СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р17 - 10240

А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕДНИХ В РАМКАХ МЕТОДА Н.Н.БОГОЛЮБОВА (мл.) ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКРЕСТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1976

P17 - 10240

А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕДНИХ В РАМКАХ МЕТОДА Н.Н.БОГОЛЮБОВА (мл.) ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕКРЕСТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Ермилов А.Н., Курбатов А.М. P17 - 10240

Вычисление термодинамических средних в рамках метода Н.Н.Боголюбова (мл.) для систем с перекрестным взаимодействием

На основе метода Н.Н.Боголюбова (мл.) исследуется класс модельных систем с взаимодействием вида

$$H_{int} = V \sum_i \gamma_i (A_i B_i^+ + A_i^+ B_i).$$

Операторы A_i, удовлетворяющие некоторым общим условиям, не конкретизируются, B_i являются комбинациями операторов Паули. Доказан ряд теорем об асимптотическом поведении наблюдаемых.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

Ermilov A.N., Kurbatov A.M. P17 - 10240

Calculation of Thermodynamical Averages in the Frame of N.N.Bogolubov (Jr.) Method for Systems with Cross Interactions

The class of model systems with interactions of the form

$$H_{int} = V \sum_i \gamma_i (A_i B_i^+ + A_i^+ B_i)$$

where operators A_i satisfying some general conditions are not concretized, B_i are combinations of Pauli operators, is studied on the bases of N.N.Bogolubov (Jr.) method. A number of theorems concerning the observables asymptotical conduct are proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

I. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы исследуем в рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов /1/,/2/ асимптотическое поведение термодинамических средних для класса модельных задач с "перекрестным" взаимодействием /3/-/5/:

$$H = T_1 + T_2 - V\sum_{i=1}^{r}\{\gamma_i(A_i B_i^+ + A_i^+ B_i) - \nu_i A_i^+ - \nu_i^+ A_i - \mu_i B_i^+ - \mu_i^+ B_i\} - V\sum_{j=r+1}^{r+s}\{\gamma_j A_j A_j^+ - \nu_j A_j^+ - \nu_j^+ A_j\}, \qquad (1)$$

где V - объем системы, $\gamma_m > 0$ - константы взаимодействия, ν_m и μ_i - параметры включения источников.

Операторы T_2, B_i являются комбинациями операторов Паули $S_\omega^\pm$:

$$T_2 = \sum_\omega T_\omega S_\omega^+ S_\omega^-,$$
$$B_i = \frac{1}{V}\sum_\omega \lambda_\omega^{(i)} S_\omega^-, \quad (i = 1,\dots,g;\ 0 \le g \le r), \qquad (2)$$
$$B_i = \frac{1}{V}\sum_\omega \lambda_\omega^{(i)} S_\omega^z, \quad S_\omega^z = \frac{1}{2} - S_\omega^- S_\omega^+, \ (i = g+1,\dots,r).$$

Вещественные числа T_ω, $\lambda_\omega^{(i)}$ удовлетворяют условиям

$$|T_\omega| \le L, \ |\lambda_\omega^{(i)}| \le L, \ (i = 1,\dots,r;\ L = Const),$$
$$\frac{1}{V}\sum_\omega |\lambda_\omega^{(i)}| \le L_1, \ (i = 1,\dots,r;\ L_1 = Const); \qquad (3)$$

для операторов T_1, A_m выполняются неравенства*)

$$\|A_m\| \leq M_1, \quad \|[T_1, A_m]\| \leq M_2,$$

$$\|[A_m, A_{m'}]\| \leq M_3/V, \quad \|[A_m, A_{m'}^+]\| \leq M_3/V, \tag{4}$$

$$|f_V[T_1]| \leq M_0, \quad (M_1, M_2, M_3, M_0 = Const);$$

z и s - фиксированные числа.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕДНИХ КАК ПРОИЗВОДНЫЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ПО ИСТОЧНИКАМ

Аппроксимирующий гамильтониан к гамильтониану (I) имеет вид /3/

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}, \bar{b}^{(\varepsilon,V)}) = T_1 + T_2 - V\sum_{i=1}^{z}\{\tfrac{1}{\varepsilon^2}\gamma_i\,[\bar{a}_i^{(\varepsilon,V)}(\varepsilon^2 A_i^+ + B_i^+) \\ + \overset{+}{\bar{a}}{}_i^{(\varepsilon,V)}(\varepsilon^2 A_i + B_i) - \bar{a}_i^{(\varepsilon,V)}\overset{+}{\bar{a}}{}_i^{(\varepsilon,V)}] - \nu_i A_i^+ - \nu_i^+ A_i - \mu_i B_i^+ - \mu_i^+ B_i\} \\ - V\sum_{j=z+1}^{z+s}\{\gamma_j[\bar{a}_j^{(\varepsilon,V)} A_j^+ + \overset{+}{\bar{a}}{}_j^{(\varepsilon,V)} A_j - \bar{a}_j^{(\varepsilon,V)}\overset{+}{\bar{a}}{}_j^{(\varepsilon,V)}] - \nu_j A_j^+ - \nu_j^+ A_j\} + V\sum_{i=1}^{z}\{\tfrac{1}{\varepsilon^2}\gamma_i \\ \times[\bar{b}_i^{(\varepsilon,V)} B_i^+ + \overset{+}{\bar{b}}{}_i^{(\varepsilon,V)} B_i - \bar{b}_i^{(\varepsilon,V)}\overset{+}{\bar{b}}{}_i^{(\varepsilon,V)}] + \mu_i B_i^+ + \mu_i^+ B_i\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где постоянные $\bar{a}_m^{(\varepsilon,V)}$, $\bar{b}_i^{(\varepsilon,V)}$ должны быть определены из условия минимакса:

$$f_V[H_{\varepsilon 0}(a, b^{(\varepsilon,V)}(a))] = \max_b f_V[H_{\varepsilon 0}(a,b)], \tag{6}$$

$$f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}, \bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}))] = \min_a f_V[H_{\varepsilon 0}(a, \bar{b}^{(\varepsilon,V)}(a))], \tag{7}$$

---

*) Здесь и далее во всей работе индекс m пробегает значения от 1 до $z+s$, индексы i и ℓ - от 1 до z, j и t - от $z+1$ до $z+s$. Кроме того, индекс k принимает произвольное фиксированное значение от 1 до $z+s$, индекс p - произвольное фиксированное значение от 1 до z и индекс q - произвольное фиксированное значение от $z+1$ до $z+s$.

$$\bar{b}^{(\varepsilon,V)} = \tilde{b}^{(\varepsilon,V)}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}). \tag{8}$$

Свободная энергия $f_V[H(\nu,\mu)]$ является вещественной функцией действительных и мнимых частей источников x_α и y_α $(\nu_\alpha = x_\alpha + i y_\alpha)$ как вещественных аргументов вида

$$f_V[\mathfrak{A} + t\cdot\mathfrak{B}], \quad (t = x_{\nu_m}, x_{\mu_i}, y_{\nu_m}, y_{\mu_i}), \tag{9}$$

причем

$$\mathfrak{B}^+ = \mathfrak{B}. \tag{10}$$

Так, например для $t = x_{\mu_p}$ имеем

$$\mathfrak{A} = T_1 + T_2 - V\sum_{i=1}^{r}\{\gamma_i(A_i B_i^+ + A_i^+ B_i) - \nu_i A_i^+ - \nu_i^+ A_i\} + V\sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{r}\{\mu_i B_i^+$$
$$+ \mu_i^+ B_i\} + i y_{\mu_p}(B_p^+ - B_p)\} - V\sum_{j=r+1}^{r+s}\{\gamma_j A_j A_j^+ - \nu_j A_j^+ + \nu_j^+ A_j\},$$
$$\mathfrak{B} = V(B_p^+ + B_p).$$

Для всех реальных систем вторые частные производные свободной энергии $f_V[H]$ как функции x_α (y_α) существуют на любом интервале $(x_\alpha^{(1)}, x_\alpha^{(2)})$ $((y_\alpha^{(1)}, y_\alpha^{(2)}))$ всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек. Действительно, с точки зрения физики отсутствие в некоторой точке (ν,μ) второй производной функции свободной энергии по источнику означает либо наличие в этой точке фазового перехода первого или второго рода, либо скачкообразное изменение термодинамических параметров, допускаемое определенной симметрией системы, при снятии ее включением источников; но первая возможность в термодинамических системах может реализовываться на любом интервале не более, чем в конечном числе точек, а вторая - лишь при нулевых значениях источников.

В связи с этим следует заметить, что накладываемые ниже условия существования производных по источникам при исследовании поведения термодинамических средних в некоторой точке (ν,μ) не исключают получения их асимптотического значения в физически важных случаях нулевых источников, т.к. их вычисление в этих точках проводится согласно концепции квазисредних [6], а именно физически интересными являются предельные значения

$$\lim_{\nu\to 0}\langle A_m\rangle_{H(\nu)},\ \lim_{\nu\to 0}\langle B_i\rangle_{H(\nu)},$$

и, таким образом, означают, что асимптотически точное вычисление термодинамических средних осуществляется вне точек фазового перехода.

В работе [8] показано, что в этом случае для любой точки t, в которой функция $f_V[\mathcal{H}+t\cdot\mathcal{X}]$ дифференцируема, существует окрестность, в которой она дифференцируема и выпукла вверх.

Следовательно, если в некоторой окрестности точки t последовательность $f_V[\mathcal{H}+t\mathcal{X}]$ при $V\to\infty$ сходится поточечно к некоторой функции $f_\infty[t]$, то по теореме Гриффитса [7],[8] последовательность производных $f'_V[\mathcal{H}+t\cdot\mathcal{X}]$ сходится к производной предельной функции $f'_V[t]$, если последняя производная существует в определенной сколь угодно малой окрестности точки t.

В работе [5] показано, что, если

а) для некоторого $\varepsilon\in(0,\ 1/19)$ существует предел функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана (5) при $\varepsilon=1/V^{\varepsilon}$

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{1/V^\varepsilon,0}(\bar{a}^{(1/V^\varepsilon,V)},\bar{b}^{(1/V^\varepsilon,V)})]=f_\infty[H_0]; \tag{11}$$

б) при любом достаточно малом $\varepsilon>0$ существует предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)},\bar{b}^{(\varepsilon,V)})]=f_\infty[H_{\varepsilon 0}]; \tag{12}$$

в) при любом достаточно малом $\varepsilon>0$ при любых a_m, b_i существует предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(a,b)]=f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,b)]; \tag{13}$$

то существует предельное при $V\to\infty$ значение функции свободной энергии модельного гамильтониана

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H]=f_\infty[H], \tag{14}$$

равное

а) $$f_\infty[H(\nu,\mu)] = f_\infty[H_0(\nu,\mu)];\tag{15}$$

б) $$f_\infty[H(\nu,\mu)] = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\nu,\mu)] = f_\infty[H_0(\nu,\mu)];\tag{16}$$

в) $$f_\infty[H(\nu,\mu)] = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)] = f_\infty[H_0(\nu,\mu)];\tag{17}$$

где постоянные $\bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}$; $\bar{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}$ определяются из условия минимакса для предельной фнкции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана (13):

$$f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,\tilde{b}^{(\varepsilon,\infty)}(a,\nu,\mu))] = \max_b f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,b,\nu,\mu)],\tag{18}$$

$$f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\tilde{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu),\nu,\mu)] = \min_a f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,\tilde{b}^{(\varepsilon,\infty)}(a,\nu,\mu),\nu,\mu)];\tag{19}$$

$$\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu) = \tilde{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu).\tag{20}$$

Таким образом, если в точке (ν,μ) функция свободной энергии модельного гамильтониана $f_V[H(\nu,\mu)]$ дифференцируема по источнику ν_k или/и μ_p, а предельная функция свободной энергии $f_\infty[H_0(\nu,\mu)]$ дифференцируема по ν_k или/и μ_p в некоторой окрестности ν_k или/и μ_p, то

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_V[H(\nu,\mu)]}{\partial x_{\nu_k}} &= \langle A_k^+ + A_k\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial x_{\nu_k}},\\ \frac{\partial f_V[H(\nu,\mu)]}{\partial y_{\nu_k}} &= i\langle A_k^+ - A_k\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial y_{\nu_k}},\end{aligned}\tag{21}$$

или/и

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_V[H(\nu,\mu)]}{\partial x_{\mu_i}} &= \langle B_i^+ + B_i\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial x_{\mu_i}},\\ \frac{\partial f_V[H(\nu,\mu)]}{\partial y_{\mu_i}} &= i\langle B_i^+ - B_i\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial y_{\mu_i}}.\end{aligned}\tag{22}$$

Соотношения (21) и (22) соответственно дают

$$\langle A_k\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial x_{\nu_k}} + i\frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial y_{\nu_k}}\right\} = \frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial \nu_k^+},\tag{23}$$

или/и

$$\langle B_i \rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial x_{\mu_i}} + i\,\frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial y_{\mu_i}} \right\} = \frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial \mu_i^+}, \quad (24)$$

и мы получаем следующую теорему

Т е о р е м а I

Если для модельного гамильтониана из класса (I)-(4) выполняется хотя бы одно из нижеперечисленных требований

а) для некоторого $\gamma \in (0, 1/19)$ существует предел функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана (5) $f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}, \bar{b}^{(\varepsilon,V)})]$ при $\varepsilon = 1/V^\gamma$

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{1/V^\gamma,0}(\bar{a}^{(1/V^\gamma,V)}, \bar{b}^{(1/V^\gamma,V)})] = f_\infty[H_0];$$

б) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}, \bar{b}^{(\varepsilon,V)})] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}];$$

в) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ при любых a_m, b_i существует предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(a,b)] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,b)];$$

то в любой точке (ν,μ), в которой существует частная производная по источнику ν_k $(1\le k\le \tau+s)$ или/и μ_p $(1\le p\le \tau)$ функции $f_V[H]$, а производная по ν_k или/и μ_p предельной функции свободной энергии $f_\infty[H_0(\nu,\mu)]$ (I5)-(I7) существует в некоторой окрестности ν_k или/и μ_p, существует предел при $V\to\infty$ термодинамического среднего оператора A_k или/и B_p, причем он равен производной по ν_k или/и μ_p предельной функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана (I5)-(I7) соответственно:

$$\langle A_k \rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial \nu_k^+}, \quad (1\le k\le \tau+s), \qquad (24)$$

или/и

$$\langle B_p \rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_0(\nu,\mu)]}{\partial \mu_p^+}, \quad (1\le p\le \tau). \qquad (25)$$

3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ БЛИЗОСТЬ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕДНИХ, ВЫЧИСЛЕННЫХ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЬНОГО И АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ГАМИЛЬТОНИАНОВ

Перепишем аппроксимирующий гамильтониан (5) тождественно в виде

$$H_{\varepsilon 0}(a,b) = \widetilde{T} - V\sum_{m=1}^{r+s} \widetilde{\gamma}_m [a_m \widetilde{A}_m^+ + a_m^+ \widetilde{A}_m - a_m a_m^+] + V\sum_{i=1}^{r} \widetilde{\gamma}_i [b_i \widetilde{B}_i^+ + b_i^+ \widetilde{B}_i - b_i b_i^+]$$
$$+ V\sum_{m=1}^{r+s} [\widetilde{\nu}_m \widetilde{A}_m^+ + \widetilde{\nu}_m^+ \widetilde{A}_m] + V\sum_{i=1}^{r} [\widetilde{\mu}_i \widetilde{B}_i^+ + \widetilde{\mu}_i^+ \widetilde{B}_i], \tag{26}$$

где

$$\widetilde{\gamma}_i = \frac{1}{\varepsilon^2}\gamma_i, \quad \widetilde{A}_i = \varepsilon^2 A_i + B_i, \quad \widetilde{B}_i = B_i,$$
$$\widetilde{\nu}_i = \frac{1}{\varepsilon^2}\nu_i, \quad \widetilde{\mu}_i = \mu_i - \frac{1}{\varepsilon^2}\nu_i, \tag{27}$$

$$\widetilde{\gamma}_j = \gamma_j, \quad \widetilde{A}_j = A_j, \quad \widetilde{\nu}_j = \nu_j, \tag{28}$$

$$\widetilde{T} = T_1 + T_2. \tag{29}$$

Предположим, что при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ для любых a_m, b_i существует предел функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(a,b,\nu,\mu)] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,b,\nu,\mu)]. \tag{30}$$

Из условий (2)-(5) согласно определениям (27),(28) получаем

$$\|\widetilde{A}_i\| \leq M_1 + \varepsilon^2 L_1, \quad \|\widetilde{B}_i\| \leq L_1,$$
$$\|\widetilde{A}_j\| \leq M_1.$$

В работе /8/ показано, что в таком случае как для предельной функции свободной энергии (30), так и для функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана при конечном объеме решения $\bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}$, $\bar{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}$ и $\bar{a}_m^{(\varepsilon,V)}$, $\bar{b}_i^{(\varepsilon,V)}$ минимаксных задач (18)-(20) и (6)-(8) соответственно существуют.

Согласно результатам работы /5/, при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{V\to\infty} \{ f_V[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})] - f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})] \} = 0, \tag{31}$$

где

$$H_\varepsilon = H - V\sum_{i=1}^{t} \varepsilon^t A_i A_i^+ = \tilde{T} - V\sum_{m=1}^{t+s} \tilde{\gamma}_m \tilde{A}_m \tilde{A}_m^+ + V\sum_{i=1}^{t} \tilde{\gamma}_i \tilde{B}_i \tilde{B}_i^+$$
$$+ V\sum_{m=1}^{t+s} [\tilde{\nu}_m \tilde{A}_m^+ + \tilde{\nu}_m^+ \tilde{A}_m] + V\sum_{i=1}^{t} [\tilde{\mu}_i \tilde{B}_i^+ + \tilde{\mu}_i^+ \tilde{B}_i]. \tag{32}$$

Как показано в работе /8/, отсюда следует, что предел при $V\to\infty$ свободной энергии $f_V[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})]$ существует и

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})] = f_\infty[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})] = \lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})]$$
$$= f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})], \tag{33}$$

и что в каждой точке (ν,μ), в которой существуют производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\nu}_m}, \quad \frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\mu}_i},$$
$$\left.\frac{\partial \bar{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(a,\tilde{\nu},\tilde{\mu})}{\partial a_m}\right|_{a=\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu})}, \tag{34}$$

а также существуют производные

$$\frac{\partial f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\nu}_k}, \quad \frac{\partial f_V[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\nu}_k}, \quad \frac{\partial \bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu})}{\partial\tilde{\nu}_k}, \quad \frac{\partial \bar{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu})}{\partial\tilde{\nu}_k}, \tag{35}$$

а производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\nu}_k'}, \quad \frac{\mathfrak{D} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\mathfrak{D}\tilde{\nu}_k} \tag{36}$$

существуют в некоторой окрестности $\tilde{\nu}_k$, или/и существуют производные

$$\frac{\partial f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\mu}_p}, \quad \frac{\partial f_V[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\mu}_p}, \quad \frac{\partial \bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu})}{\partial\tilde{\mu}_p}, \quad \frac{\partial \bar{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu})}{\partial\tilde{\mu}_p}, \tag{37}$$

а производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}'),\tilde{\nu},\tilde{\mu}')]}{\partial \tilde{\mu}'_p}, \quad \frac{\mathcal{D} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\mathcal{D}\tilde{\mu}_p} \tag{38}$$

существуют в некоторой окрестности $\tilde{\mu}_p$,

$$\langle \tilde{A}_k \rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial \tilde{\nu}_k^+}, \tag{39}$$

или/и

$$\langle \tilde{B}_p \rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial \tilde{\mu}_p^+}, \tag{40}$$

соответственно.

Переходя здесь от переменных $(\tilde{\nu},\tilde{\mu})$ к переменным (ν,μ), находим

$$\langle A_k \rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial \nu_k^+},$$

$$\langle B_p \rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}} \xrightarrow[V\to\infty]{} \frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial \mu_p^+}. \tag{41}$$

В силу условия (4) равномерной по V ограниченности операторов A_m для любого нормированного вектора ψ

$$(\psi, H\psi) - \varepsilon^2 V \gamma r M_1^2 \le (\psi, H_\varepsilon \psi) \le (\psi, H\psi) + \varepsilon^2 V \gamma r M_1^2,$$

где

$$\gamma = \max_i (\gamma_i).$$

Откуда следует, что для любого V

$$-\varepsilon^2 \gamma r M_1^2 \le f_V[H_\varepsilon] - f_V[H] \le \varepsilon^2 \gamma r M_1^2. \tag{42}$$

Так как при любом $\varepsilon > 0$

$$f_V[H_\varepsilon] \xrightarrow[V\to\infty]{} f_\infty[H_\varepsilon], \tag{33}$$

то

$$
\exists V_1 : \forall V > V_1
$$
$$
-\varepsilon < f_\infty[H_\varepsilon] - f_V[H_\varepsilon] < \varepsilon . \tag{43}
$$

Сложим почленно неравенства (42) и (43)

$$
-\varepsilon - \varepsilon^2 \gamma \tau M_1^2 \leqslant f_\infty[H_\varepsilon] - f_V[H] \leqslant \varepsilon + \varepsilon^2 \gamma \tau M_1^2 . \tag{44}
$$

Перепишем полученное неравенство для произвольного V', большего V_1 и отличного от V:

$$
-\varepsilon - \varepsilon^2 \gamma \tau M_1^2 \leqslant f_{V'}[H] \quad f_\infty[H_\varepsilon] \leqslant \varepsilon + \varepsilon^2 \gamma \tau M_1^2 \tag{45}
$$

Складывая неравенства (44) и (45), получаем, что

$$
\forall \varepsilon > 0 \ \exists V_1 : \forall V, V' > V_1
$$
$$
-2\varepsilon - 2\varepsilon^2 \gamma \tau M_1^2 \leqslant f_{V'}[H] - f_V[H] \leqslant 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 \gamma \tau M_1^2 .
$$

Откуда по признаку Больцано – Коши следует, что существует предел при $V \to \infty$ функции свободной энергии модельного гамильтониана $f_V[H]$, который мы обозначим через $f_\infty[H]$. В таком случае мы можем перейти к пределу $V \to \infty$ в неравенстве (42) ; имеем:

$$
-\varepsilon^2 \gamma \tau M_1^2 \leqslant f_\infty[H_\varepsilon] - f_\infty[H] \leqslant \varepsilon^2 \gamma \tau M_1^2 .
$$

Таким образом,

$$
f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} f_\infty[H(\nu,\mu)] . \tag{46}
$$

Функция $f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]$ является предельной для последовательности $f_V[H_\varepsilon(\nu,\mu)]$; так же, как и сами $f_V[H_\varepsilon(\nu,\mu)]$, она является функцией вещественных переменных x_α, y_α вида

$$
f_{i}[\mathcal{A} + i \cdot \mathcal{B}] ,
$$

Путем рассуждений, аналогичных проведенным в п.2, убеждаемся в том, что для любой точки (ν,μ), в которой функция $f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]$ дифференцируема по ν_k или/и μ_p, существует окрестность $(\nu_k-\delta,\nu_k+\delta)$ или/и $(\mu_p-\delta,\mu_p+\delta)$, в которых $f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]$ диффереуцируема и выпукла вверх по переменной ν_k или/и μ_p, соответственно. Отсюда по теореме Гриффитса получаем, что

$$\frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial \nu_k^+} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\partial f_\infty[H(\nu,\mu)]}{\partial \nu_k^+}, \tag{47}$$

или/и

$$\frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial \mu_p^+} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{\partial f_\infty[H(\nu,\mu)]}{\partial \mu_p^+}, \tag{48}$$

если в точке (ν,μ) функция $f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]$ дифференцируема по ν_k или/и μ_p, а функция $f_\infty[H(\nu,\mu)]$ дифференцируема в некоторой окрестности ν_k или/и μ_p.

Откуда, в силу п.(в) теоремы I и соотношений (4I), получаем

$$\lim_{V\to\infty} \langle A_k\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{V\to\infty} \langle A_k\rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}(\nu,\mu)},$$

$$\lim_{V\to\infty} \langle B_p\rangle_{H(\nu,\mu)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{V\to\infty} \langle B_p\rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}(\nu,\mu)}.$$

Переформулировав условия (34)-(38) для переменных (ν,μ), приходим к формулировке следующей теоремы:

Т е о р е м а 2

Если для модельного гамильтониана из класса (I)-(4) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ при любых a, b существует предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(a,b,\nu,\mu)] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,b,\nu,\mu)], \tag{49}$$

то в каждой точке (ν,μ), в которой существуют производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \nu_m},\quad \frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \mu_i},$$
$$\left.\frac{\partial \tilde{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(a,\nu,\mu)}{\partial a_m}\right|_{a=\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)},\quad (m=1,\dots,r+s;\ i=1,\dots,r), \tag{50}$$

а также существуют производные

$$\frac{\partial f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \xi_p},\ \frac{\partial f_V[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial \xi_p},\ \frac{\partial f_V[H(\nu,\mu)]}{\partial \xi_p},\ \frac{\partial \bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}{\partial \xi_p},\ \frac{\partial \bar{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}{\partial \xi_p} \tag{51}$$

$$(\xi_p = \nu_p, \mu_p;\ m=1,\dots,r+s;\ i=1,\dots,r;\ 1\leqslant p\leqslant r),$$

а производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu',\mu')]}{\partial \xi'_p},\ \frac{\mathcal{D} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\mathcal{D}\xi_p},$$

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\xi_p}\lim_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)], \tag{52}$$

$$(\xi_p = \nu_p, \mu_p;\ 1\leqslant p\leqslant r)$$

существуют в некоторой окрестности ν_p и μ_p соответственно, или/и существуют производные

$$\frac{\partial f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \nu_q},\ \frac{\partial f_V[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial \nu_q},\ \frac{\partial f_V[H(\nu,\mu)]}{\partial \nu_q},\ \frac{\partial \bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}{\partial \nu_q},\ \frac{\partial \bar{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}{\partial \nu_q}, \tag{53}$$

$$(m=1,\dots,r+s;\ i=1,\dots,r;\ r+1\leqslant q\leqslant r+s),$$

а производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu',\mu)]}{\partial \nu'_q},\ \frac{\mathcal{D} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\mathcal{D}\nu_q}, \tag{54}$$

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\nu_q}\lim_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)],\ (r+1\leqslant q\leqslant r+s)$$

существуют в некоторой окрестности ν_q, существуют пределы термодинамических средних операторов A_p и B_p или/и оператора A_q ($1\leqslant p\leqslant r$; $r+1\leqslant q\leqslant r+s$) для модельного гамильтониана $H(\nu,\mu)$, равные пределам при $\varepsilon\to 0$ пределов при $V\to\infty$ соответствующих срений для аппроксимирующего гамильтониана (5):

$$\lim_{V\to\infty}\langle A_p\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{V\to\infty}\langle A_p\rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}(\nu,\mu)},\ \lim_{V\to\infty}\langle B_p\rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}(\nu,\mu)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{V\to\infty}\langle B_p\rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}(\nu,\mu)} (1\leqslant p\leqslant r) \tag{55}$$

или/и

$$\lim_{V\to\infty}\langle A_q\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{V\to\infty}\langle A_q\rangle^{(V)}_{H_{\varepsilon 0}(\nu,\mu)},\quad (r+1\leqslant q\leqslant r+s). \tag{56}$$

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СРЕДНИХ КАК РЕШЕНИЯ МИНИМАКСНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ

Как показано в работе /8/, из соотношения (31) при условиях (34)-(36) с дополнительным требованием существования производных

$$\frac{\partial f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}),\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\mu}_i},\quad \frac{\partial\bar{b}_i^{(\varepsilon,V)}(a,\tilde{\nu},\tilde{\mu})}{\partial a_k}\bigg|_{a=\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu})} \tag{57}$$

следует также, что

$$\bar{a}_k^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}) = \frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\nu}_k^+}, \tag{58}$$

а при условиях (34),(37),(38), что

$$\bar{b}_p^{(\varepsilon,\infty)}(\tilde{\nu},\tilde{\mu}) = \frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\tilde{\nu},\tilde{\mu})]}{\partial\tilde{\mu}_p^+}. \tag{59}$$

Возвращаясь в соотношениях (58),(59) к переменным (ν,μ), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^2}[\bar{a}_p^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)-\bar{b}_p^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)] = \frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial\nu_p^+},\\
&\bar{b}_p^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu) = \frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial\mu_p^+},\\
&\bar{a}_q^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu) = \frac{\partial f_\infty[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial\nu_q^+}.
\end{aligned} \tag{60}$$

Отсюда, учитывая утверждение п.(в) теоремы I и соотношения (47),(48), окончательно находим

$$\begin{aligned}
&\lim_{V\to\infty}\langle A_p\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}[\bar{a}_p^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)-\bar{b}_p^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)],\\
&\lim_{V\to\infty}\langle B_p\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{b}_p^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\\
&\lim_{V\to\infty}\langle A_q\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\bar{a}_q^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu).
\end{aligned} \tag{61}$$

Резюмируя полученные результаты и переформулировав условие

(58) для переменных (ν,μ), убеждаемся в том, что справедлива следующая

Теорема 3

Если для модельного гамильтониана из класса (I)-(4) при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ при любых a, b существует предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\varepsilon 0}(a,b,\nu,\mu)] = f_\infty[H_{\varepsilon 0}(a,b,\nu,\mu)], \tag{62}$$

то в каждой точке (ν,μ), в которой существуют производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \nu_m}, \frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \mu_i},$$
$$\frac{\partial \tilde{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(a,\nu,\mu)}{\partial a_m}\bigg|_{a=\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}, \quad (m=1,\dots,r+s;\ i=1,\dots,r), \tag{63}$$

а также существуют производные

$$\frac{\partial f_V[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \xi_i}, \frac{\partial f_V[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial \xi_p}, \frac{\partial f_V[H(\nu,\mu)]}{\partial \xi_p}, \frac{\partial \bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}{\partial \xi_p}, \frac{\partial \bar{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}{\partial \xi_p},$$
$$\frac{\partial \tilde{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(a,\nu,\mu)}{\partial a_p}\bigg|_{a=\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}, \tag{64}$$
$$(\xi_i=\nu_i,\mu_i;\ m=1,\dots,r+s;\ i=1,\dots,r;\ 1\leq p\leq r),$$

а производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu',\mu')]}{\partial \xi'_p}, \frac{\mathcal{D} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\mathcal{D}\xi_p},$$
$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\xi_p}\lim_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)], \quad (\xi_p=\nu_p,\mu_p;\ 1\leq p\leq r) \tag{65}$$

существуют в некоторой окрестности ν_p и μ_p, соответственно, или/и существуют производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,V)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,V)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \nu_q}, \frac{\partial f_V[H_\varepsilon(\nu,\mu)]}{\partial \nu_q}, \frac{\partial f_V[H(\nu,\mu)]}{\partial \nu_q}, \frac{\partial \bar{a}_m^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}{\partial \nu_q}, \frac{\partial \bar{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}{\partial \nu_q},$$
$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar{b}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \xi_i}, \frac{\partial \tilde{b}_i^{(\varepsilon,\infty)}(a,\nu,\mu)}{\partial a_q}\bigg|_{a=\bar{a}^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)}, (\xi_i=\nu_i,\mu_i;\ m=1,\dots,r+s;\ i=1,\dots,r;\ r+1\leq q\leq r+s), \tag{66}$$

а производные

$$\frac{\partial f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar a^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar b^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\partial \nu_{q'}},\quad \frac{\mathcal{D} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar a^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar b^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]}{\mathcal{D}\nu_q}, \tag{67}$$

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}\nu_q}\lim_{\varepsilon\to 0} f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar a^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar b^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)],\quad (r+1\leqslant q\leqslant r+s)$$

существуют в некоторой окрестности ν_q, существуют пределы термодинамических средних операторов A_p и B_p или/и оператора $A_q (1\leqslant p\leqslant r;\ r+1\leqslant q\leqslant r+s)$ для модельного гамильтониана $H(\nu,\mu)$, равные предельным при $\varepsilon\to$ о значениям следующих комбинаций решений минимаксной задачи (I8)-(20) для предельной функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана $f_\infty[H_{\varepsilon 0}(\bar a^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\bar b^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\nu,\mu)]$ (33):

$$\lim_{V\to\infty}\langle A_p\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^2}[\bar a_p^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)-\bar b_p^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu)],$$
$$\lim_{V\to\infty}\langle B_p\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\bar b_p^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\quad (1\leqslant p\leqslant r), \tag{68}$$

или/и

$$\lim_{V\to\infty}\langle A_q\rangle^{(V)}_{H(\nu,\mu)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\bar a_q^{(\varepsilon,\infty)}(\nu,\mu),\quad (r+1\leqslant q\leqslant r+s). \tag{69}$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе продолжено изучение класса точно решаемых модельных задач с "перекрестным" взаимодействием /3/-/5/. На основе полученных в работе /5/ точных в термодинамическом пределе выражений для свободной энергии исследовано асимптотическое поведение наблюдаемых системы.

Теорема I утверждает возможность асимптотически точного вычисления статистических средних как производных предельной функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана (I5)-(I7) по источникам. В теореме 2 сформулированы условия близости в термодинамическом пределе статистических средних для модельного (I) и аппроксимирующего $H_{\varepsilon 0}(\bar a,\bar b)$ (5) гамильтонианов при $\varepsilon\to +0$. Теорема 3 позволяет свести асимптотически точное вычисление наблюдаемых к решению минимаксной задачи для предельной функции свободной энергии (I3).

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Н.Н.Боголюбову (мл.) за постоянное внимание к работе, а также участникам семинара сектора теории конденсированного состояния ЛТФ ОИЯИ за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

I. N.N.Bogolubov (Jr.), Physica, 32, 933, 1966.
2. Н.Н.Боголюбов (мл.), Метод исследования модельных гамильтонианов, М., Наука, 1974.
3. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов, ОИЯИ, PI7-9774, Дубна, 1976.
4. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов, ОИЯИ, PI7-9775, Дубна, 1976.
5. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов, ОИЯИ, PI7-9776, Дубна, 1976.
6. Н.Н.Боголюбов, ОИЯИ, Д-781, Дубна, 1961.
7. R.B.Griffiths, Journ. Math. Phys., 5, 1215, 1964.
8. А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов, ОИЯИ, P5-10237, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
I9 ноября 1976 года.