СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

С32б
Е-732
1005/2-77
21/3-77

P17 - 10247

А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БОЗОННОГО ПОЛЯ С ВЕЩЕСТВОМ, СОСТОЯЩИМ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ПОДСИСТЕМ

1976

P17 - 10247

А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БОЗОННОГО ПОЛЯ С ВЕЩЕСТВОМ, СОСТОЯЩИМ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ПОДСИСТЕМ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Ермилов А.Н., Курбатов А.М. P17 - 10247

Взаимодействие бозонного поля с веществом, состоящим из нескольких подсистем

На основе метода Н.Н.Боголюбова (мл.) рассмотрено взаимодействие бозонного поля с веществом, состоящим из нескольких подсистем. Проведенное с помощью ϵ-процедуры исследование позволило строго установить и с единой точки зрения детально изучить широкий класс модельных гамильтонианов, допускающих точное в термодинамическом пределе решение. Этот класс обобщает ряд качественно различных моделей, представляющих большой интерес для физики конденсированного состояния.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Ermilov A.N., Kurbatov A.M. P17 - 10247

Interaction of Boson Field with Matter Consisting of Several Subsystems

Interaction of boson field with matter consisting of several subsystems is considered on the basis of N.N.Bogolubov (Jr) method. The investigation carried out with the aid of ϵ-procedure enables us to find out rigorously and, from the single point of view, to study the wide class of model Hamiltonians permitting exact in the thermodynamical limit solution. This class summarized a number of qualitatively different models of substantial interest for condence matter physics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

© 1976 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

I. ВВЕДЕНИЕ

Развитие модельного подхода в статистической физике, в рамках которого учитываются лишь наиболее существенные для исследуемой проблемы взаимодействия, было стимулировано невозможностью точного решения задачи многих взаимодействующих частиц. В то же время стремление наиболее точно и полно отразить свойства исследуемой реальной физической системы в модельной задаче приводит к значительному математическому усложнению последней. В результате чего в большинстве физически интересных задач с необходимостью применяются приближенные и качественные методы и, к сожалению, даже в этом случае нет уверенности в адекватности получаемых решений рассматриваемой модельной задаче.

Именно поэтому в современной статистической механике существенное внимание уделяется так называемым точно решаемым моделям и развитию методов строгого исследования статистических систем в целом. Это, в свою очередь, обуславливает использование в таком подходе мощных математических методов при изучении многочастичных систем. По-существу, в настоящее время сформировалась и интенсивно развивается новая область теоретической физики - математическая статистическая физика.

Одной из наиболее важных задач математической статистической физики является развитие методов, позволяющих отыскать точное решение модельных задач. Строгие результаты здесь важны не сами по себе, а как надежный фундамент для исследования более реалистических систем, вносящий существенный вклад в понимание сложных явлений, изучаемых статистической физикой.

В этом направлении значительный прогресс был достигнут в рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов /I/,/2/. Метод основан на математическом упрощении модельной задачи - замене исходного гамильтониана, нахождение решения для которого прямыми методами не представляется возможным, на некоторый специальным образом конструируемый так называемый аппроксимирующий гамильтониан с последующим доказательством термодинамической эквивалентности этих гамильтонианов. Под этим подразумевается доказательство равенства в термодинамическом пределе всех физических величин, необходимых для макроскопического описания статистических систем, отвечающих как исходному модельному, так и аппроксимирующему гамильтонианам.

Одним из достоинств метода является тот факт, что с его помощью могут быть изучены модельные системы, структура динамических переменных которых не конкретизируется. А именно, метод аппроксимирующих гамильтонианов позволяет строго установить и детально исследовать целые классы модельных задач, что представляет особый интерес ввиду того, что условия, требуемые при рассмотрении, являются достаточно общими и, следовательно, удается с единой точки зрения описывать качественно различные статистические системы.

В схеме метода изучены следующие классы модельных задач: класс точно решаемых моделей с отрицательным /I/ и положительным четырехфермионным /3/ взаимодействием, класс гамильтонианов с положительным взаимодействием с источниками /4/. Вопросу рассмотрения систем, в гамильтониан которых входят члены, содержащие произведения операторов фермиевского и бозевского типов, посвящена работа /5/. Метод, используемый для изучения таких систем, основан на обобщении мажорационной техники /I/, первоначально развитой для гамильтонианов, построенных на ограниченных операторах. Наконец, в работах /6/ был изучен класс модельных задач с перекрестным взаимодействием.

Однако исследование ряда физически интересных моделей, примеры которых приведены ниже, требует рассмотрения класса гамильтонианов, содержащих как взаимодействие вещества с бозонным по-

лем, так и перекрестное взаимодействие в веществе, что и является предметом настоящей работы. Изучение этих модельных систем производится на основе разработанной в /6/,/7/ схемы исследования, так называемой ε-процедуры. В нескольких словах ее можно описать следующим образом.

Для построения аппроксимирующего гамильтониана в исходный модельный гамильтониан вводятся дополнительные члены с положительным параметром включения ε, что дает возможность путем замены операторных переменных выделить члены с отрицательным и положительным взаимодействиями. Тем самым найден способ аппроксимации, позволяющий использовать основную теорему метода /I/ для получения оценок для разности свободных энергий. Для вычисления асимптотически точных значений термодинамических параметров системы исходного модельного гамильтониана следует перейти к пределу $\varepsilon \to +0$ в соответствующих выражениях для аппроксимирующего гамильтониана.

2. КЛАСС МОДЕЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ

Итак, будем рассматривать следующий класс модельных гамильтонианов:

$$\begin{aligned} H = {} & T - V\sum_{i=1}^{r} \gamma_i (A_i^+ B_i + B_i^+ A_i) - V \sum_{j=r+1}^{r+s} \gamma_j A_j^+ A_j \\ & + 2\sum_{i=1}^{r} \omega_i c_i^+ c_i + \sum_{j=r+1}^{r+s} \omega_j c_j^+ c_j \\ & + \sqrt{V} \sum_{i=1}^{r} [\lambda_i (c_i A_i^+ + c_i^+ A_i) + \varkappa_i (c_i B_i^+ + c_i^+ B_i) + \sqrt{V} \sum_{j=r+1}^{r+s} \lambda_j (c_j A_j^+ + c_j^+ A_j) \\ & + V \sum_{m=1}^{r+s} (\nu_m A_m^+ + \nu_m^+ A_m) + V \sum_{i=1}^{r} (\mu_i B_i^+ + \mu_i^+ B_i), \end{aligned} \tag{I}$$

где V есть объем, занимаемый веществом, $T = T^+$, A_m, B_i - операторы динамических наблюдаемых вещества, $\gamma_m > 0$ - константы взаимодействия, ν_m, μ_i - параметры включения источников, c_m^+ и c_m суть операторы рождения и уничтожения m-ой моды бозонного поля, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[c_m, c_{m'}^+]_- = \delta_{m,m'}, \; [c_m, c_{m'}] = 0, \; [c_m^+, c_{m'}^+] = 0, \tag{2}$$

$\omega_m > 0$ – числовые параметры, $\lambda_m, \varkappa_i > 0$ – константы взаимодействия вещества с бозонным полем.

Слагаемые первой строки в (I) образуют гамильтониан, описывающий вещество, члены во второй строке представляют свободное бозонное поле, третья – описывает взаимодействие вещества с бозонной подсистемой и, наконец, в четвертой строке находятся члены с источниками.

В класс (I) в качестве конкретных примеров входят следующие модельные системы:

I) Модель сегнетоэлектриков типа порядок-беспорядок для общего случая, когда в каждой ячейке ионных комплексов τ-типа находится более, чем один ион с-типа [8].

Для описания движения ионов с-типа в поле эффективного потенциала, имеющего вид ямы с двумя минимумами, используется квазиспиновый формализм. Так, состояние иона с-типа сорта α в потенциальной яме комплекса n описывается матрицами Паули $\sigma^z_{\alpha\ell}$. Гамильтониан, учитывающий взаимодействие с-ионов с длинноволновыми оптическими колебаниями решетки имеет вид [9]

$$H = \omega_0 c_0^+ c_0 - \frac{K}{\sqrt{2M\omega_0}} \frac{c_0^+ + c_0}{\sqrt{V}} \sum_\alpha \sum_n \sigma^z_{\alpha n} - \Omega \sum_\alpha \sum_n \sigma^x_{\alpha n} - \frac{I}{2V} \sum_{\alpha \neq \alpha'} \sum_{n,n'} \sigma^z_{\alpha n} \sigma^z_{\alpha' n'}. \qquad (3)$$

Здесь c_0^+ и c_0 – операторы рождения и уничтожения длинноволновых ($k=0$) фононов, M – приведенная масса ионного комплекса τ-типа, ω_0 – оптическая частота колебаний решетки в длинноволновом пределе $k \to 0$, Ω – частота туннелирования Де-Жена, $K, I > 0$ – константы взаимодействия. Настоящая модель учитывает лишь наиболее существенные дальнодействующие взаимодействия с-ионов между собой.

2) Двухкомпонентная модель Дикке [10] в теории сверхизлучения

$$H = \omega c^+ c + \sqrt{V}\left[\lambda_1 (c^+ \sigma_1^- + c\sigma_1^+) + \lambda_2 (c^+ \sigma_2^- + c \sigma_2^+)\right] + V(\nu_1 \sigma_1^z + \nu_2 \sigma_2^z) + V\gamma (1 + \sigma_1^z)(1 + \sigma_2^z), \qquad (4)$$

где $\sigma_\alpha^\pm = \frac{1}{V}\sum_n \sigma^\pm_{\alpha n}$, $\sigma^\pm_\alpha$ $(\alpha = 1,2)$ – операторы Паули, $\sigma^z_\alpha = \frac{1}{V}\sum_n \sigma^z_{\alpha n}$, c^+ и c – операторы рождения и уничтожения фотона частоты ω, λ, ν_α – вещественные параметры. Гамильтониан (4) служит для описания процессов в лазерах и мазерах с двумя рабочими веществами. Состояния двухуровневых молекул первого и второго сорта характеризуются соответственно матрицами Паули σ^z_{1n} и σ^z_{2n}. Взаимное влияние этих подсистем учтено в последнем члене, который представляет собой кулоновскую энергию взаимодействия возбужденных молекул [11].

3) Модель Вонсовского-Зинера для ферромагнетика с учетом электрон-фононного и спин-фононного взаимодействий

$$H = \sum_{k,\sigma} [e(k) - \mu] a^+_{k\sigma} a_{k\sigma} + \mathcal{J} \sum_k \sum_n \left[(a^+_{k+} a_{k+} - a^+_{k-} a_{k-}) S^z_n + a^+_{k+} a_{k-} S^-_n + a^+_{k-} a_{k+} S^+_n\right] + L \frac{c_0^+ + c_0}{\sqrt{V}} \sum_{k,\sigma} a^+_{k\sigma} a_{k\sigma} - \frac{K}{\sqrt{2M\omega_0}} \frac{c_0^+ + c_0}{\sqrt{V}} \sum_n S^z_n + \omega_0 c_0^+ c_0, \qquad (5)$$

где $a^+_{k\sigma}$, $a_{k\sigma}$ – операторы рождения и уничтожения электрона с импульсом, равным k, и проекцией спина на ось z, равной σ, $S_n^{(\alpha)}$ $(\alpha = x, y, z)$ – операторы проекции на ось z магнитного момента иона в узле n, $S^\pm_n = S^x_n \pm i S^y_n$, c_0^+, c_0 – операторы рождения и уничтожения длинноволновых фононов, ω_0 – оптическая частота колебаний решетки в длинноволновом пределе $k \to 0$, $\mathcal{J}$, L, K – константы взаимодействий, μ – химический потенциал.

4) Модель Гейзенберга для ферромагнетика с двумя взаимодействующими подрешетками, учитывающая спин-фононное взаимодействие

$$H = -\frac{I}{V} \sum_{n,n'} \vec{S}_{1,n} \vec{S}_{2,n'} + \frac{1}{\sqrt{V}} (c_0^+ + c_0) \left(\lambda_1 \sum_n \vec{S}_{1,n} + \lambda_2 \sum_{n'} \vec{S}_{2,n'}\right) + \omega_0 c_0^+ c_0, \qquad (6)$$

$\vec{S}_{1,n}$, $\vec{S}_{2,n'}$ – операторы магнитного момента первой и второй подрешетки, обозначения c_0^+, c_0, ω_0 имеют тот же смысл, что и примере (3), I, λ_1, λ_2 – константы взаимодействия.

Однако в дальнейшем для проведения всех рассуждений нам не потребуется явный вид операторов T, A_m, B_i и постоянных λ_m, $\varkappa_i$, γ_m, τ, s. Мы будем лишь предполагать, что выполнены следующие общие условия*)

$$\|A_m\| \le M_1, \quad \|[T, A_m]\| \le M_2, \quad \|[A_m, A^+_{m'}]\| \le M_3/V, \quad \|[A_m, A_{m'}]\| \le M_3/V, \qquad (7)$$

---

*) Здесь и далее, если это не оговорено особо, индекс m пробегает значения от 1 до $\tau+s$, индекс i – от 1 до τ, j – от $\tau+1$ до $\tau+s$.

$$|f_V[T]| \le M_0, \tag{8}$$

$$\|B_i\|\le M_1,\ \ \|[T,B_i]\|\le M_2,\ \ \|[B_i,B_i^+]\|\le M_3/V,\ \ \|[B_i,B_{i'}]\|\le M_3/V,$$
$$\|[A_m,B_i^+]\|\le M_3/V,\ \ \|[A_m,B_i]\|\le M_3/V, \tag{9}$$

где M_1, M_2, M_3, M_0 – постоянные, не зависящие от V.

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Введем в гамильтониан (I) дополнительные члены

$$-\varepsilon^2 V\sum_{i=1}^{t}\gamma_i A_i^+A_i$$

где ε – произвольное положительное число. В таком случае получаем гамильтониан

$$\begin{aligned} H_\varepsilon = \tilde T &- V\sum_{m=1}^{t+s}[\tilde\gamma_m \tilde A_m^+\tilde A_m - \tilde\nu_m \tilde A_m^+ - \tilde\nu_m^+ \tilde A_m] + V\sum_{i=1}^{t}[\tilde\gamma_i \tilde B_i^+\tilde B_i + \tilde\mu_i \tilde B_i^+ + \tilde\mu_i^+ B_i] \\ &+ 2\sum_{i=1}^{t}\omega_i c_i^+c_i + \sum_{j=t+1}^{t+s}\omega_j c_j^+c_j \\ &+ \sqrt V\sum_{m=1}^{t+s}\tilde\lambda_m[c_m\tilde A_m^+ + c_m^+\tilde A_m] + \sqrt V\sum_{i=1}^{t}\tilde\kappa_i[c_i\tilde B_i^+ + c_i^+\tilde B_i], \end{aligned} \tag{I0}$$

где

$$\begin{aligned} &\tilde\gamma_i = \frac{1}{\varepsilon^2}\gamma_i,\quad \tilde A_i = \varepsilon^2 A_i + B_i,\quad \tilde B_i = -B_i,\quad \tilde\nu_i = \frac{1}{\varepsilon^2}\nu_i,\quad \tilde\mu_i = -\mu_i + \frac{1}{\varepsilon^2}\nu_i, \\ &\tilde\lambda_i = \frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_i,\quad \tilde\kappa_i = \frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_i - \kappa_i, \\ &\tilde\gamma_j = \gamma_j,\quad \tilde A_j = A_j,\quad \tilde\nu_j = \nu_j,\quad \tilde\lambda_j = \lambda_j, \\ &\tilde T = T. \end{aligned} \tag{II}$$

Аппроксимирующий гамильтониан к (I0) возьмем в виде

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon 0}(a,b) = \tilde T &- V\sum_{m=1}^{t+s}[g_m(a_m\tilde A_m^+ + a_m^+\tilde A_m - a_m^+a_m) - \tilde\nu_m\tilde A_m^+ - \tilde\nu_m^+ A_m] \\ &- V\sum_{\lambda_i\ne 0}[h_i(b_i\tilde B_i^+ + b_i^+\tilde B_i - b_i^+b_i) - \tilde\mu_i\tilde B_i^+ - \tilde\mu_i^+ B_i] \\ &+ V\sum_{\lambda_i=0}[\tilde\gamma_i(b_i\tilde B_i^+ + b_i^+\tilde B_i - b_i^+b_i) + \tilde\mu_i\tilde B_i^+ + \tilde\mu_i^+ B_i], \end{aligned} \tag{I2}$$

где

$$g_m = \tilde\gamma_m + \frac{\tilde\lambda_m^2}{\omega_m} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\varepsilon^2}\gamma_i + \frac{1}{\varepsilon^4}\frac{\lambda_i^2}{\omega_i} \\ \gamma_j + \frac{\lambda_j^2}{\omega_j} \end{Bmatrix} \ge 0, \tag{I3}$$

$$h_l = -\tilde\gamma_l + \frac{\tilde\kappa_l^2}{\omega_l} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\gamma_l + \left(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_l - \kappa_l\right)^2\cdot\frac{1}{\omega_l} \ge 0,\quad (l\in\mathcal L,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0)), \tag{I4}$$

и через $\mathcal L$ обозначено множество тех индексов i, для которых λ_i отличны от нуля:

$$\mathcal L = \{i:\ \lambda_i \ne 0\}. \tag{I5}$$

Обозначим также через $\mathcal J$ множество таких индексов i, для которых λ_i равны нулю

$$\mathcal J = \{i:\ \lambda_i = 0\}. \tag{I6}$$

Неравенство (I4) выполняется при любом i таком, что $\lambda_i \ne 0$, для любого достаточно малого ε: $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где ε_0 – некоторая функция констант $\gamma_l, \lambda_l, \kappa_l, \omega_l$. В дальнейшем мы будем считать, что ε принадлежит этому интервалу.

Поэтому постоянные a, b в (I2) будем определять согласно следующему условию минимакса для функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана $f_V[H_{\varepsilon 0}(a,b)]$:

$$\begin{aligned} &f_V[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_l, \tilde b_t(a_m, b_l))] = \max_{b_t} f_V[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_l, b_t)], \\ &f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar a_m, \bar b_l, \bar b_t(\bar a_m, \bar b_l))] = \min_{a_m, b_l} f_V[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_l, \tilde b_t(a_m, b_l))], \\ &\bar b_t = \tilde b_t(\bar a_m, \bar b_l), \end{aligned} \tag{I7}$$

$\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$, $\ell\in\mathcal{L}$, $t\in\mathcal{J}$.

В работе /I2/ показано, что решение этой минимаксной задачи существует при любых V и $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.

Для доказательства термодинамической эквивалентности гамильтонианов H_ε и $H_{\varepsilon 0}(\bar{a},\bar{b})$ введем в рассмотрение вспомогательный гамильтониан H'_ε:

$$H'_\varepsilon=\tilde{T}-V\sum_{m=1}^{r+s}[g_m\tilde{A}_m^+\tilde{A}_m-\vartheta_m\tilde{A}_m^+-\vartheta_m^+\tilde{A}_m]$$
$$-V\sum_{\ell\in\mathcal{L}}[h_\ell\tilde{B}_\ell^+\tilde{B}_\ell-\mu_\ell\tilde{B}_\ell^+-\mu_\ell^+\tilde{B}_\ell]+V\sum_{t\in\mathcal{J}}[\gamma_t\tilde{B}_t^+\tilde{B}_t+\mu_t\tilde{B}_t^++\mu_t^+\tilde{B}_t]. \quad (18)$$

Заметим, что H'_ε может быть представлен в виде

$$H'_\varepsilon=H_\varepsilon-V\sum_{m=1}^{r+s}\omega_m C_m^+C_m-V\sum_{i=1}^{r}\omega_i\mathcal{D}_i^+\mathcal{D}_i, \quad (19)$$

где

$$C_m=\frac{c_m}{\sqrt{V}}+\frac{\tilde{\lambda}_m}{\omega_m}\tilde{A}_m,\quad \mathcal{D}_i=\frac{c_i}{\sqrt{V}}+\frac{\tilde{\varkappa}_i}{\omega_i}\tilde{B}_i. \quad (20)$$

Согласно неравенству Н.Н.Боголюбова для свободных энергий

$$\frac{1}{V}\langle\mathcal{H}_1-\mathcal{H}_2\rangle_{\mathcal{H}_1}\le f_V[\mathcal{H}_1]-f_V[\mathcal{H}_2]\le\frac{1}{V}\langle\mathcal{H}_1-\mathcal{H}_2\rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad (21)$$

имеем

$$\sum_{m=1}^{r+s}\omega_m\langle C_m^+C_m\rangle_{H_\varepsilon}+\sum_{i=1}^{r}\omega_i\langle\mathcal{D}_i^+\mathcal{D}_i\rangle_{H_\varepsilon}\le f_V[H_\varepsilon]-f_V[H'_\varepsilon]$$
$$\le\sum_{m=1}^{r+s}\omega_m\langle C_m^+C_m\rangle_{H'_\varepsilon}+\sum_{i=1}^{r}\omega_i\langle\mathcal{D}_i^+\mathcal{D}_i\rangle_{H'_\varepsilon}. \quad (22)$$

В силу положительной определенности операторов $C_m^+C_m$ и $\mathcal{D}_i^+\mathcal{D}_i$

$$0\le f_V[H_\varepsilon]-f_V[H'_\varepsilon]. \quad (23)$$

С другой стороны, согласно условиям (7),(8) из определений (II) операторов $\tilde{T}$, $\tilde{A}_m$, $\tilde{B}_i$ следует, что при любом $\varepsilon>0$ справедливы соотношения

$$\|\tilde{A}_m\|\le L_1,\ \|\tilde{B}_i\|\le L_1,\ \|[\tilde{T},\tilde{A}_m]\|\le L_2,\ \|[\tilde{T},\tilde{B}_i]\|\le L_2,$$
$$\|[\tilde{A}_m,\tilde{A}_{m'}^+]\|\le L_3/V,\ \|[\tilde{A}_m,\tilde{A}_{m'}]\|\le L_3/V,\ \|[\tilde{B}_i,\tilde{B}_{i'}^+]\|\le L_3/V, \quad (24)$$
$$\|[\tilde{B}_i,\tilde{B}_{i'}]\|\le L_3/V,\ \|[\tilde{A}_m,\tilde{B}_i^+]\|\le L_3/V,\ \|[\tilde{A}_m,\tilde{B}_i]\|\le L_3/V,$$

где L_1, L_2, L_3 – простые комбинации первоначальных констант M_1, M_2, M_3 и ε.

В работе /5/ для гамильтонианов

$$H=T-V\sum_{i=1}^{r}\gamma_i A_i^+A_i+\sum_{i=1}^{r}\omega_i c_i^+c_i+\sqrt{V}\sum_{i=1}^{r}\lambda_i(c_iA_i^++c_i^+A_i)$$

и

$$H'=H-V\sum_{i=1}^{r}\gamma_i C_i^+C_i,$$
$$C_i=\frac{c_i}{\sqrt{V}}+\frac{\lambda_i}{\omega_i}A_i,\qquad \gamma_i>0$$

при условии, что справедливы соотношения

$$\|A_i\|\le P_1,\quad \|[T,A_i]\|\le P_2,$$
$$\|[A_i,A_{i'}^+]\|\le P_3/V,\quad \|[A_i,A_{i'}]\|\le P_3/V,$$

была доказана верхняя оценка

$$f_V[H]-f_V[H']\le\delta(V)\xrightarrow[V\to\infty]{}0$$

Предложенное в /5/ доказательство легко обобщается на случай произвольных констант взаимодействия γ_i, и таким образом на основе неравенств (24) мы получаем аналогичную оценку для гамильтонианов H_ε и H'_ε:

$$\forall\ \varepsilon>0$$
$$f_V[H_\varepsilon]-f_V[H'_\varepsilon]\le\delta_\varepsilon(V)\xrightarrow[V\to\infty]{}0. \quad (25)$$

Таким образом,

$$0 \le f_V[H_\varepsilon] - f_V[H'_\varepsilon] \le \delta_\varepsilon(V), \qquad \delta_\varepsilon(V) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \tag{26}$$

Как показано в работах /6/, из соотношений (24),(9) при условии, что имеет место равномерная по V ограниченность вторых производных функции свободной энергии $f_V[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_\ell, \tilde{b}_t(a_m, b_\ell))]$ по тем источникам μ_t, для которых $\lambda_t = 0$:

$$\left| \frac{\partial^2 f_V[H_\varepsilon(a_m, b_\ell, \tilde{b}_t(a_m, b_\ell))]}{\partial \mu_t \partial \mu_t^+} \right| \le L, \quad L = \mathrm{Const}, \tag{27}$$

следует асимптотическая близость функций свободной энергии гамильтонианов H'_ε и $H_{\varepsilon 0}(\bar{a}, \bar{b})$ при любом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$:

$$-\zeta_\varepsilon(V) \le f_V[H'_\varepsilon] - f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}, \bar{b})] \le \zeta_\varepsilon(V), \qquad \zeta_\varepsilon(V) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0, \ \zeta(V) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \tag{28}$$

Складывая почленно неравенства (26),(28), имеем

$$-\zeta_\varepsilon(V) \le f_V[H_\varepsilon] - f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}, \bar{b})] \le \delta_\varepsilon(V) + \zeta_\varepsilon(V). \tag{29}$$

Предположим, далее, что при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует поточечный предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(a, b)] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a, b)]. \tag{30}$$

Тогда, как показано в работе /12/, при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ решение $\bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}$, $\bar{b}_m^{(\varepsilon,\infty)}$ минимаксной задачи для этой предельной функции

$$\begin{gathered} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_\ell, \tilde{b}_t^{(\varepsilon,\infty)}(a_m, b_\ell))] = \max_{b_t} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_t, b_\ell)], \\ f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}, \bar{b}_\ell^{(\varepsilon,\infty)}, \tilde{b}_t^{(\varepsilon,\infty)}(\bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}, \bar{b}_\ell^{(\varepsilon,\infty)}))] = \min_{a_m, b_\ell} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_\ell, \tilde{b}_t^{(\varepsilon,\infty)}(a_m, b_\ell))], \\ \bar{b}_t^{(\varepsilon,\infty)} = \tilde{b}_t^{(\varepsilon,\infty)}(\bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}, \bar{b}_\ell^{(\varepsilon,\infty)}), \quad (\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \ \ell \in \mathcal{L}, \ t \in \mathcal{T}), \end{gathered} \tag{31}$$

существует и лежит в следующей области $\mathfrak{R}$:

$$|a_m| \le (\varepsilon^2 + 1) M_1, \ |b_\ell| \le M_1 \tag{32}$$

и, что в силу (29) справедливо неравенство

$$\begin{gathered} -\zeta_\varepsilon(V) - \eta_\varepsilon(V) \le f_V[H_\varepsilon] - f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}, \bar{b}^{(\varepsilon,\infty)})] \\ \le \delta(V) + \zeta_\varepsilon(V) + \eta_\varepsilon(V), \\ \eta_\varepsilon(V) \xrightarrow[V\to\infty]{} 0. \end{gathered} \tag{33}$$

Применяя неравенство Н.Н.Боголюбова для свободных энергий (21) к гамильтонианам H_ε и H, получаем

$$0 \le f_V[H] - f_V[H_\varepsilon] \le \varepsilon^2 \tau \gamma M_1^2, \tag{34}$$

где

$$\gamma = \max_i \{\gamma_i\}. \tag{35}$$

Складывая почленно неравенства (33) и (34), находим

$$\begin{gathered} -\zeta_\varepsilon(V) - \eta_\varepsilon(V) \le f_V[H] - f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}, \bar{b}^{(\varepsilon,\infty)})] \\ \le \delta_\varepsilon(V) + \zeta_\varepsilon(V) + \eta_\varepsilon(V) + \varepsilon^2 \tau \gamma M_1^2. \end{gathered} \tag{36}$$

В работе /6/ доказано, что из этого соотношения следует, что предел при $V \to \infty$ функции свободной энергии исходного модельного гамильтониана H существует и равен

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H] = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}, \bar{b}^{(\varepsilon,\infty)})]. \tag{37}$$

Таким образом, резюмируя полученные сейчас результаты, убеждаемся в том, что справедлива

Т е о р е м а I

Если для модельной системы из класса (I),(7)-(9) при любом достаточно малом $\varepsilon>0$

I) существует поточечный предел функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана (I2)

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(a,b)] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,b)], \qquad (38)$$

2) вторые производные функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана $f_V[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_l, \bar b_t(a_m, b_l))]$ по тем источникам μ_t, для которых $\lambda_t=0$, равномерно ограничены по V:

$$\left|\frac{\partial^2 f_V[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_l, \bar b_t(a_m, b_l))]}{\partial\mu_t\,\partial\mu_t^+}\right| \le L, \qquad (39)$$

то

I) для предельной функции (38) существует решение $\bar a_m^{(\varepsilon,\infty)}$, $\bar b_i^{(\varepsilon,\infty)}$ минимаксной задачи (3I), причем оно принадлежит области $\mathfrak{R}$ (32);

2) существует предельное при $V\to\infty$ значение функции свободной энергии исходного модельного гамильтониана H, которое равно $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar a^{(\varepsilon,\infty)}, \bar b^{(\varepsilon,\infty)})]$:

$$0\le \lim_{V\to\infty} f_V[H] - f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar a^{(\varepsilon,\infty)}, \bar b^{(\varepsilon,\infty)})] \le \varepsilon^2 r\gamma M_1^2. \qquad (40)$$

В том случае, когда все $\lambda_i\neq 0$ являются отличными от нуля:

$$\lambda_i \neq 0, \qquad (i=1,\dots,r) \qquad (41)$$

мы имеем следующую теорему:

Т е о р е м а 2

Если для модельной системы из класса (I),(7)-(9),(4I) при

любом достаточно малом $\varepsilon>0$ существует поточечный предел функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана $H_{\varepsilon 0}(a,b)$ (I2)

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(a,b)] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,b)], \qquad (42)$$

то

I) для этой предельной функции существует решение $\bar a_m^{(\varepsilon,\infty)}$, $\bar b_i^{(\varepsilon,\infty)}$ следующей задачи на абсолютный минимум

$$f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar a_m^{(\varepsilon,\infty)}, \bar b_i^{(\varepsilon,\infty)})] = \min_{a_m, b_i} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a_m, b_i)], \qquad (43)$$

причем оно принадлежит области $\mathfrak{R}$ (32);

2) существует предельное при $V\to\infty$ значение функции свободной энергии исходного модельного гамильтониана H, которое равно $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar a^{(\varepsilon,\infty)}, \bar b^{(\varepsilon,\infty)})]$:

$$0\le \lim_{V\to\infty} f_V[H] - f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar a^{(\varepsilon,\infty)}, \bar b^{(\varepsilon,\infty)})] \le \varepsilon^2 r\gamma M_1^2. \qquad (44)$$

Укажем теперь более узкий класс модельных систем, входящий в (I), (7), для которого заведомо выполняется требование 2) теоремы I а также условия (8),(9).

Этот класс состоит из модельных гамильтонианов вида (I), в котрых $T=T_1+T_2$, операторы B_i, T_1 являются комбинациями операторов Паули :

$$\begin{aligned} &B_i = \frac{1}{V}\sum_n \rho_n^{(i)} S_n^-, \quad (i=1,\dots,q), \qquad (1\le q\le r)\\ &B_i = \frac{1}{V}\sum_n \rho_n^{(i)} S_n^z, \quad S_n^z = \tfrac12 - S_n^- S_n^+, \quad (i=q+1,\dots,r), \qquad (45)\\ &T_2 = \sum_n (T_n^z S_n^z + T_n^+ S_n^- + T_n^- S_n^+), \quad (T_n^z)^+ = T_n^z, \quad (T_n^+)^+ = T_n^-, \end{aligned}$$

где $\rho_n^{(i)}$, T^-, T^z – комплексные числа, такие что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{V}\sum_n |\rho_n^{(i)}| \le Q_1, \quad (i=1,\dots,r),\\ &|\rho_n^{(i)}| \le Q, \quad |T_n^-| \le Q, \quad |T_n^z| \le Q, \quad (i=1,\dots,r), \end{aligned} \qquad (46)$$

Q, Q_1 - постоянные.

Операторы A_m либо также являются комбинациями операторов Паули вида (45), либо вообще не зависят от $S_n^{\pm}$; $T_1 = T_1^{+}$ не зависит от $S_n^{\pm}$. Предполагается, что они удовлетворяют общим условиям

$$\|A_m\| \le M_1, \quad \|[T_1, A_m]\| \le M_2, \quad \|[A_m, A_{m'}^{+}]\| \le M_3/V, \quad \|[A_m, A_{m'}]\| \le M_3/V, \qquad (47)$$
$$|f_V[T_1]| \le M_0, \qquad M_1, M_2, M_3, M_0 = Const,$$

и не конкретизируются.

Тот факт, что для гамильтонианов из класса (I),(45)-(47) действительно выполняется условие 2) теоремы I, а также справедливы неравенства (8),(9), доказан в работах /6/.

В таком случае мы получаем следующую теорему:

Теорема 3

Если для модельной системы из класса (I),(45)-(47) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует поточечный предел функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана $H_{\varepsilon 0}(a, b)$ (I2)

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(a, b)] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a, b)], \qquad (48)$$

то

I) для этой предельной функции существует решение $\bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}$, $\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}$ минимаксной задачи (3I), причем оно принадлежит области $\mathfrak{N}$ (32);

2) существует предельное при $V\to\infty$ значение функции свободной энергии исходного модельного гамильтониана H, которое равно $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}, \bar{b}^{(\varepsilon,\infty)})]$:

$$0 \le \lim_{V\to\infty} f_V[H] - f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}, \bar{b}^{(\varepsilon,\infty)})] \le \varepsilon^2 \tau \gamma M_1. \qquad (49)$$

Отметим, что в указанный класс (I),(45)-(47) как частные случаи входят все конкретные модели, приведенные в разделе 2 .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе продолжено начатое в /5/,/I0/ исследование модельных систем, в гамильтониан которых входят члены, содержащие произведения операторов фермиевского и бозевского типов. Рассмотрение проведено на основе разработанной в /6/,/7/ схемы исследования, так называемой ε-процедуры. В результате строго установлен и с единой точки зрения детально исследован новый класс модельных задач, допускающих точное в термодинамическом пределе решение. Этот класс обобщает качественно различные модели, представляющие большой интерес для физики конденсированного состояния.

Авторы признательны профессору Н.Н.Боголюбову (мл.) за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. N.N.Bogolubov (Jr.). Physica 32, 933, 1966.
2. Н.Н.Боголюбов (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов, М., Наука, I974.
3. Н.Н.Боголюбов (мл.). ИТФ-68-57, ИТФ-68-65, ИТФ-68-86, Киев, I968.
4. Н.Н.Боголюбов (мл.), В.Н.Плечко. ОИЯИ Р4-849I, Дубна, I974.
5. N.N.Bogolubov (Jr.), V.N.Plechco. IC/75/68, Trieste, 1975. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.М.Курбатов, В.Н.Плечко. ОИЯИ ДI7-9737, Дубна, I976.
6. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. ОИЯИ РI7-9774, РI7-9775, РI7-9776, Дубна, I976.
7. А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. ОИЯИ РI7-I0240, Дубна, I976.
8. В.Г.Вакс. Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков, М., Наука, I973.
9. А.М.Курбатов, В.Н.Плечко. ТМФ 26, I09, I976.
I0. R.H.Dicke. Phys. Rev. 93, 99, 1954.

II. Г.М.Заславский. ФТТ I6, II, I974.

I2. А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. ОИЯИ Р5-I0237, Дубна, I976.

Рукопись поступила в издательский отдел
I9 ноября I976 года