объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна



Р14-87-534

А.П.Кобзев, А.Кравчик, Е.Рутковски

# ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В СРЕДЕ ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Направлено в журнал "NIM"

1987

## I. Введение

Первоначально теория излучения Вавилова-Черенкова /I/ (ИВЧ) была развита для случая движения заряженной частицы по бесконечной прямолинейной траектории в безграничной среде. В окончательной формуле, чтобы избежать расходимости, авторам пришлось перейти к энергии, излучаемой с единицы пути длиной $L$ :

$$W=\frac{e^2L}{c^2}\int\limits_{\beta n>1}\omega d\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2n^2}\right), \tag{I}$$

где $e$ - заряд частицы,

$c$ - скорость света в вакууме,

$\beta$ - скорость частицы, отнесенная к скорости света,

$\omega$ - частота излучения.

В работе /I/ отмечалось, что точно такой же результат получается при расчёте энергии, излучаемой частицей в процессе её движения на ограниченном участке пути в прозрачной среде. Позднее ж) такой расчёт был опубликован в работе /2/. Таким образом, формула (I) была получена ещё одним способом. Однако она описывала только часть излучения, испускаемого частицей, а, кроме того, применимость её ограничивалась требованием, чтобы длина траектории частицы значительно превышала длину волны излучения. Причём по мере приближения скорости заряженной частицы к фазовой скорости света это условие становилось всё более жёстким, т.е. требовалось, чтобы длина траектории стремилась к бесконечности.

Таким образом, широко известные теперь свойства ИВЧ относятся, по существу, к предельному случаю бесконечной траектории частицы. Обратимся, например, к порогу ИВЧ, являющемуся его важнейшей характеристикой. Понятие порога вошло в определение ИВЧ как явления, которое возникает, когда скорость заряженной частицы превышает фазовую скорость света в среде, где эта частица движется. Представление о пороге прямо следует из формулы (I), так как при

$$\beta=\frac{1}{n} \tag{2}$$

излучаемая энергия равна нулю, а кроме того, подразумевается, что для всех $\beta n<$ I также $W$ = 0. Порог (2) можно также получить из формулы для характерного угла ИВЧ:

---

ж) В работе /3/ И.М.Франк заметил, что он тоже пользовался таким рассмотрением неоднократно.

$$\theta = \arccos\frac{1}{\beta n} \qquad (3)$$

откуда очевидным образом следует, что ИВЧ наблюдается только при $\beta n > 1$.

Эти элементарные рассуждения представляются совершенно убедительными, если не обращать внимания на то обстоятельство, что формулы (1–3) получены путём решения уравнений Максвелла для заряда, движущегося по бесконечной траектории. Соотношения (1–3) легли в основу конструкции различного рода черенковских счётчиков, а успешное использование последних укрепило веру в то, что эти формулы применимы ко всем реальным конструкциям черенковских счётчиков.

Сообщение о первой экспериментальной проверке порогового условия (2) было очень кратким /4/. Толщина слюдяного радиатора, с помощью которого проводились эксперименты, не указана. Отсюда можно сделать вывод о том, что авторы не усматривали связи порогового условия (2), которое они подтвердили, с толщиной радиатора. Следует отметить, что указание на возможность отклонения экспериментально наблюдаемых характеристик от теоретической зависимости (3), обусловленное конечной толщиной радиатора, появилось задолго до создания первого черенковского счётчика /5/, но оно осталось без внимания.

Вопрос о возможности отклонения от порогового условия (2) впервые возник в работе /6/, а достаточно полный ответ на него был получен в работе /7/. Отмечалось, что в эксперименте пороговое условие (2) выполняется с некоторой точностью, поскольку направленность ИВЧ в реальных радиаторах не может характеризоваться $\delta$-функцией. При ограниченной длине траектории частицы в среде угловая ширина главного максимума имеет конечную величину. Сам по себе этот факт известен ещё из работы /2/, но только в работе /7/ было показано, что главный максимум ИВЧ исчезает полностью при скорости частицы, несколько меньшей, чем пороговая

$$\beta = \frac{1}{n + \lambda/L}, \qquad (4)$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны излучения в вакууме.

В работе /7/ соотношение (4) подтверждено экспериментами с радиатором, толщина которого всего в несколько раз превышала длину волны излучения. Реальные черенковские счётчики обычно бывают значительно длиннее и, может быть, поправкой $\lambda/L$ всегда можно пренебречь? Ответ на этот вопрос дан в работе /8/, где излучение ниже порога наблюдалось в газовом черенковском счётчике длиной 1,5 м. Авторы показали, что учёт допорогового ИВЧ влияет существенно на точность определения состава пучка вторичных частиц в экспериментах



на ускорителях. Следует отметить также, что эксперименты с газовыми черенковскими счётчиками длиной до нескольких десятков миллиметров /9–12/ давали основания сомневаться в точности порогового условия (2) уже довольно давно. В зависимости выхода излучения от давления газа в счётчике авторы работ /9–12/ не обнаружили каких-либо особенностей, которые можно было бы интерпретировать как порог ИВЧ.

Помимо сугубо прикладных задач вопрос о пороге ИВЧ представляет и теоретический интерес с точки зрения возможности существования особого механизма взаимодействия заряженной частицы с зарядами среды, появляющегося при скорости частицы, превышающей фазовую скорость света.

Детальное обсуждение энергетической зависимости выхода ИВЧ при движении заряженной частицы на ограниченном участке траектории и является предметом настоящей работы. В связи с этим целесообразно ещё раз обратиться к расчёту, приведенному в работе /2/. Чтобы избежать длинных цитат, мы приведём в следующем параграфе ход рассуждений, основные формулы, а также их интерпретацию, предложенную И.Е.Таммом.

## 2. Решение, полученное И.Е.Таммом

В работе /2/ задача ставилась следующим образом: заряженная частица движется в однородной прозрачной среде со скоростью $v$ в течение времени от $-t_0$ до $t_0$, а в остальное время находится в покое. Тогда плотность тока можно записать в следующем виде:

$$j_z = ev\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt), \quad \text{если } -vt_0 < z < vt_0, \qquad (5)$$
$$j_z = 0, \quad \text{если } |z| > vt_0.$$

После разложения в интеграл Фурье получается

$$j_z(\omega) = \frac{e}{2\pi}\delta(x)\delta(y)e^{-\frac{i\omega z}{v}}, \quad \text{если } |z| < vt_0, \qquad (6)$$
$$j_z(\omega) = 0, \quad \text{если } |z| > vt_0.$$

Запаздывающий вектор-потенциал, который характеризует поле излучения, определяется по формуле

$$A_\omega(x,y,z) = \frac{1}{c}\int \frac{j_\omega(x',y',z')}{R} e^{-\frac{i\omega n R}{c}} dx'dy'dz', \qquad (7)$$

где

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

Не повторяя вычислений электрического и магнитного полей, а также интеграла по времени от вектора Пойтинга, приведём выражение для полной энергии, излучаемой частицей

$$W=\frac{2e^2\beta^2 n}{\pi c}\int_0^\infty J(\omega)\,d\omega, \tag{8}$$

где

$$J(\omega)=\int_0^\pi\frac{\sin^2[\omega t_0(1-\beta n\cos\theta)]\sin^3\theta\,d\theta}{(1-\beta n\cos\theta)^2}. \tag{9}$$

Выполнив интегрирование (9) и введя условие

$$\omega t_0 >> 1, \tag{I0}$$

И.Е.Тамм отбросил быстроосциллирующие члены типа $\sin[\omega t_0(1\pm\beta n)]$ и получил окончательные выражения

$$J=J_1=\frac{1}{\beta^3 n^3}\left(\ln\frac{1+\beta n}{|1-\beta n|}-2\beta n\right), \quad \text{если } \beta n<1, \tag{II}$$

$$J=J_1+\frac{\pi\omega t_0}{\beta n}\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right), \quad \text{если } \beta n>1. \tag{I2}$$

Ясно, что при $\beta n\to 1$ условие (I0) недостаточно для получения формул (II) и (I2), поэтому потребовалось более жёсткое условие

$$\omega t_0/|1-\beta n| >> 1. \tag{I3}$$

Неравенство ( I3 ) исключает из рассмотрения область, где функция $J(\beta)$ испытывает разрыв, в то время как из ( 9 ) получается простое и конечное выражение при $\beta n$ = I

$$J=\ln(4\gamma\omega t_0)-1, \tag{I4}$$

где $\gamma$ = I,78I.

И.Е.Тамм выделил излучение Вавилова-Черенкова при $\beta n>1$ в виде $J-J_1$. Подставляя эту разницу в формулу (8), мы действительно получим (I). Оставшаяся часть излучения, по мнению автора, обязана своим происхождением мгновенному ускорению частицы в момент $t=\pm t_0$.

Таким образом, формула (I) была получена ещё одним путём. Нас, однако, будет интересовать не столько согласие с результатами основополагающей работы /I/, сколько особенности, обусловленные ограниченной траекторией заряда.

## 3. Полное выражение для излучаемой энергии

В качестве исходной воспользуемся формулой (9) и выполним интегрирование без каких-либо ограничений на длину траектории частицы. Сделав замену переменных

$$x=\omega t_0(1-\beta n\cos\theta), \tag{I5}$$

получим сумму трёх интегралов



$$J_\omega=\left(1-\frac{1}{\beta^2n^2}\right)\frac{\omega t_0}{\beta n}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx+\frac{1}{\beta^3n^3}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin^2 x}{x}-\frac{1}{\omega t_0\beta^3n^3}\int_{x_1}^{x_2}\sin^2 x\,dx, \tag{I6}$$

где

$$x_1=\omega t_0(1-\beta n), \quad x_2=\omega t_0(1+\beta n).$$

Последний интеграл выражается через элементарные функции

$$\int_{x_1}^{x_2}\sin^2 x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\Big|_{x_1}^{x_2}. \tag{I7}$$

Второй интеграл мы не будем, следуя работе /2/, выражать через интегральный косинус и логарифм, поскольку, как будет показано ниже, такая аппроксимация является причиной разрыва функции $J(\beta)$ при $\beta n$ = I. Второй интеграл, значения которого табулированы, например, в /I3/, обозначим $S1$ .

Первый интеграл выражается через интегральный синус и элементарные функции

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=Si(2x)+\frac{\cos 2x}{2x}-\frac{1}{2x}\Big|_{x_1}^{x_2}. \tag{I8}$$

Таким образом, полное выражение для энергии, излучаемой частицей на частоте $\omega$ , имеет вид

$$W=\frac{2e^2\beta^2 n}{\pi c}J_\omega, \tag{I9}$$

где

$$\begin{aligned}J_\omega=&\left(1-\frac{1}{\beta^2n^2}\right)\frac{\omega t_0}{\beta n}\left\{Si[2\omega t_0(1+\beta n)]-Si[2\omega t_0(1-\beta n)]\right\}+\\&+\frac{1}{\beta^3n^3}\left\{S1[\omega t_0(1+\beta n)]-S1[\omega t_0(1-\beta n)]\right\}-\\&-\frac{1}{4\omega t_0\beta^3n^3}\left\{\sin[2\omega t_0(1+\beta n)-\sin[2\omega t_0(1-\beta n)]\right\}+\\&+\frac{\beta n-1}{2\beta^3n^3}\cos[2\omega t_0(1+\beta n)]+\frac{\beta n+1}{2\beta^3n^3}\cos[2\omega t_0(1-\beta n)]-\frac{2}{\beta^2n^2}.\end{aligned} \tag{20}$$

Нетрудно видеть, что члены, содержащие интегральный синус, при больших значениях аргумента дают величину, близкую к $\pi$ , если $\beta n>1$, т.е. сводятся к формуле (I). Следовательно, именно их И.Е.Тамм отнёс к ИВЧ. Существенно, однако, что эти члены сохраняют ненулевое значение при $\beta n<1$, в то время как в формуле (II) они не представлены. С другой стороны, в формуле (20) отсутствуют логарифмические члены, которые и ответственны за разрыв функции $J(\beta)$ при $\beta n$ = I. Более того, многие члены в формуле (20) принимают нулевое значение при $\beta$ = I/$n$ и она значительно упрощается:

$$J = S1(2\omega t_o) + \frac{\sin(4\omega t_o)}{4\omega t_o} - 1. \qquad (2I)$$

## 4. Пример расчёта излучения

Все члены в формуле (20) сохраняют действительное значение при любой возможной скорости частицы. Некоторое представление о вкладе каждого из них может дать расчёт для какого-либо конкретного случая. Для наглядности следует выбрать длину траектории не очень большой по сравнению с длиной волны излучения. Вполне подходят для этой цели исходные параметры из работы /7/: $L$ = I240 нм, $\lambda$ = 400 нм, $n$ = I,58. Укажем для определённости, в какой степени выполняется условие (I3) при различных энергиях электронов:

| E (кэВ) | $\omega t_o/1-\beta n/$ |
|---|---|
| 40 | I0,6479 |
| I40 | 0,33I3 |
| I49 | 0,0004 |
| I60 | 0,3609 |
| 200 | I,38II. |

Результаты расчёта показаны на рис. I. Энергия излучения приведена в эВ·см$^{-I}$·электрон$^{-I}$, так как расчёт выполнен на элемент спектрального диапазона $d\lambda$. Как видно, члены, содержащие интегральные синусы, воспроизводят близкую к линейной зависимость энергии излучения от энергии электронов для $\beta n >$ I, впервые обращаются в нуль при $\beta n$ = I и вносят осциллирующий вклад при $\beta n <$ I. Члены, содержащие $S1$, достигают максимального значения вблизи $\beta n$ = I. Вклад их является определяющим при $\beta n <$ I, а при $\beta n >$ I относительно и абсолютно снижается с ростом скорости электронов. Члены, содержащие косинус, создают заметные в данном масштабе осцилляции, а члены, содержащие синус, не видны. На рис. I показан также вклад члена, не зависящего от энергии частицы. Существенно, что он вносит отрицательный вклад в излучение. Сумма всех членов в формуле (20), как видно, плавно уменьшается вплоть до самых низких энергий, но везде сохраняет положительное значение и не испытывает разрыва в точке $\beta n$ = I.

На рис. 2 можно видеть, с какой точностью формулы (II), (I2) и (I4) аппроксимируют точное выражение (20) в частном случае, который рассматривается в данном параграфе. В области $\beta n >$ I наблюдается хорошее согласие, поскольку в формуле (I2) содержатся все члены, вносящие заметный вклад в излучение, вычисляемое по формуле (20).



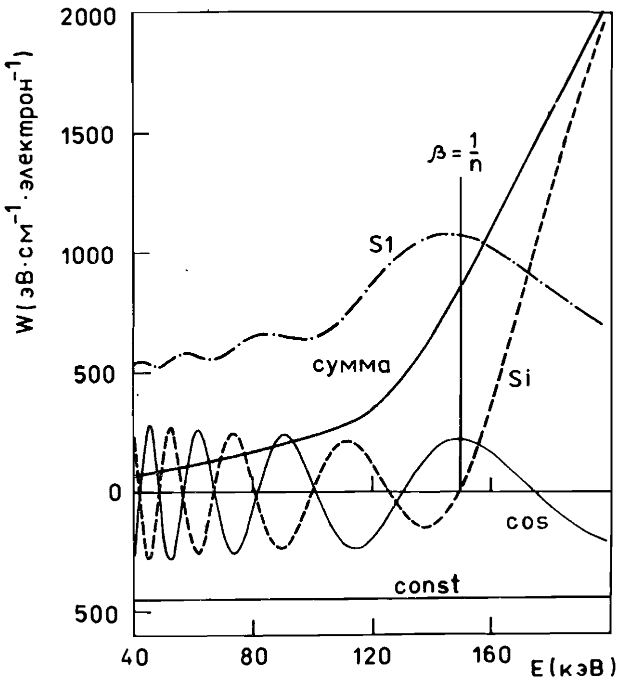


Рис. I. Вклад в энергетический выход излучения различных членов из формулы (20) в частном случае: $L$ = I240 нм, $\lambda$ = 400 нм, $n$ = I,58.

Видно, что согласие имеет место и в области, близкой к $\beta n$ = I, где условие (I3) уже не выполняется, но вклад логарифмических членов ещё мал.

Некоторое расхождение при $\beta n <$ I связано с тем, что в формуле (II) отброшены члены, содержащие косинус и интегральный синус, вклад которых хотя и имеет противоположные знаки, но не компенсируется полностью.

При $\beta n$ = I расчёты по формулам (I4) и (2I) дали хорошее согласие, поскольку аргумент логарифма достаточно велик. При малых значениях аргумента логарифм неудовлетворительно аппроксимирует функцию $S1$. На рис. 3 хорошо видно, что при $\beta n \to$ I логарифмический член в формуле (I4) стремится к $\infty$, в то время как функция $J(t_o)$, вычисляемая по формуле (2I), стремится к нулю, как и должно быть.

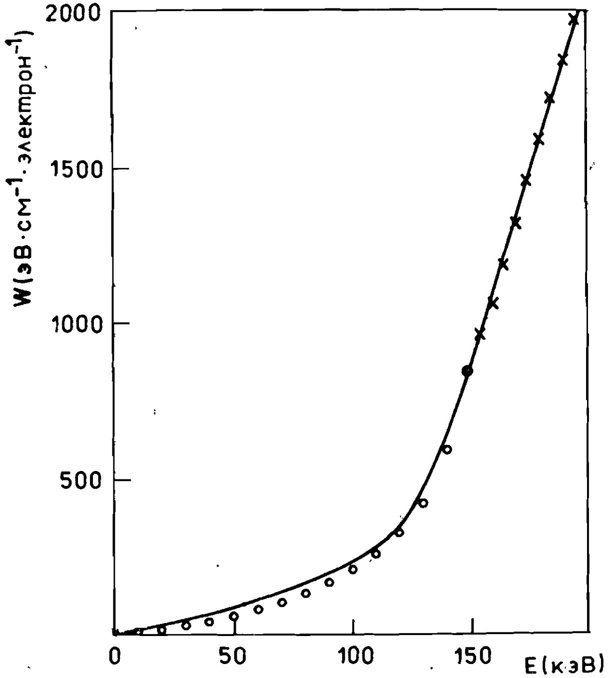


Рис. 2. Аппроксимация энергетической зависимости выхода излучения (20) (линия) с помощью выражений (II) (кружочки), (I2) (крестики) и (I4) (чёрная точка).

Возвращаясь к формулам ( II ) и ( I2 ), необходимо отметить, что логарифмический член может стремиться к $\infty$ при любом конечном значении $\omega t_o$ . Отсюда ясно, что бесконечный разрыв функции $J(\beta)$ при $\beta=\frac{1}{n}$ не имеет физических причин, а связан с аппроксимацией функции $S1$ логарифмом. Область, где аппроксимация некорректна, в работе /2/ исключается с помощью условия ( I3 ).

## 5. Энергия, излучаемая в главном максимуме

В основополагающей работе /I/ в качестве одного из важнейших свойств ИВЧ отмечалось, что излучение наблюдается только в направлении, образующем характерный угол (3) с вектором скорости частицы, а во всех других направлениях оно уничтожается за счёт интерференции.



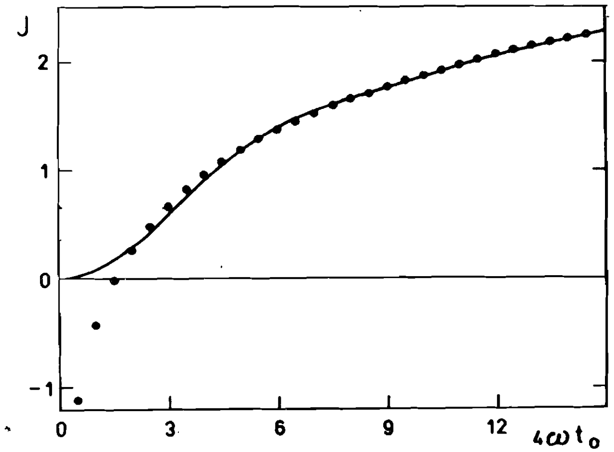


Рис. 3. Аппроксимация формулы (2I) (линия) с помощью выражения (I4) (точки).

Такое представление о направленности ИВЧ возникло как результат решения задачи об излучении заряженной частицы, движущейся по бесконечной траектории. Во всех практических случаях траектория заряда ограничена, и поэтому ИВЧ характеризуется угловым распределением вида (9). Угловое распределение имеет главный максимум, приблизительно совпадающий /6/ с направлением (3), и большее или меньшее количество боковых /I4/.

Поскольку ИВЧ обычно связывают с главным максимумом, а также если иметь ввиду предложенное И.Е.Таммом разделение излучения на две части, обусловленные принципиально различными механизмами взаимодействия налетающей частицы с зарядами среды, представляет интерес проанализировать зависимость интенсивности излучения в главном максимуме от энергии частицы. Главный максимум имеет чёткие границы, соответствующие обращению в нуль числителя в формуле (9) при значениях аргумента синуса $\pm\pi$.

Выполнив интегрирование (9) в указанных пределах, получим

$$W = 0{,}904\,\frac{e^2}{c^2}\,L\,\omega\left(1-\frac{1}{\beta^2 n^2}\right) - \frac{4e^2}{\omega L n^2}\,. \qquad (22)$$

Разумеется, формулой (22) можно пользоваться только тогда, когда обе границы главного максимума находятся в области реальных углов наблюдения, т.е.

$$\beta \geqslant \frac{1}{n-\lambda/L}\,. \qquad (23)$$

Как видно из формулы (2I), первый член в ней с точностью до коэффициента 0,9 совпадает с формулой (I). Вклад второго члена невелик. На границе применимости формулы (22) и при прежних исходных параметрах вклад его составляет всего 0,6% от величины первого члена. Существенно, однако, что даже в главном максимуме член, который И.Е.Тамм выделил как ИВЧ, находится в неразрывной связи с другим членом, который был отнесен к тормозному излучению.

Интересно, что выражения, аналогичные (22), получаются и для всех последующих максимумов. Отличие их состоит только в величине постоянного коэффициента.

## 6. Заключение

Суммируя результаты детального исследования энергетической зависимости выхода излучения, генерируемого при движении заряженной частицы по ограниченной прямолинейной траектории в среде, необходимо отметить следующее:

I. Полное выражение для излучаемой энергии (20) даёт зависимость, плавно изменяющуюся во всём диапазоне возможных значений энергии (скорости) частицы и не имеющую разрыва в точке $\beta = 1/n$.

2. Члены с интегральными синусами, которые И.Е.Тамм выделил как ИВЧ, также дают зависимость, не имеющую разрывов во всём диапазоне энергий частицы.

3. Один член в формуле (20) вносит отрицательный (нефизичный) вклад в излучение, другие члены дают вклад того же знака периодически.

4. Излучение как в главном максимуме, так и в боковых, определяется двумя членами, которые отнесены И.Е.Таммом к двум различным механизмам взаимодействия частицы со средой.

Всё это позволяет сделать выводы:

I. Формулы ( II ), ( I2 ) при условии ( I3 ) и формула ( I4 ) хорошо аппроксимируют энергетическую зависимость ( 20 ), которая не испытывает разрыва в точке $\beta = \frac{1}{n}$ и не имеет каких-либо особенностей, которые можно было бы интерпретировать как порог.

2. Разделение излучения на две части, соответствующие двум различным механизмам взаимодействия заряда со средой, представляется в значительной степени условным, а за пределами, установленными с помощью неравенства ( I3 ), такое разделение вообще невозможно.

Авторы благодарны И.М.Франку и В.К.Игнатовичу за полезные обсуждения и ценные замечания.



ЛИТЕРАТУРА


I. И.Е.Тамм, И.М.Франк. Докл. АН СССР, № 14, 107, (1937).
2. I.Tamm. J.Phys.USSR., 1, 439(1939).
3. И.М.Франк. УФН, 143, III, (1984).
4. J.M.Harding, J.E.Henderson. Phys. Rev. 74, 1560(1948).
5. И.М.Франк. УФН, 30, 149, (1946).
6. А.П.Кобзев. Ядерная физика, 27, 1256, (1978).
7. А.П.Кобзев, И.М.Франк. Ядерная физика, 34, 125, (1981).
8. A.Bodek et al. Z.Phys. C, 18, 289(1983).
9. M.R.Bhiday et al. Proc. Phys. Soc., 72, 973(1958).
10. R.E.Jennings et al. Nucl. Instr. and Meth., 6, 209(1960).
11. D.W.O.Headle et al. J. Opt. Soc., 53, 840(1963).
12. D.K. Aitken et al. Proc. Phys. Soc., 82, 710(1963).
13. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике, Москва, Наука, 627, (1970).
14. V.P.Zrelov et al. Nucl. Instr. and Meth., 215, 141(1983).


Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1987 года.

Кобзев А.П., Кравчик А., Рутковски Е. Р14-87-534
Излучение заряженной частицы, движущейся в среде по ограниченной прямолинейной траектории

Анализируются формулы для энергии, излучаемой заряженной частицей при ее движении на ограниченном прямолинейном участке траектории в прозрачной среде. Показано, что зависимость энергии излучения от скорости частицы не имеет каких-либо особенностей, которые можно было бы интерпретировать как порог. Обсуждается возможность разделения излучения частицы на две части, соответствующие двум различным механизмам взаимодействия налетающей частицы со средой.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

**Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1987**

Перевод О.С.Виноградовой

Kobzev A.P., Kravchyk A., Rutkowski J. P14-87-534
Charged Particle Radiation Along a Finite Trajectory in a Medium

The expressions for the energy emitted by the charged particle moving along a staight line finite trajectory in a transparent medium have been analysed. It has been shown that the dependence of the irradiated energy on the particle velocity lacks peculiarities, which may be treated as a threshold. A possibility of dividing the radiation into two parts caused by different mechanisms of the particle-medium interaction has been considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

**Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1987**