объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р14 - 12073

Е.П.Козлова, Ю.М.Останевич, Л.Чер

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ МАЛОУГЛОВОГО РАССЕЯНИЯ

1979

P14 - 12073

Е.П.Козлова, Ю.М.Останевич, Л.Чер

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ГЕОМЕТРИИ МАЛОУГЛОВОГО РАССЕЯНИЯ

Направлено в "Nuclear Instruments and Methods"

1. Недавно Д.Ф.Р.Мильднер[1], исходя из простых соображений, построил выражения для среднего угла рассеяния и дисперсии аксиально-симметричной геометрии малоуглового рассеяния. Эта же задача была изучена нами[2] путем построения точной функции разрешения и вычисления ее моментов. Сопоставление работ [1] и [2] показало, что простой подход[1] приводит к существенно неверным результатам.

Основная ошибка в [1] связана с тем, что выражение для среднего угла рассеяния

$$\bar{\theta}_1 = \frac{1}{L_2}\left[R_3 + (R_4 - R_3)^2 / 12\bar{R}_3 \right] \qquad /1/$$

/формула 8 в [1]/ построено без учета конечных размеров источника излучения и рассеивающего образца*. Более удовлетворительным приближением для $\bar{\theta}$, найденным при численном анализе задачи в [2], оказалось выражение

$$\bar{\theta}^2 = \bar{\theta}_1^2 + \sigma_\theta^2 , \qquad /2/$$

где $\sigma_\theta^2 = \overline{\theta^2} - \bar{\theta}^2$.

$\bar{\theta}$ оказывается больше θ_1, причем для самых малых углов отличие достигает 10%. Оценка дисперсии с использованием

---

* Далее мы придерживаемся обозначений, принятых в [1] и [2]. R_1 - радиус источника, R_2 - образца, R_3, R_4 - внутренний и внешний радиусы кольцеобразного детектора. L_1, L_2 - расстояния источник-образец и образец-детектор.

/1/ приводит к значению, завышенному вдвое. Использование /2/ вместо /1/ не изменяет основных условий, оптимизирующих эксперимент.

2. Анализ расхождений работ /1/ и /2/ привел нас к еще одному способу вычисления первых моментов в рассматриваемой задаче. Оказывается, задачу можно радикально упростить, выбирая $\overline{\kappa^2} = k_0^2\,\overline{\theta^2}$ в качестве независимой переменной для описания наблюдаемой на эксперименте зависимости. Физически такой выбор является вполне обоснованным, так как изучаемое сечение рассеяния зависит только от четных степеней κ. Непосредственные вычисления для первых двух моментов приводят к следующим выражениям:

$$\bar{x} = \overline{\kappa^2} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \qquad /3/$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_2^2 + (x_4 - x_3)^2) + 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)(x_3 + x_4), \qquad /4/$$

где

$$x_1 = \frac{k_0^2}{2}\frac{R_1^2}{L_1^2};\quad x_2 = \frac{k_0^2}{2}R_2^2\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)^2;\quad x_3 = \frac{k_0^2}{2}\frac{R_3^2}{L_2^2};\quad x_4 = \frac{k_0^2}{2}\frac{R_4^2}{L_2^2}.$$

Очевидно, $\bar{x} \neq 0$ при конечных размерах хотя бы одного из рассматриваемых объектов.

3. Оптимальные соотношения между параметрами можно найти, отыскивая минимум функционала

$$W = \sigma_x^2 + \Lambda\left(I^{-1} - x_1^{-1}x_2^{-1}(x_4 - x_3)^{-1}\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)^2\right), \qquad /5/$$

т.е. минимизацией дисперсии при заданной интенсивности I /Λ - множитель Лагранжа/. W достигает минимума при условиях:

$$x_1 = x_2, \qquad /6а/$$

$$L_1 = L_2, \qquad /6б/$$

$$(\Delta R)^2 = R_1^2 \frac{6\bar{R}^2 + 4R_1^2}{4\bar{R}^2 - \frac{3}{2}R_1^2} \simeq \frac{3}{2}R_1^2 , \qquad /6в/$$

где $2\bar{R} = R_3 + R_4$; $\Delta R = R_4 - R_3$. Условия /6а/ и /6б/ совпадают с найденными Мильдиером /1,3/ и непосредственно следуют из симметрии квадратичных форм /4/ и /5/ относительно переменных x_1, x_2 /и L_1, L_2 /. Оптимальная ширина кольца $\Delta R = \sqrt{\frac{3}{2}} R_1$ оказывается вдвое меньше значения $\sqrt{6} R_1$, приводимого в /1/. Однако при использовании многонитевого кольцевого детектора целесообразно выбрать ΔR настолько малым, чтобы его вкладом в σ_x^2 можно было пренебречь, например $\Delta R \le R_1/3$. Тогда оптимизированная дисперсия имеет следующий вид:

$$\sigma^2_{опт} = 4 x_1 \bar{x} - \frac{16}{3} x_1^2 . \qquad /7/$$

4. При выбранной независимой переменной $x = \overline{\kappa^2}$ оценку и учет искажений, связанных с конечным разрешением, можно получить с помощью соотношения

$$\Phi(\bar{x}) = F(\bar{x}) + \frac{1}{2} F''(\bar{x}) \sigma_x^2 , \qquad /8/$$

где Φ - наблюдаемый закон рассеяния, F - истинный, и отброшен ряд $\sum_{n=3}^{\infty} M_n \cdot F^{(n)}(\bar{x})/n!$, содержащий высшие центральные моменты функции разрешения и высшие производные $F(x)$. Для $F(x) = \exp(-x \cdot R_g^2/3)$ /закон Гинье/

$$\Phi(\bar{x}) = \exp(-\bar{x} \cdot R_g^2/3)(1 + \sigma_x^2 R_g^4/18) . \qquad /9/$$

Для σ_x^2 в виде /7/ и малых искажений $(x_1 R_g^2 \ll 1)$

$$\tilde{R}_g^2 = -3 d\ln\Phi / d\bar{x} = R_g^2 (1 - \frac{2}{3} x_1 R_g^2) , \qquad /10/$$

где $\tilde{R}_g^2$ - наблюдаемый радиус инерции.

5. Дисперсию σ_x^2 функции разрешения $R(\kappa^2)$ можно явно выразить через центральные моменты μ_n /$n = 2,3,4$/ функции разрешения $R(\kappa)$:

$$\sigma_x^2 = 4\overline{\kappa^2}\mu_2 + 4\bar{\kappa}\mu_3 + \mu_4 - 5\mu_2^2 . \qquad /11/$$

Результаты численных расчетов μ_2, μ_4 /2/ показывают, что, с погрешностью не более 5%, в правой части /11/ достаточно удержать первое слагаемое. Комбинируя его с определением μ_2, можно получить явные выражения для первоначальной постановки задачи:

$$\sigma_\kappa^2 = \sigma_x^2 / 4\bar{x} . \qquad /12/$$

$$\bar{\kappa}^2 = \bar{x} - \sigma_x^2 / 4\bar{x} . \qquad /13/$$

При $\Delta R = \sqrt{3/2}\, R_1$ /это условие выполнялось в /2/ / и $x_3 + x_1 = x_1$ /12/ и /13/ преобразуются к виду

$$\sigma_\kappa^2 = (x_1 + x_2)/2 . \qquad /14/$$

$$\bar{\kappa}^2 = x_3 + x_1 + (x_1 + x_2)/2 . \qquad /15/$$

Последнее, очевидно, совпадает с соотношением /2/.

6. Оценка искажений по формуле /8/ позволяет понять, почему аксиально-симметричная геометрия существенно меньше искажает истинный закон рассеяния, чем щелевая. Для щелевой геометрии /8/ приобретает вид

$$\Phi(\overline{\kappa_x^2}) = F(\overline{\kappa_x^2}) + F'(\overline{\kappa_x^2})(\overline{\kappa^2} - \overline{\kappa_x^2}) + \ldots = F(\overline{\kappa_x^2}) + F'(\overline{\kappa_x^2}) \cdot \overline{\kappa_y^2} + \ldots \qquad /16/$$

Здесь $\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = \kappa^2$, и ось x направлена по узкой стороне щели. В /16/, в отличие от /8/, содержится уже первая производная F' с большим множителем κ_y^2. Переход к традиционной переменной $\bar{\kappa}_x$ не меняет сути дела, искажения оказываются пропорциональными уже первой производной истинного закона рассеяния.

Таким образом, имеются 3 возможности для анализа аксиально-симметричной геометрии:
а/ в представлении с $\overline{\kappa^2}$ в качестве независимой переменной;
б/ численный метод вычисления $\bar{\kappa}$, μ_2 и более высоких моментов;
в/ выражения /12, 13/, погрешность которых становится малой при достаточно больших углах рассеяния, но не может быть оценена без численных расчетов по п.б/.

Авторы благодарят Д.Ф.Р.Мильднера за присылку оттиска работы [1] и В.К.Игнатовича за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mildner D.F.R. Nucl. Instr. and Meth. 150, 357 (1978)*
2. *Гладких И.А. и др. ОИЯИ, Р3-11487, Дубна, 1978.*

Рукопись поступила в издательский отдел 11 декабря 1978 года.