beta E_3] + \frac{|\eta|^2}{\omega_{Q_1}} + \frac{1}{2} \Omega_{Q_1}^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \Omega_{Q_2}^2 \xi_2^2 , \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$E_{1,2,3} = \sqrt{\epsilon^2 + 4|\eta|^2 \frac{|\lambda_{1,2,3}|^2}{\omega_{Q_1}^2}}$$

приводит к уравнениям для $|\eta|, \xi_1, \xi_2$, которые соответствуют $\operatorname{abs} \min_{|\eta|, \xi_1, \xi_2} \tilde{f}_N [H_0(|\eta|, \xi_1, \xi_2)]$ (см. (3.4)). Чтобы упростить анализ этой системы уравнений, мы ограничимся случаем нулевой температуры и $\epsilon=0, \varphi=0$.

На рис. 4 изображена периодическая, по ξ_1, ξ_2 , часть функции $\tilde{f}_N [H_0(|\eta|(\xi_1, \xi_2), \xi_1, \xi_2)]$, здесь $|\eta|(\xi_1, \xi_2)$ определяется первыми двумя уравнениями (3.4). Периодическая часть функции

$\tilde{f}_N [H_0(\xi_1, \xi_2)]$ имеет на плоскости (ξ_1, ξ_2) две оси симметрии:

$$A = |\xi_1 = \pi/4Q_1, \xi_2) \quad \text{и} \quad B = |\xi_1, \xi_2 = \pi/4Q_1).$$

Свободная энергия на одну частицу (5.2) является суммой монотонной части $\frac{1}{2}(\Omega_{Q_1}^2 \xi_1^2 + \Omega_{Q_2}^2 \xi_2^2)$ и периодической, поэтому множество точек на плоскости (ξ_1, ξ_2) , в которых достигается $\operatorname{abs} \min_{(\xi_1, \xi_2)} \tilde{f}_N [H_0(\xi_1, \xi_2)]$, локализовано в области $[\xi_1 \leq \pi/4Q_1, \xi_2 \leq \pi/4Q_1]$ (см. рис. 5). В этой области уравнения (3.4) принимают вид:

$$|\eta| = \begin{cases} \lambda/4 \sin(2Q_1\xi_1) [1 + \cos(2Q_1\xi_1)] , & \xi_1 \geq \xi_2 ; \\ \lambda/4 [\sin(2Q_1\xi_1) + \sin(2Q_1\xi_2) \cos(2Q_1\xi_1)] , & \xi_1 \leq \xi_2 ; \end{cases}$$

$$\frac{\omega_{Q_1}}{\lambda Q_1} \{ \Omega_{Q_1}^2 \xi_1^2 + \Omega_{Q_2}^2 \xi_2^2 \} = |\eta| \{ \cos(2Q_1\xi_1) + \cos(2Q_1(\xi_1 + \xi_2)) \} ,$$

$$\xi_2 \leq \pi/2Q_1 - 2\xi_1 ; \quad (5.3)$$

$$\frac{\omega_{Q_1} \Omega_{Q_1}^2}{\lambda Q_1} \xi_2^2 = \begin{cases} |\eta| \cos(2Q_1\xi_1) \cos(2Q_1\xi_2) , & \xi_1 \leq \xi_2 ; \\ -|\eta| \sin(2Q_1\xi_1) \sin(2Q_1\xi_2) , & \xi_1 > \xi_2 . \end{cases}$$

На плоскости (ξ_1, ξ_2) существуют области, где нет ни одного решения системы (5.3), например: $\xi_1 > \xi_2 > 0$ (см. рис. 5). Однако решения могут находиться на границе этой области: $(\xi_1 = \xi_2 \text{ или } \xi_2 = 0)$.

Вопрос, который необходимо решить теперь: где в допустимой области $[\xi_1 \leq \pi/4Q_1, \xi_2 \leq \pi/4Q_1]$ лежит $\operatorname{abs} \min_{(\xi_1, \xi_2)} \tilde{f}_N [H_0(\xi_1, \xi_2)]$? Из (5.2) и рис. 4 видно, что положения экстремумов функции $\tilde{f}_N [H_0(\xi_1, \xi_2)]$ зависят от величины частот $\Omega_{Q_1}, \Omega_{Q_2}$.

Чтобы выяснить условия конденсации одной или двух фононных мод, представим функцию $\tilde{f}_N [H_0(\xi_1, \xi_2)]$ при $\epsilon=0, \varphi=0, \theta=0$ (5.2) в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \rho \cos \psi \\ \xi_2 &= \rho \sin \psi \end{aligned} \quad (0 \leq \psi \leq \pi/2 ; 0 \leq \rho \leq \pi/4Q_1) ; \quad (5.4)$$

тогда получим

$$\tilde{f}_N^{(1)} = \frac{1}{2} \Omega_{a_1}^2 \rho^2 \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \Omega_{a_2}^2 \rho^2 \sin^2 \psi - \frac{\lambda^2}{16 \omega_{a_1}} \sin^2(2Q_1 \rho \cos \psi) [1 + \cos(2Q_1 \rho \sin \psi)]^2, \quad \psi \leq \pi/4;$$

$$\tilde{f}_N^{(2)} = \frac{1}{2} \Omega_{a_1}^2 \rho^2 \cos^2 \psi + \frac{1}{2} \Omega_{a_2}^2 \rho^2 \sin^2 \psi - \frac{\lambda^2}{16 \omega_{a_1}} [\sin(2Q_1 \rho \cos \psi) + \cos(2Q_1 \rho \cos \psi) \sin(2Q_1 \rho \sin \psi)]^2, \quad \psi \geq \pi/4.$$

В таблице приведены соответствующие $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ для некоторых предельных значений $\Omega_{a_1}^2$ и $\Omega_{a_2}^2$ (см. также рис. 6):

$\Omega_{a_1}^2$	$\Omega_{a_2}^2$	$\bar{\xi}_1$	$\bar{\xi}_2$	Замечания
а. $\geq \frac{2\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}$	$\geq \frac{3}{2} \frac{\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}$	0	0	тривиальное решение - нет фазового перехода
б. $< \frac{2\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}$	$\rightarrow \infty$	$\neq 0$	0	$\sin \psi = 0$
в. $\rightarrow \infty$	$< \frac{3}{2} \frac{\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}$	0	$\neq 0$	$\cos \psi = 0$
г. 0	$[0, \infty)$	$\pi/4 Q_1$	0	
д. $\frac{\alpha}{2} \frac{\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	для $\alpha \geq 6\sqrt{3}/\pi$ (это значение не является нижней границей для α)
е. $\frac{\alpha}{2} \frac{\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}$	0	$\neq 0$	0	для $\alpha \leq \bar{\alpha} < 8/\pi$

В то время, как в случаях а.-г., результаты для $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ являются прямым следствием (5.5), для исследования случаев д. и е. поступим следующим образом:

1) В случае д. покажем, что при $\alpha \geq 6\sqrt{3}/\pi$ $\tilde{f}_N^{(2)}|_{\psi=\pi/2}$ имеет более глубокий минимум, чем $\tilde{f}_N^{(1)}|_{\psi=0}$, и что $\frac{d}{d\psi} \tilde{f}_N^{(2)}|_{\psi=\pi/2}$ положительна, т.е. $\tilde{f}_N^{(2)}$ убывает при $\psi \leq \pi/2$. Действительно:

$$\min_{(\rho)} \tilde{f}_N^{(2)} \left\{ \Omega_{a_1}^2 = \frac{\alpha}{2} \frac{\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}, \Omega_{a_2}^2 = 0 \right\} \Big|_{\psi=\pi/2} = -\frac{\lambda^2}{16 \omega_{a_1}};$$

$$\min_{(\rho)} \tilde{f}_N^{(1)} \left\{ \Omega_{a_1}^2 = \frac{\alpha}{2} \frac{\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}, \Omega_{a_2}^2 = 0 \right\} \Big|_{\psi=0} = -\frac{\lambda^2}{\omega_{a_1}} \sin^2(2Q_1 \rho^*) \times \left[\frac{1}{4} - \frac{\cos^2(2Q_1 \rho^*)}{\alpha} \right] > -\frac{\lambda^2}{16 \omega_{a_1}} [2 \sin(2Q_1 \rho^*)]^2, \quad (5.6)$$

где

$$\alpha Q_1 \rho^* = \sin(4Q_1 \rho^*). \quad (5.7)$$

Здесь ρ^* соответствует минимуму $\tilde{f}_N^{(1)}$ при $\psi=0$. Из (5.7)

следует, что для $\alpha > 6\sqrt{3}/\pi$ решение $Q_1 \rho^*$ лежит в области $0 \leq Q_1 \rho^* < \pi/12$. В этой области $\sin(2Q_1 \rho^*) < \frac{1}{2}$, следовательно,

$\min_{(\rho)} \tilde{f}_N^{(2)}|_{\psi=\pi/2}$ лежит ниже $\min_{(\rho)} \tilde{f}_N^{(1)}|_{\psi=0}$. Поскольку $\frac{d}{d\psi} \tilde{f}_N^{(2)}|_{\psi=\pi/2} = \frac{\lambda^2 Q_1}{4 \omega_{a_1}} \rho \sin(2Q_1 \rho) > 0$ при $\rho < \pi/2 Q_1$, то $\text{abs min}_{(\rho, \psi)} \tilde{f}_N$ лежит в области $\psi < \pi/2$, т.е. $\bar{\xi}_1 \neq 0, \bar{\xi}_2 \neq 0$.

2) В случае е. необходимо вычислить нижнюю границу функции $\tilde{f}_N[\Omega_{a_1}^2 = \frac{\alpha}{2} \frac{\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}, \Omega_{a_2}^2 = 0]$. Для $\alpha \geq 0$ получаем

$$\min_{(\rho, \psi)} \tilde{f}_N^{(2)} = -\frac{\lambda^2}{8 \omega_{a_1}}. \quad (5.8)$$

Пусть $\alpha = \bar{\alpha}$ - такое значение параметра α , что $\sin^2(2Q_1 \rho^*) - \bar{\alpha}(Q_1 \rho^*)^2 = 1/2$, тогда для $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$

$$\min_{(\rho)} \tilde{f}_N^{(1)} \left[\Omega_{a_1}^2 = \frac{\alpha}{2} \frac{\lambda^2 Q_1^2}{\omega_{a_1}}, \Omega_{a_2}^2 = 0 \right] \Big|_{\psi=0} < -\frac{\lambda^2}{8 \omega_{a_1}}, \quad (5.9)$$

следовательно, $\bar{\xi}_1 \neq 0, \bar{\xi}_2 = 0$. Заметим, что $\bar{\alpha} < 8/\pi$.

В таблице перечислены лишь те случаи, для которых нам известно поведение $\{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2\}$. Однако даже для этих случаев для параметров мы знаем лишь либо верхние, либо нижние "квазиграницы" (см. таблицу и рис. 6). Для всех других значений $\Omega_{a_1}^2, \Omega_{a_2}^2$ имеет место один из промежуточных случаев.

Для ненулевой температуры проанализировать поведение $\tilde{f}_N[H_0(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)]$ трудно (см. (3.4)). Однако нам известно поведение $\tilde{f}_N[H_0(|\bar{\eta}_1|, \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2=0)]$ и $\tilde{f}_N[H_0(|\bar{\eta}_1|, \bar{\xi}_1=0, \bar{\xi}_2)]$ при $\theta \neq 0$ и $\epsilon \neq 0$ (см. ^{1/2} и рис. 7). Если происходит конденсация только

одной моды, то мы приходим к уже известному случаю фазового перехода первого рода в сверхизлучающее состояние $|\bar{\eta}| \neq 0$, который сопровождается структурным превращением $\bar{\xi} \neq 0$ ^{/2/}. Формально это свойство системы обязано тому, что функции $\tilde{f}_N[\bar{H}_0(\xi_1, \xi_2=0)]$ и $\tilde{f}_N[\bar{H}_0(\xi_1=0, \xi_2)]$ имеют локальный максимум, разделяющий два локальных минимума, один из которых абсолютный (см. ^{/2/} и рис. 7). Из непрерывности $\tilde{f}_0[\bar{H}_0(\xi_1, \xi_2)]$ следует, что для $\bar{\xi}_2 \neq 0$ и $\bar{\xi}_1 \ll \bar{\xi}_2$ такой локальный минимум по-прежнему существует (рис. 7), что указывает на фазовый переход первого рода. Из этого, однако, не следует, что то же самое будет и для $\bar{\xi}_1 \neq 0$, сравнимого с $\bar{\xi}_2$, поскольку для $\bar{\xi}_1 \sim \bar{\xi}_2$ локальный максимум может исчезнуть, так что мы приходим к фазовому переходу второго рода. Тем не менее веские аргументы, приведенные выше, указывают на возможность одновременной конденсации двух фоновых мод, которая сопровождается фазовым переходом первого рода в сверхизлучающее состояние $|\bar{\eta}| \neq 0$ при $\theta \neq 0$.

6. Заключение

В настоящей работе

1) мы доказали основную теорему (раздел 2), которая обобщает метод ТЭГ ^{/6,7/} и дает нам новый класс точно решаемых моделей, описывающих взаимодействие материи с излучением, которые включают в себя флуктуирующие параметры;

2) мы исследовали модель такого типа с упругими степенями свободы, которая допускает произвольное значение фазы φ электромагнитной волны в резонаторе Λ и две классические фоновые моды.

Показано, что метод, использованный в работе ^{/2/} для случая одной фоновой моды и $\varphi=0$ или $\varphi=\pi/2$, пригоден и для этой

обобщенной модели. Теперь, однако, из-за сложности системы уравнений у нас нет больше детальной исчерпывающей картины термодинамического поведения такой модели. Тем не менее, анализ для случая нулевой температуры дает информацию об основных термодинамических свойствах нашей системы.

Авторы благодарят В.Б.Приезжева за полезные обсуждения.

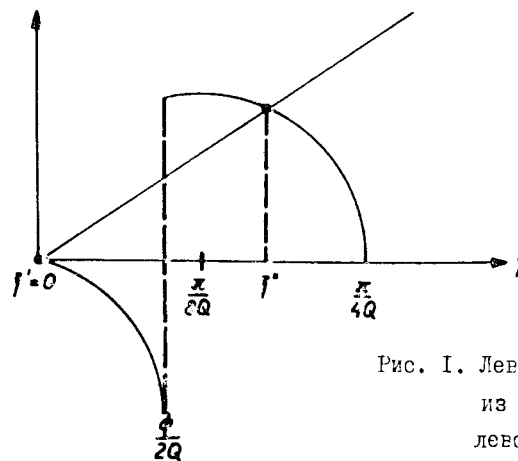


Рис. 1. Левая и правая части второго из уравнений (4.3) при нулевой температуре и $C=0$, параметр $|\eta|$ исключен.

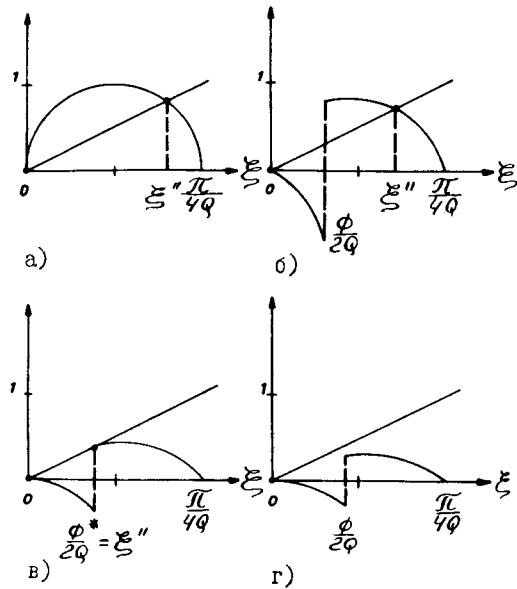


Рис. 2. Левая и правая части второго из уравнений (4.3) при нулевой температуре и $\epsilon = 0$ (параметр $|\eta|$ исключен) для некоторых значений фазы φ : а) $\varphi = 0$; б) $0 < \varphi < \varphi^*$; в) $\varphi = \varphi^*$; г) $\varphi > \varphi^*$.

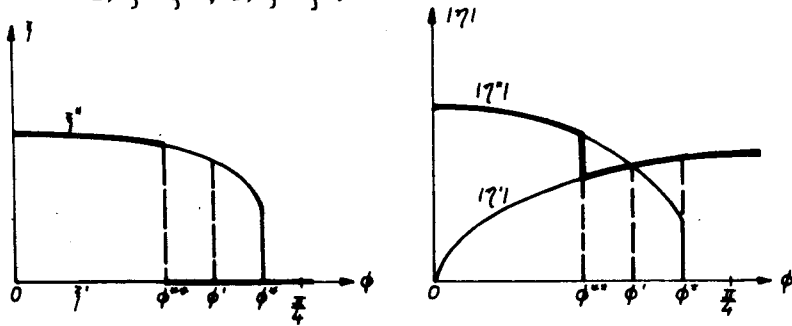


Рис. 3. Зависимость решений второго из уравнений (4.3) при нулевой температуре и $\epsilon = 0$, параметр $|\eta|$ исключен. Жирная линия соответствует $\text{abs} \min_{\xi} \tilde{f}_N[\bar{H}_0(\xi)]$.

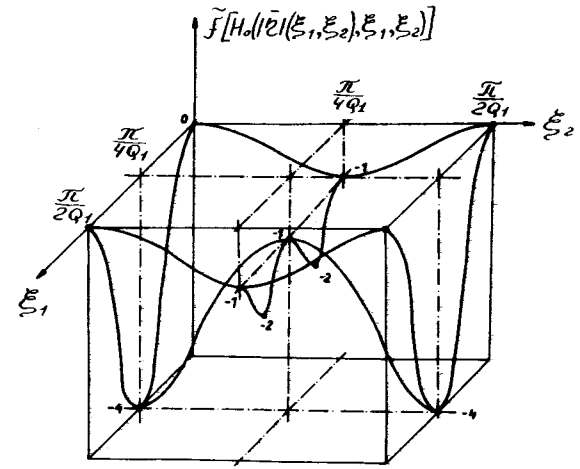


Рис. 4. Периодическая часть функции $\tilde{f}_N[H_0(|\eta|(\xi_1, \xi_2), \xi_1, \xi_2)]$; функция $|\eta|(\xi_1, \xi_2)$ взята из уравнения (5.3).

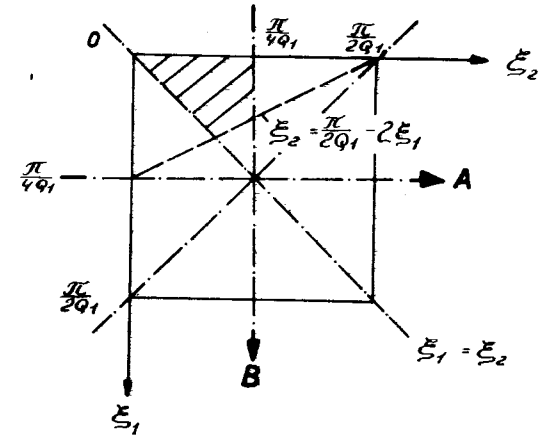


Рис. 5. Плоскость переменных (ξ_1, ξ_2) с осями А и В. Заштрихованная область соответствует возможным положениям $\text{abs} \min_{(\xi_1, \xi_2)} \tilde{f}_N[H_0(|\eta|(\xi_1, \xi_2), \xi_1, \xi_2)]$.

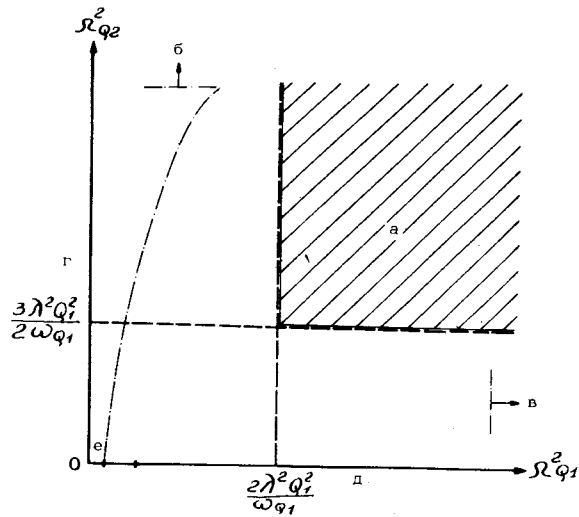


Рис. 6. Различные области изменения параметров $(\Omega_{Q_1}^2, \Omega_{Q_2}^2)$, соответствующие случаям а.-е., приведенным в таблице.

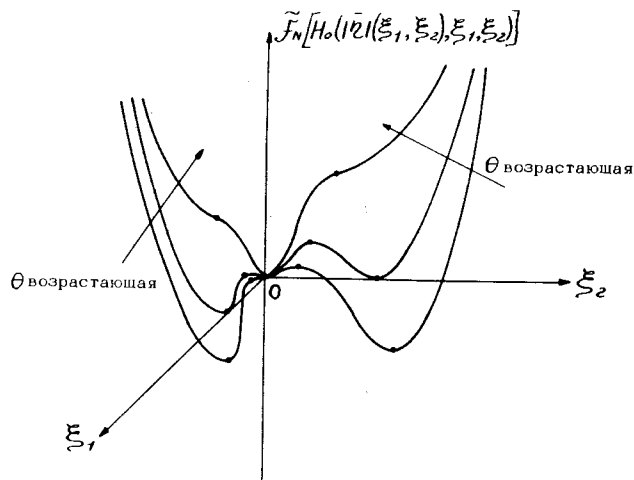


Рис. 7. Предельные случаи (плоскости $\xi_1=0, \xi_2=0$) температурного поведения функции $\tilde{f}_N[H_0(|\bar{\eta}|(\xi_1, \xi_2), \xi_1, \xi_2)]$.

Литература:

1. K.Hepp, E.H.Lieb. Ann. of Phys., 76, 360 (1973).
2. A.Klemm, V.A.Zagrebnev. Preprint JINR, E17-9600, Dubna, 1976 (to be published in Physica A).
3. K.Hepp, E.H.Lieb. Phys.Rev., A8, 2517 (1973).
4. F.T.Hioe. Phys.Rev., A8, 1440 (1973).
5. B.V.Thompson. Journ. of Phys., A8, 126 (1975).
6. И.Г.Бранков, В.А.Загребнов, Н.С.Тончев. Препринт ОИЯИ, P4-7735, Дубна, 1974; ТМФ, 22, 20 (1975).
7. V.A.Zagrebnev, J.G.Brancov, N.S.Tonchev. Preprint JINR, E4-8818, Dubna, 1975; ДАН СССР, 225, 71 (1975).
8. В.А.Загребнов, В.К.Федянин. ТМФ, 10, 127 (1972).
9. Y.Imry. Journ. of Phys., C8, 567 (1975); V.L.Ginzburg, A.Levanyuk. Phys.Lett., 47A, 345 (1974); A.Aharony, Y.Imry, Shang-keng Ma, Phys.Rev. B13, 466 (1976).
10. Н.М.Плакида, Г.Л.Маилян. Препринт ОИЯИ, P17-9853, P17-9856, Дубна, 1976.
11. K.S.Fisher. Journ. of Low Temp. Phys., 10, 655 (1973).
12. H.Naken. Handbuch der Physik XXV "c", Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, N.Y.1970.
13. М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. Методы теории функций комплексного переменного, М., Наука, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 ноября 1976 года.