



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P13-96-355

М.Д.Шафранов

МЕТОД РЕШЕНИЯ
ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ
ДЛЯ МНОГОПРОВОЛОЧНЫХ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ
И ДРЕЙФОВЫХ КАМЕР

1996

Метод решения основной задачи электростатики
для многопроволочных пропорциональных и дрейфовых камер

Применявшиеся до сих пор методы расчета полей и потенциалов в рабочем объеме многопроволочных камер (МППК) выполнены в предположении, что сигнальные проволочки камеры не ограничены как по числу, так и по длине. По этой причине нельзя получить данные о краевых эффектах МППК, реально применяемых в экспериментах, нельзя найти распределение зарядов на проводниках, электрических полей и потенциалов в рабочем объеме камеры, т.е. невозможно решить основную задачу электростатики.

В настоящей работе описан способ решения этой задачи для многопроволочных планарных детекторов конечных размеров: МППК и дрейфовых камер. Разработан и обоснован алгоритм нахождения решений, на конкретных примерах расчетов показаны его возможности.

Работа выполнена в Лаборатории сверхвысоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод автора

Shafranov M.D.

P13-96-355

Method to Solve the Main Problem of Electrostatics
for Multiwire Proportional and Drift Chambers

All the earlier applied methods to calculate fields and potentials in the working volumes of MWPC have supposed the sense wires not to be limited either in number or length. That is why it is not possible to obtain data on edge effects of MWPC used in experiments or find the charge distribution on the conductors, electric fields and potentials in the working volume of the chamber, i.e., it is impossible to solve the main problem of electrostatics.

This paper gives a description of solving this problem for multiwire planar detectors with finite sizes: MWPC and drift chambers. The algorithm of finding the solutions has been developed and explained, concrete examples of calculations have shown its advantages.

The investigation has been performed at the Laboratory of Particle Physics, JINR.

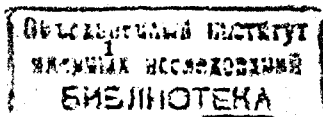
Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996

Выбор оптимального варианта конструкции многопроволочных детекторов, прогнозирование их характеристик нельзя сделать без предварительных расчетов. Только на основе анализа результатов расчетов, всесторонних макетных испытаний достижимы требуемые свойства детекторов с минимальными затратами. При разработке детекторов новых конструкций расчеты играют основную роль, а для детекторов, уже применяемых в практике физических экспериментов, расчеты позволяют лучше понять их свойства. Программы для таких расчетов сложны, их подготовка требует специальных математических знаний, мощной вычислительной техники. Применявшиеся ранее способы расчета характеристик планарных пропорциональных камер выполнены в предположении, что сигнальные проволочки камеры не ограничены по числу и по длине. Настоящая работа показывает, что большинство свойств планарных детекторов можно рассчитать по очень простому и эффективному алгоритму. Способ нахождения решений основной задачи электростатики МППК, предложенный в данной работе, основан на методе зеркальных изображений, или, точнее, на методе нахождения решений задач электростатики по граничным условиям.

Обоснование метода проведено с подробным анализом таких основных характеристик, как потенциалы сигнальных проволочек, распределение электрических полей в объеме камеры, и анализом хода силовых линий поля и эквипотенциалей на наиболее критических участках камеры. К таким участкам относятся области крайних проволочек. Предложен простой метод построения эквипотенциалей и силовых линий поля. Метод можно использовать в системах проводников, заряды которых известны или поддаются расчетам. Возможности применения алгоритма показаны на примере решения некоторых задач и определения основных параметров детекторов с высокой степенью точности. Развитый подход позволяет рассчитать характеристики планарных пропорциональных и дрейфовых камер конкретных размеров.

Планарные многопроволочные пропорциональные камеры

Планарные многопроволочные пропорциональные камеры (МППК) являются одними из основных координатных детекторов в экспериментах на выведенных пучках ускорителей. Типичная МППК состоит из плоской сетки сигнальных проволочек, расположенных эквидистантно и параллельно друг другу. Эта сетка проволочек размещается между двумя катодными плоскостями, находящимися под высоким отрицательным напряжением. Широкое применение МППК стало возможным благодаря сравнительной простоте конструкции и технологии изготовления, их хорошему пространственному разрешению. Массовое применение в эксперименте привело к относительно невысокой стоимости одного канала регистрации. Тщательные и всесторонние исследования как свойств самих МППК, так и методов съема информации [1-4] также способствовали широкому



использованию камер. В практике применения пропорциональных камер выработался и некоторый стандарт основных размеров, определяющих характеристики камеры. Так, расстояние между сигнальными проволочками s , определяющее пространственное разрешение, составляет 2мм. Уменьшение этого расстояния для повышения пространственного разрешения приводит к необходимости уменьшения диаметра сигнальных проволочек, увеличению рабочих напряжений и связанных с этим рядом трудностей как в изготовлении, так и в эксплуатации камер [3]. Поэтому увеличение разрешения за счет увеличения числа проволочек на единицу длины осуществимо лишь для камер небольшого размера.

Повышение пространственного разрешения вдвое возможно и при использовании камер большого размера. Но для этого необходимы уже две идентичные камеры. Эти две камеры располагаются параллельно между собой на минимально возможном расстоянии друг от друга. При этом сигнальные проволочки камер также параллельны между собой и относительно друг друга смещены на половину расстояния между сигнальными проволочками [5]. Естественно, такая система позволяет вдвое увеличить разрешение по сравнению разрешением одной из камер, составляющих эту систему. Но этот путь повышения разрешения, как и первый, с необходимостью требует увеличения числа каналов регистрации во столько раз, во сколько увеличивается число проволочек на единицу длины.

В начале семидесятых годов вопрос о числе каналов регистрации из-за достаточно высокой стоимости одного канала стоял очень остро. Не случайно, что желание сократить число каналов регистрации при обеспечении точностей не хуже, чем в МППК, послужило одной из причин развития методики дрейфовых камер (ДК) [1,6]. Дальнейшие методические исследования с дрейфовыми камерами, их газовым наполнением [7] позволили существенно увеличить координатную точность дрейфовых камер [8-10].

Возможно ли увеличить пространственное разрешение пропорциональной камеры вдвое без увеличения числа проволочек на единицу длины, и, следовательно, без увеличения числа каналов регистрации? Ответим на поставленный вопрос. Рассмотрим случай, когда четные проволочки смещены к одной, а нечетные - к другой катодной плоскости в отличие от случая смещения всех сигнальных проволочек в направлении к одной из катодных плоскостей (асимметричная камера) [1,2]. Пусть линейная плотность заряда каждой проволочки равна σ , а катодные плоскости находятся под нулевым потенциалом. В начальном состоянии все проволочки находятся в медианной плоскости на эквидистантном расстоянии между собой. На катодной плоскости индуцируются заряды, связанные с зарядами соответствующей проволочки. Все участки катодных плоскостей, заряды которых связаны с зарядами соответствующей проволочки, равны между собой. Рабочая ячейка камеры в сечении является прямоугольником с размерами $2s \times L$ (рис.1а), где s - расстояние между соседними проволочками в ряду, а L - расстояние между плоскостью катода и плоскостью проволочек.

Проанализируем, что произойдет при смещении нечетных проволочек по направлению к первой катодной плоскости с одновременным перемещением четных проволочек точно на такое же расстояние в противоположном направлении.

Количество зарядов, индуцируемых этими проволочками на первой катодной плоскости, будет увеличиваться. Участки этой плоскости со связанными на них зарядами от соответствующих нечетных проволочек также будут увеличиваться. Для тех же самых проволочек соответствующие участки противоположной плоскости катода будут сокращаться вместе с уменьшением числа связанных зарядов. Все сказанное справедливо и для четных проволочек смещенных в противоположном направлении. На некотором расстоянии d между плоскостями нечетных и четных проволочек на катодной плоскости, ближайшей к проволочкам, участки, занимаемые индуцируемыми зарядами этих проволочек, будут в три раза превышать соответствующие участки другой катодной плоскости (рис.1б). Рабочая ячейка в сечении теперь уже не является прямоугольником, а будет представлять фигуру, подобную силуэту талии дельфина.

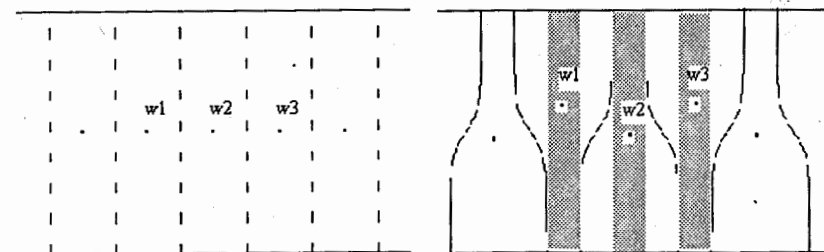


Рис. 1. Две схемы базовой ячейки МППК. Слева показана схема стандартной камеры. Справа - камера со смещенными проволочками, заштрихованы области кластеров проволочек w_1 , w_2 и w_3 .

Как будет осуществляться регистрация частиц в такой камере со смещенными проволочками? Возможны три случая прохождения частиц и их регистрации сигнальными проволочками. Рассмотрим зону проволочки w_2 на схеме, представленной на рис.1б. Если частица проходит через заштрихованную зону (рис. 1б) около проволочки w_2 , то сигнал на регистрирующую систему поступит только от этой проволочки. Прохождение частиц в незаштрихованных зонах между проволочками w_1 и w_2 или w_2 и w_3 сопровождается сигналами как от проволочки w_2 , так и от проволочки w_1 или w_3 . В этих двух случаях регистрируются двойные кластеры w_1, w_2 или w_2, w_3 .

Как определить расстояние d между нечетными и четными проволочками, при котором участки катодных плоскостей, ближайшие к соответствующим проволочкам, будут в три раза превышать участки на другой катодной плоскости. Решение поставленной задачи было выполнено способом, основанном на методе изображения зарядов. Некоторые результаты расчетов по этой задаче и задачам, связанным с дрейфовыми камерами, представлены в [11]. В отличие от классического подхода к решению задачи способ основывался на конечном числе изображений. Обоснование способа дано ниже.

Электростатика

Напомним некоторые положения электростатики, которые нам будут полезны в дальнейшем. Рассмотрим произвольную систему заряженных проводников, находящихся в некотором ограниченном пространстве, свободном от других зарядов. Пусть полный заряд k -проводника равен Q_k , а каждый k -проводник характеризуется определенным значением потенциала φ_k . В подобной системе целесообразно приписать бесконечно удаленным точкам пространства потенциал, равный нулю. Поверхность каждого проводника является эквипотенциальной, электрическое поле на его поверхности E определяется через градиент потенциала $E = -\text{grad } \varphi$.

Вектор напряженности электрического поля в любой точке поверхности проводника направлен по нормали к плоскости, которая является касательной к поверхности проводника в этой точке. При этом нормальная составляющая поля E_n связана с поверхностной плотностью зарядов t следующим соотношением:

$$t = \varepsilon_0 E_n, \quad (1)$$

где ε_0 - электрическая постоянная. Поверхностный интеграл от t равен полному заряду Q_k этого проводника. Соотношение (1) единственным образом связывает E и t , но это совсем не означает, что только t является источником поля E . Электрическое поле E создается всеми зарядами системы, а поверхностный заряд является лишь частью зарядов, создающих это поле. Так как связь между полем и потенциалом выражается соотношением $E = -\text{grad } \varphi$, все сказанное относится и к потенциалу φ . Потенциал на поверхности данного проводника так же, как и напряженность поля определяется всеми зарядами всех проводников. Зависимость потенциала φ и электрического поля E от расстояния между зарядом и местом наблюдения для точечного заряда определяются соотношениями: $\varphi \sim 1/r^2$, а $E \sim 1/r$. Следовательно, удаленные заряды оказывают большее влияние на величину потенциала в точке наблюдения, чем на величину электрического поля.

На практике, в основном, приходится иметь дело с решением задач, для которых не известны распределения зарядов, но заданы формы проводников, их относительное расположение в пространстве и потенциалы. Конечной целью решения основной задачи электростатики является определение в пространстве потенциала $\varphi(r)$ электрического поля $E(r)$, а также нахождение распределения зарядов на проводниках по значению E из соотношения (1). При этом найденное решение $\varphi(r)$ должно принимать заранее задаваемое значение во всех точках на каждой из поверхностей проводников. Теоремой единственности [12,13] в теории электростатики доказывается, что поставленная таким образом задача имеет единственное решение. По сути дела мы имеем дело с граничной задачей, в которой значение функции определено на заданных границах.

Поиск решения в аналитической форме, как правило, является сложной математической задачей. Применение теоремы единственности существенно облегчает нахождение решений. Предположим, что каким-либо способом (хотя бы путем догадки) удалось найти выражение для φ , удовлетворяющее поставленным условиям, тогда теорема об однозначности позволяет сделать заключение, что найденное выражение является единственным и поэтому истинным решением задачи.

Метод изображений зарядов

Решение некоторых задач электростатики опирается на хорошо развитый в математическом смысле метод решения основной задачи электростатики - метод изображений. Метод можно применить для нахождения распределений электрических полей и потенциалов в рабочем объеме планарных многопроводочных детекторов, таких как пропорциональные камеры [2,14,15]. Самой простой системой, иллюстрирующей применение метода изображений, является система с точечным зарядом Q , находящимся на расстоянии h над поверхностью плоского проводника. Решение основной задачи электростатики методом изображений для этой системы рассматривается практически во всех учебниках по электростатике. Предположим, что плоскость P является поверхностью проводника неограниченных размеров с нулевым потенциалом. Какова для этого случая конфигурация электрического поля, как решается поставленная задача? Ответ можно получить с помощью некоторого искусственного приема. Поиск решения сводится к решению другой задачи, а именно, к задаче с двумя точечными разноименными зарядами. Электрическое поле, образованное разноименными зарядами Q и $-Q$, всюду перпендикулярно плоскости P . Плоскость P расположена на равном расстоянии между зарядами и перпендикулярна к прямой, соединяющей эти заряды (рис.2). Выбрав расстояние от плоскости до

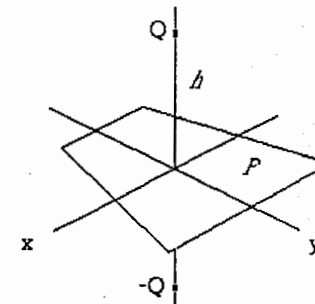


Рис. 2 Точечный заряд Q , расположенный над бесконечно большой плоскостью проводника, и его зеркальное изображение $-Q$.

заряда в соответствии с требованиями сформулированной задачи, можно убедиться, что конфигурация поля между зарядом Q и плоскостью P полностью соответствует требованиям поставленной задачи. Действительно, электрическое поле всюду перпендикулярно к поверхности проводника, а в окрестности заряда Q оно соответствует полю точечного заряда. Поскольку требования теоремы единственности выполнены, мы можем заключить, что найденное решение является единственным и верным.

Величину и направление поля можно вычислить, вернувшись к задаче с двумя зарядами, применяя для решения закон Кулона для точечного заряда и принцип суперпозиции электрических полей. По соотношению (1) можно получить распределение плотности зарядов на плоскости. С помощью интегрирования можно убедиться, что полный заряд, индуцированный на плоскости, будет равен $-Q$. По традиции описанный метод решения называется методом изображений, поскольку отрицательный заряд $-Q$ можно рассматривать как зеркальное изображение заряда Q , хотя точнее этот метод следует называть методом решений по граничным условиям. Метод изображений, по существу, основан на подгонке потенциала под заданные граничные условия. Мы стараемся найти такую конфигурацию зарядов, которая создает требуемую конфигурацию электрического поля в интересующей нас части пространства. В этом случае найденное решение является правильным и единственным в соответствии с теоремой единственности. Такой вывод очевиден с физической точки зрения. Если решение не одно, то будет не один потенциальный рельеф. В этом случае в каждой точке поле E будет неоднозначным, что является физическим абсурдом. В соответствии с теоремой единственности заряд на поверхности проводника распределен единственным образом. Это следует из (1). Единственность поля E определяет единственность распределения заряда на поверхности проводника.

Распространим метод на систему, состоящую из точечного заряда Q , расположенного между двумя бесконечно протяженными плоскими проводниками, параллельными между собой. Плоскости находятся под нулевым потенциалом. Заряд Q находится на расстояниях, равных s и g от этих плоскостей (пусть $g < s$). Для этого случая конфигурация электрического поля определяется знакопеременной бесконечной последовательностью зарядов, являющихся изображением исходного заряда (рис.3). Случай бесконечно длинного положительного линейного заряда mq с линейной плотностью s , расположенного на расстоянии g и s от двух бесконечно протяженных плоскостей с нулевым потенциалом на каждой плоскости, представлен на рис. 4. Электрическое поле, образованное протяженным линейным зарядом, определяется бесконечной последовательностью знакопеременных линейных зарядов с той же линейной плотностью s . В сечении, образованном плоскостью, перпендикулярной линейному заряду, эта знакопеременная последовательность представлена на рис.3б. На нем знаками $+$ и $-$ обозначены линейный заряд и его изображения в плоскости сечения.

Рассмотрим систему параллельных протяженных линейных зарядов, находящихся между протяженными же параллельными между собой плоскостями с нулевым потенциалом. Пусть линейные заряды имеют разные знаки, разную величину и размещены на различном расстоянии друг от друга. Легко понять, что

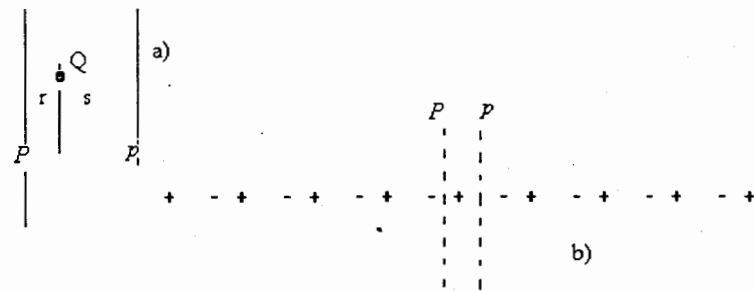


Рис. 3. Точечный заряд Q между двумя бесконечно большими плоскими проводниками P и p (а). Бесконечная последовательность знакопеременных зарядов Q , определяющая конфигурацию электрического поля, создаваемого зарядом Q между плоскостями P и p .

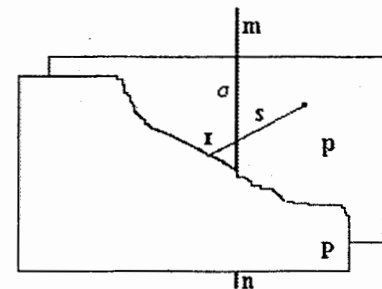


Рис. 4. Линейный заряд на бесконечно длинном проводнике между двумя ограниченными по размеру проводящими плоскостями P и p .

такая система зарядов образует электрическое поле, которое описывается как поле от бесконечной знакопеременной последовательности линейных зарядов, параллельных исходным линейным зарядам. Для случая равных положительных линейных зарядов, размещенных в одной плоскости между параллельными плоскостями и эквидистантно между собой, мы имеем дело с прообразом многопроволочной пропорциональной камеры [1]. Если же, например, все четные линейные источники имеют положительные одинаковые по величине заряды, а нечетные линейные источники несут заряды отрицательного знака, а те и другие источники размещены эквидистантно между собой и проводящими плоскостями, то мы имеем дело с прообразом простейшей планарной дрейфовой камеры [6].

Решение задач о протяженных линейных зарядах между протяженными плоскостями основано на развитых в методах математической физике способах решения подобных задач. Для нахождения решений системы линейных источников, создающих те или иные поля и занимающих все пространство, разработан строгий математический аппарат [16,17].

В практике физического эксперимента мы всегда имеем дело с линейным зарядом (проволочка пропорционального счетчика, пропорциональной или дрейфовой камеры) ограниченной длины. Плоскости, между которыми заключены проволочки счетчиков и всевозможных камер, также ограничены по размерам. Таким образом, решая задачу с протяженными объектами [16,17], мы, по сути, получаем приближенные решения для наших реальных объектов, пространственно ограниченных. Правомерность перенесения решений, найденных для протяженных объектов на объекты, ограниченные по размерам, оправдывается при некоторых обстоятельствах. Для планарных многопроволочных камер (МППК) таким обстоятельством является тот факт, что в них расстояния между соседними проволочками, несущими линейные заряды, а также между катодными плоскостями во много раз меньше размеров камеры. Именно на основании этого расчеты [2,14] можно считать справедливыми для МППК, или, во всяком случае, для их центральных областей. Результаты расчетов [2] приведены как в самой публикации, так и в обзоре [3], посвященном многопроволочным пропорциональным и дрейфовым камерам.

Вообще точные решения уравнений физики могут быть получены только для ограниченного круга задач. На практике всегда имеют дело с приближенным решением. Используются три разных метода: метод теории возмущений, вариационный и вариационно-итерационный (В-И метод). Последний обладает многими преимуществами, в том числе тем, что он позволяет по ходу расчетов делать оценку погрешности для каждой стадии вычислений, это его свойство, пожалуй, является наиболее важным [18].

Обоснование метода поиска решений методом изображений при ограниченном числе изображений

Остановимся на методах решений, примененных в [14] и [2] для МППК и дрейфовых камер только для иллюстрации их сложности, из-за которой часто теряется физический смысл тех или иных математических действий. И в том и в другом случае решение ищется в предположении неограниченной длины сигнальных проволочек. В этом случае потенциал в рабочем объеме не зависит от координаты вдоль проволочки, и проблема решения сводится к двумерному случаю. Условие неограниченности числа сигнальных проволочек позволяет воспользоваться хорошо развитыми рецептами решения поставленной задачи с применением конформных преобразований на комплексную плоскость [16,17].

В [14] решение поставленной задачи искалось в аналитической форме в виде некоторой потенциальной функции $W(z)=V(z)+iU(z)$. Действительная часть функции $V(z)$ описывает потенциал, а $U(z)$ - электрическое поле. $V(z)=const$ является уравнением эквипотенциала и $U(z)=const$ - уравнением линии электрического поля, проходящей через точку с координатой z . Функция $W(z)$ была найдена с помощью конформных отображений эллиптических функций Якоби [19] и преобразования вида $w=sn(z)$. Здесь sn - эллиптический синус, $z=x+iy$ - координата на комплексной плоскости. Система координат выбрана следующим способом: ось x

лежит в плоскости проволочек и им перпендикулярна, ось y направлена по нормали к плоскости проволочек. Окончательный вид искомой потенциальной функции после ряда преобразований:

$$W(z) = -2\sigma \ln \frac{\operatorname{sn} z - i/\sqrt{k}}{\operatorname{sn} z + i/\sqrt{k}} \quad (2)$$

Автором [2] решение найдено для конкретной конфигурации также в виде комплексного потенциала $y_s(z)$ в такой же системе координат, но с использованием тэта-функций. Существует связь эллиптических и тэта-функций. Эллиптические функции $\operatorname{sn}(z)$ можно построить из 4 тэта-функций через их соотношения [19]. Способ решения с помощью комплексного потенциала $y_s(z)$ дан в [17]. После ряда преобразований и ограничения по степеням разложения функции $y_s(z)$ использовалось следующее приближенное значение комплексного потенциала:

$$y_s(z) \approx (2pL/s) - 2\ln[2 \sin(pz/s)] \quad (3)$$

В окончательном виде решение в аналитической форме представлено в обзоре [3] и для потенциала имеет следующий вид:

$$V(x, y) = \frac{CV_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{2\pi L}{s} - \ln[4(\sin^2 \frac{\pi x}{s} + \operatorname{sh}^2 \frac{\pi y}{s})] \right\} \quad (4)$$

где $V(a)=V_0$ - напряжение на поверхности сигнальной проволочки, $V(L)=0$ - напряжение на катодной плоскости, $C = \frac{2\pi\epsilon_0}{(\pi L/s - \ln(2\pi a/s))}$ - удельная емкость проволочки.

В [2] были рассчитаны удельные емкости системы проволочка - катод, эффекты, связанные с изменением диаметра проволочек, со смещением одной из проволочек в плоскости проволочек и в направлении, ей перпендикулярном, и др.

Возвратимся к обоснованию решения основной задачи электростатики для МППК конкретных конечных размеров методом изображений. Собственно метод изображений для решения любой задачи требует выполнения простого суммирования действий всех зарядов и всех их изображений. Но при этом для решения задачи, в соответствии с теорией электростатики, суммирование должно быть выполнено по бесконечному числу изображений. Кстати, отсюда и возникла необходимость поиска и обоснования решений в аналитической форме. Проанализируем возможность выполнения задачи непосредственным суммированием, но по ограниченному числу изображений. Реализация такого подхода позволила бы упростить решение некоторых вопросов. При ограниченном числе изображений отпадает необходимость создания специального математического аппарата, подобного рассмотренному в [16,17]. При этом решение ищется с помощью чисто алгебраических операций, исключаются сложные расчеты. Реализация метода позволяет решить задачу о красных эффектах в МППК, которую нельзя решить способами, рассмотренными в [16,17].

Возможность решения поставленной задачи методом изображений при непосредственном суммировании *ограниченного числа изображений* следовала уже из чисто физических соображений.

На рис. 5 показано medianное сечение МППК. Между двумя пунктирными линиями (место расположения катодных плоскостей) знаками + обозначены анодные проволочки. На некотором расстоянии от плоскости анодных проволочек справа показано ее изображение с номером k . На расстоянии g находится изображение положительных линейных зарядов с номером n . За ним еще два знакопеременных изображения с номерами $(n+1)$ и $(n+2)$. Далее следуют изображения плоскостей и так до бесконечности. То же самое необходимо распространить на левую половину. В соответствии с методом изображений потенциал и электрическое поле в любой точке внутри объема, ограниченного катодными плоскостями, а также на самих плоскостях, определяется суммированием

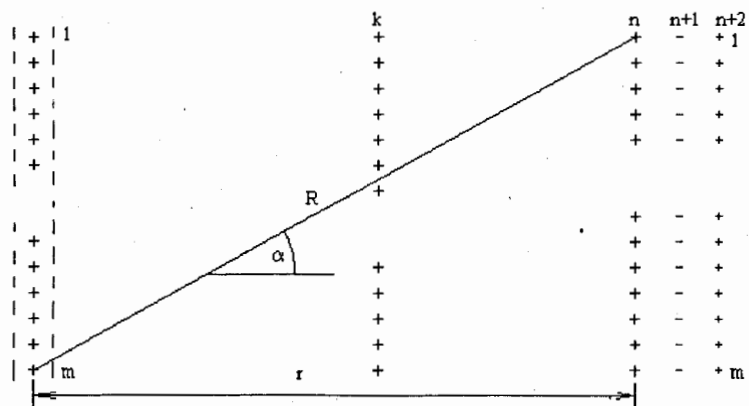


Рис. 5. Схема МППК из m проволочек и последовательность знакопеременных линейных зарядов, занимающих часть пространства.

электрических полей и потенциалов, создаваемых всем бесконечным числом линейных источников.

Предположим, что расстояние между плоскостью анодных проволочек и ее n -ым изображением g отличается незначительно от расстояния между первым линейным источником этого изображения и последней анодной проволочкой. На рис. 5 оно равно R . Условие $g \cong R$ выполняется, если $\sin \alpha \cong tg \alpha$. С точностью 0,1% это соответствует углу $\alpha=0,045$ рад, при $\alpha=0,1$ рад обеспечивается точность 0,5%. Для камеры из m анодных проволочек при точности не хуже чем 0,1% можно записать следующее условие для g : $g > 20(m-1) \times s$. С учетом того, что $g = 2Lp$, общее число изображений n для полуплоскости $x > 0$ должно удовлетворять следующему соотношению:

$$n > 10(m-1) \times s/L. \quad (5)$$

Запишем это соотношение для удобства пользования в другом виде, а именно: $n > N$, где $N=10(m-1) \times s/L$. Из соотношения $N=10(m-1) \times s/L$ следует, что N практически пропорционально m . Возникает вопрос, на каком минимальном значении m можно остановиться, чтобы при решении поставленной задачи получать несмещенные значения величин полей и потенциалов. Некоторые следующие результаты расчетов, представленные в [2], оставшихся вне поля зрения ее автора с интересующей нас точки зрения, помогают ответить на поставленный вопрос о величине m .

1. Величина емкостной связи $c(j)$ между выбранной проволочкой ($j=0$) и соседними проволочками j уменьшается почти на 3 порядка для $j=11$.

2. Относительное изменение заряда $\Delta q(j)/q$ проволочки с номером $j=10$ при смещении проволочки ($j=0$) уменьшается практически аналогично.

Из анализа этих результатов следует, что число проволочек уже можно ограничить при значениях $m \sim 20-25$.

Выполнение соотношений (5) приводит к некоторым следствиям. Первое из них: изменение потенциала $D\varphi(n,i)$ на поверхности любой i -й проволочки от любого изображения из плоскости с номером $n > N$ будут равны между собой с заранее задаваемой и вполне определенной степенью точности. В еще большей мере это справедливо для вклада следующей плоскости изображений в абсолютную величину электрического поля: $DE(n,i) \cong \text{Const}$.

Вторым очень важным следствием соотношения (5) является следующее. При выполнении условия (5) вычисленные значения потенциала в любой точке, где предполагается расположить катодную плоскость, равны между собой. Потенциал определяется с точностью до некоторой аддитивной постоянной, которая не играет роли при вычислении значения $-\text{grad } \varphi$, т.е. величины электрического поля E . Возьмем в качестве этой аддитивной постоянной вычисленное значение потенциала в плоскости расположения катода, но с обратным знаком. Мы получим в этом случае нулевой потенциал на катодных плоскостях. Этим самым выполняется *первое граничное условие* при нахождении решений методом изображений с их ограниченным числом.

Суммируя вычисленное значение потенциала на поверхности проволочки с такой аддитивной постоянной, получим разность потенциалов между поверхностью проволочки и катодом.

Если выполнено соотношение (5), то тем самым выполняется и простое неравенство $L \ll g$. Возьмем $n+1$ изображение и пойдем расчетом изменения потенциалов катода и анодных проволочек, создаваемые этим изображением. В результате получим, что изменение потенциала в любой точке катодной плоскости от этого изображения равно изменению потенциала на поверхности любой анодной проволочки с точностью, которую мы зададим выбором числа изображений n .

При выполнении соотношения (5) и правильном выборе величин линейных плотностей зарядов $s(i)$ для всех $n > N$ разность потенциалов промежутка катод - поверхность каждой анодной проволочки i является постоянной величиной $v(i) = \text{const}$. Тем самым выполняется *второе граничное условие*. Поэтому, подбирая соответствующие величины линейных зарядов $Q(i)$, методом изображений и

последовательных приближений можно решить основную задачу электростатики для МППК с ограниченным числом проволок и их изображений. Отсюда получаем алгоритм расчетов характеристик МППК.

Алгоритм решенй задачи

1. Присвоение начального значения линейной плотности заряда $s = 1/m$ всем линейным источникам.
2. Вычисление потенциалов на одной из катодных плоскостей в точках пересечения нормали к этой плоскости, проходящей через центр соответствующей проволоки (точка А рис.6).

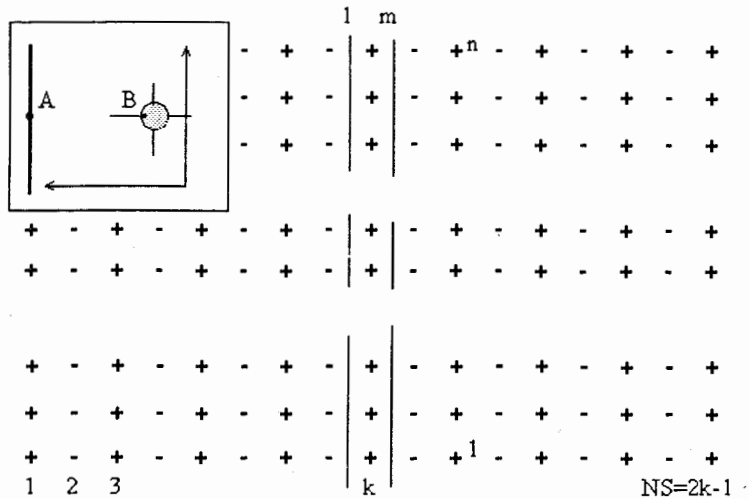


Рис.6. МППК из n проволок, образованная катодными плоскостями

1 и m. Конфигурация электрического поля, создаваемого зарядами проволок камеры, определяется знакопеременной последовательностью NS слоев линейных зарядов. Вставка поясняет способ выбора точек А и В, в которых производится вычисления потенциалов системы проволока - катод.

3. Вычисление потенциала каждой проволоки на поверхности (точка В рис.6)
4. Определение разности потенциалов между проволокой и катодом $U_i(A, B)$ в точках А и В.

5. Вычисление новых значений линейных плотностей s из соотношений: $\sigma_i(k+1) = \sigma_i(k) / U_i(k+1)$, где i - номер проволоки и k - номер итерации.

6. Нормирование всех полученных значений σ_i :

$\sigma_i = \sigma_i(k+1) / \sigma_0(k+1)$, где $\sigma_0(k+1)$ - новое значение линейной

плотности центральной проволоки. Индекс "0" во всех случаях относится к центральной проволочке.

7. Нормирование всех новых значений $U_i : U_i = U_i(k+1) / U_0(k+1)$ для анализа, оценки погрешности и т.д., при необходимости расчет может быть продолжен, начиная со второго этапа.

8. Выполнение дальнейших расчетов при достижении заранее заданной погрешности δU в определении относительных значений U .

При постижении заданной погрешности δU рассчитываются величины потенциалов, электрических полей в объеме элементарной ячейки камеры, погонные емкости проволок по отношению к катоду, эквипотенциали, карта силовых линий электрического поля, другие характеристики системы.

Поясним, каким образом вычисляется погонная емкость проволок камеры. В соответствии с предложенным алгоритмом определяется линейная плотность заряда $s(i)$ вдоль каждой i проволоки. При такой линейной плотности заряда вычисляется разность потенциалов поверхность проволоки - катод U (пункты 4 и 6 алгоритма). Тогда можно вычислить погонную емкость C проволоки, по отношению к катоду в единицах пФ/м, $C(i) = 2\pi \epsilon_0 s(i) / U$, ϵ_0 - электрическая постоянная, $\epsilon_0 = 8.854$ пФ/м.

Электростатика стандартной пропорциональной камеры (пример применения метода)

В качестве прототипа возьмем МППК со стандартным расстоянием между проволоками $s = 2$ мм, расстояние между плоскостью сигнальных (анодных проволок) и катодной плоскостью $L = 8$ мм. Именно для камеры с такими величинами s и L выполнены расчеты, результаты которых опубликованы в [2,3]. Выбранные размеры s и L позволяют сравнить получаемые результаты вычислений при ограниченном числе проволок и их изображений с опубликованными данными. При расчетах, выполненных в [2], предполагалось бесконечное число проволок (линейных зарядов) неограниченной длины, а также бесконечное число их изображений в соответствии с требованием математического аппарата [16,17].

Наиболее просто находится решение для медианной плоскости камеры, расположенной перпендикулярно плоскости сигнальных проволок. Решим задачу именно для этого случая. В медианной плоскости в силу симметрии действует только составляющая электрического поля, направленная вдоль радиуса проволоки. Выберем систему координат, начало системы разместим в центре проволоки длиной $2L$ (рис. 7). Направим ось Z по оси проволоки. В силу осевой симметрии потенциал и электрическое поле, создаваемые линейным зарядом проволоки, зависят только от расстояния до центра проволоки r и координаты z .

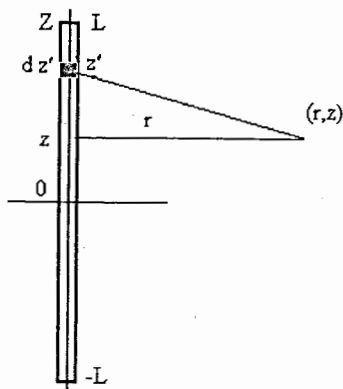


Рис. 7. Линейный заряд конечной длины.

Рассмотрим плоскость, проходящую через точку с координатами r и z и ось Z . Заряд элемента длины dz' , равный $s \times dz'$ (s - линейная плотность заряда), создает в точке (r, z) следующий потенциал:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}}. \quad (6)$$

Следовательно, потенциал φ , создаваемый всей заряженной нитью, получается интегрированием по z' в пределах от $-L$ до L :

$$\varphi = \int_{-L}^L \sigma dz' / 4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + (z - z')^2}, \quad (7)$$

$$\varphi = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2}}{z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2}} \right). \quad (8)$$

Компоненты напряженности электрического поля E_z и E_r получаются дифференцированием по z и r :

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - L)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + L)^2}} \right), \quad (9)$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z - L}{\sqrt{r^2 + (z - L)^2}} - \frac{z + L}{\sqrt{r^2 + (z + L)^2}} \right). \quad (10)$$

Для медианной плоскости ($z=0$) составляющая электрического поля вдоль оси z в силу симметрии равна 0. Поэтому электрическое поле зависит только от r , и оно равно составляющей поля E_r в этой плоскости. Электрическое поле определяется зависимостью от r в следующем виде:

$$E(z=0) = \frac{\sigma L}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{r^2 + L^2}}. \quad (11)$$

При этом потенциал в любой точке плоскости $z=0$ можно найти из выражения (8):

$$\varphi(z=0) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + r^2}}{r}. \quad (12)$$

Таким образом, при решении задачи о конфигурации электрического поля и потенциала в объеме элементарной ячейки вклад каждого изображения определяется из выражений (8), (9) и (10). Для медианной плоскости этот вклад можно найти из выражений (11) и (12).

На рисунке 6 показано медианное сечение пропорциональной камеры, образованной катодными плоскостями 1 и m . Система координат выбрана таким образом, что ось абсцисс лежит в медианной плоскости и направлена вдоль проволочек. Начало системы координат совпадает с центром камеры. На рисунке изображены катодные плоскости, сигнальные проволочки, знакопеременные линейные заряды, которые являются изображением линейных зарядов проволочек камеры. Общее число плоскостей изображений линейных зарядов $NS=2k-1$. В соответствии с требованием метода катодные плоскости находятся под нулевым потенциалом (первое граничное условие). В предположении, что линейная плотность заряда $s(i)$ вдоль каждой i -й проволочки постоянна, заряд каждой сигнальной проволочки равен $s(i) \times 2L$. Проволочка вместе со своим линейным зарядом является источником. Линейные плотности каждого изображения каждого i -источника равны по абсолютной величине линейной плотности самого источника. Задача заключается в поиске необходимых значений линейных плотностей зарядов $s(i)$ всех источников, таких, чтобы для каждой проволочки разности потенциалов поверхность проволочки - катод были равны между собой (второе граничное условие). При выполнении этих двух граничных условий, вследствие теоремы единственности, найденные значения $s(i)$ будут решением поставленной задачи. Определив из выражений (11) и (12) вклад каждого линейного заряда и всех его изображений в величины потенциала и электрического поля для любой точки с координатами x и y , выполнив суммирование по всем зарядам и изображениям, получим в этой точке значения потенциала и электрического поля:

$$\phi(x, y) = \sum_{i,k} \phi_{i,k}(x, y), \quad E(x, y) = \sum_{i,k} E_{i,k}(x, y). \quad (13)$$

Пусть это будет, например, точка А (предполагаемая поверхность катода) или точка В (поверхность сигнальной проволочки) рисунка 6. Решение будем искать с применением вариационно-итерационного метода, который позволит провести оценку погрешности решения на любом шаге итерации. Решим задачу для МППК, состоящей из 83 проволочек. В дальнейшем мы поймем, что нет зависимости от

числа проволочек. Пусть все 83 проволочки имеют диаметр $d=20$ мкм, $L=8$ мм, $s=2$ мм. Тогда расстояние между крайними проволочками $s(m-1)$ равно 164 мм. Определим разность потенциалов в относительных единицах (7 этап расчета) для каждой проволочки при условии *единичного заряда* всех проволочек и их изображений. Расчеты проведем с ограниченным числом изображений, но достаточно большим, чтобы выполнить условие (2). Возьмем общее число плоскостей изображений линейных зарядов $NS=301$, тем самым удовлетворив условие (2) т. е. $r \gg s \times (m-1)$. Результат расчета в графическом виде представлен на рис. 8, на котором изображено распределение разности потенциалов для одной из половин камеры. Видно, что чем ближе к каждому из краев камеры, тем меньше относительная разность потенциалов промежутка проволочка - катод. Для крайних

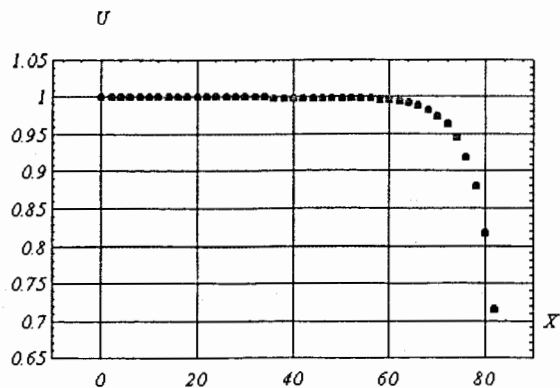


Рис.8. Разность потенциалов U проволочка - катод в зависимости от положения проволочки. Линейные плотности зарядов всех проволочек равны между собой, диаметры проволочек одинаковы. $X=0$ соответствует центру камеры.

проволочек она резко падает, доходя до 70% от значения в центре камеры. С физической точки зрения интерпретация полученного результата довольно проста. Вспомним соотношение между зарядом на проводнике q , его потенциалом V и электроемкостью C : $q=CV$. При равенстве зарядов всех проволочек из соотношения следует, что уменьшение потенциалов крайних проволочек связано с увеличением емкостей крайних проволочек по отношению к катоду. Реальное значение емкостей крайних проволочек можно найти, выполнив вычисления по всем 8 этапам до необходимой точности. Рассчитаем относительные значения напряжений U_i (7 этап вычислений), с высокой точностью, например, такой, что все $U_i=1,000000 \pm 0,000002$. Результаты расчетов величин зарядов представлены на рис.9.

Увеличение величин зарядов крайних проволочек камеры обусловлен ростом их линейной емкости. Из рис. 9 следует, что наибольшее изменение величин зарядов

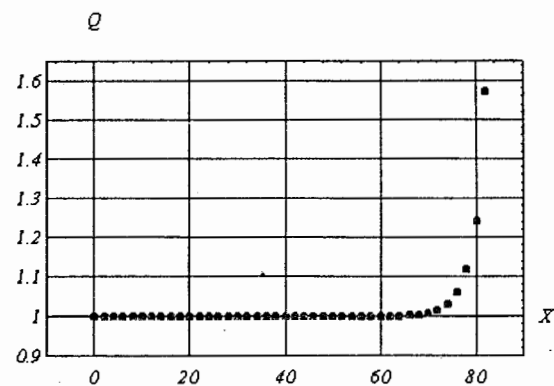


Рис. 9. Величина заряда Q на проволочке в относительных единицах в зависимости от ее положения. Разность потенциалов проволочка - катод одинакова для всех проволочек камеры:

обязано четырем крайним проволочкам. Изменение величины зарядов этих проволочек составляет 57, 24, 12 и 6 % по сравнению с величиной зарядов на остальных проволочках.

Одним из методов борьбы с утечками и возможными пробоями на краях камеры является использование 3-4 крайних проволочек большего диаметра. Посмотрим, к чему может привести увеличение диаметров крайних проволочек. Пусть диаметры 1 и 83 проволочек равны 50 мкм, диаметры 2 и 82, диаметры 3 и 81, диаметры 4 и 80 равны 40, 30, 25 мкм соответственно. Диаметры остальных проволочек оставим равными 20 мкм. Расчеты и анализ результатов проведем при сопоставлении данных, получаемых для 33 и 301 изображений. Начнем со случая, когда число изображений $NS=301$. На рис. 10 представлено распределение зарядов по проволочкам по отношению к единичному заряду центральной проволочки. Заряды первых (последних) четырех проволочек равны 1.79, 1.32, 1.14 и 1.06 относительных единиц. В напряженность электрического поля вблизи поверхности проволочки основной вклад вносит заряд самой проволочки, при этом величина поля прямо пропорциональна заряду проволочки. Учитывая зависимость поля на поверхности проволочки от ее радиуса, выражающуюся в виде $E \sim q/r$, не трудно убедиться, что величина электрического поля на поверхности этих проволочек будет меньше, чем на остальных проволочках камеры. Из анализа результатов вычислений, а именно, из равенства линейных плотностей зарядов проволочек основной части камеры (рис. 9,10), можно сделать следующий вывод. При уменьшении (увеличении) общего числа проволочек, при неизменном размере диаметров проволочек и при условии сохранения всех остальных геометрических характеристик камеры относительные величины зарядов проволочек не будут изменяться. Сократив число проволочек до 53 и 33 выполним расчеты с теми же требованиями, как и для случая с 83 проволочками. На рис.11 показано распределение зарядов для камеры из 53 и 33 проволочек. Сравнение результатов

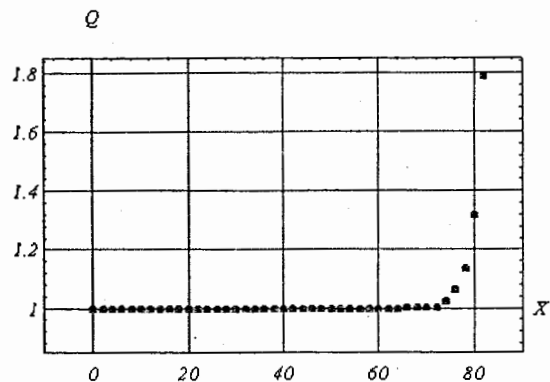


Рис. 10. Распределение зарядов по проволокам камеры в зависимости от их положения. Диаметры 4-х крайних провололок увеличены, остальные равны 20 мкм. Общее число провололок - 83. Разность потенциалов провололка - катод одинакова для всех провололок камеры.

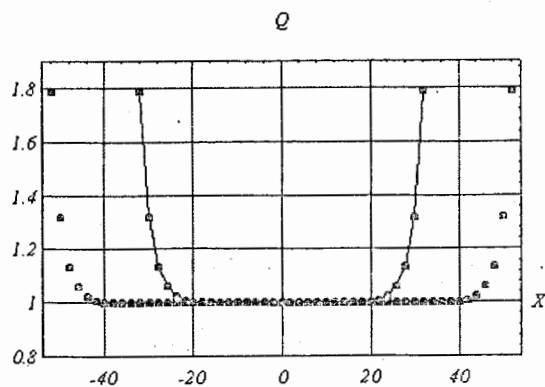


Рис. 11. Распределение зарядов по проволокам для 2 - х камер из 33 и 53 провололок соответственно в зависимости от их положения. Диаметры 4-х крайних провололок увеличены, остальные равны 20 мкм. Разность потенциалов провололка - катод одинакова для всех провололок камеры.

расчетов для случаев $m=83$ и $m=53$ показывает, что разница в величинах зарядов крайних провололок не превышает $(3+4) \times 10^{-6}$. Для камеры из 33 провололок, если в качестве величин зарядов взяты данные камеры из 83 провололок, изменение в разности потенциалов провололки - катод не превышает величины 1×10^{-4} . Все это является хорошим подтверждением сделанного выше вывода, что изменение величин зарядов крайних провололок связано только с увеличением их емкости, а не с числом провололок камеры.

Теперь посмотрим, что будет происходить при числе изображений $NS=33$. На рисунке 12 показано отношение линейных плотностей зарядов соответствующих провололок $\sigma_i(301)/\sigma_i(33)$ для $NS=301$, и $NS=33$. Негативная разница (<0.0004) в величинах линейных плотностей при большой разнице в числе изображений является подтверждением правильности выбора алгоритма нахождения величины зарядов провололок.

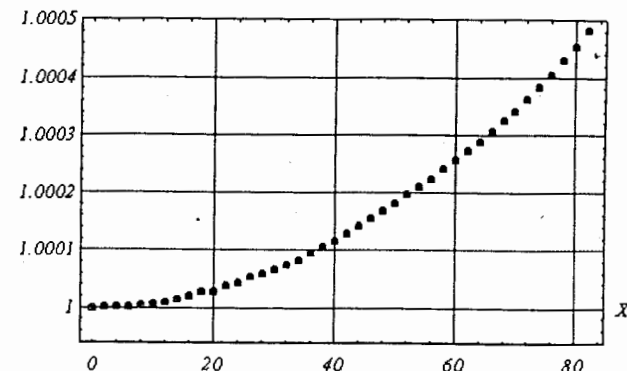


Рис. 12. Отношение расчетных линейных плотностей зарядов для 301 и 33 изображений.

В соответствии с процедурой расчетов, мы добились, чтобы разность потенциалов между любой провололкой и катодом $U_A - U_B$ стала постоянной величиной.

Посмотрим, при каких условиях плоскости 1 и m (рис.6) будут эквипотенциальными. Определим разность потенциалов между точкой, лежащей на плоскости, где должен находиться катод, против соответствующей провололки (точки $A(i)$ рис.6), и такой же точкой, относящейся к центральной провололке. Рассмотрим отношение полученной разности потенциалов в точках $A(i)$ к разности потенциалов центральная провололка - поверхность катода ($U_A - U_B$). Это отношение для $NS=33$ в процентах показано на рис. 13. Из рисунка следует, что плоскость, предполагаемая в качестве катода, не является эквипотенциальной. Подобное отношение для $NS=301$ показано на рис. 14. Положение в этом случае существенно улучшилось. С погрешностью δU , которая не превышает 0.1%, выбранная плоскость может считаться эквипотенциальной.

На каком же числе изображений следует остановиться? Общий ответ на этот вопрос будет следующий. Число изображений должно обеспечить получение несмещенных значений рассчитываемых величин. С увеличением числа изображений значение искомой величины будет стремиться к некоторой постоянной величине. Задавшись величиной погрешности, можно для каждого конкретного случая найти необходимое число изображений. Примером этого служит нахождение линейной

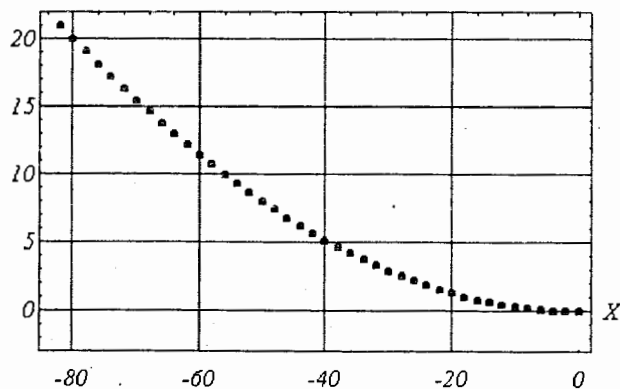


Рис. 13. Относительное изменение потенциала в процентах вдоль плоскости, где должен размещаться катод камеры, для 33 изображений. Плоскость не является эквипотенциальной.

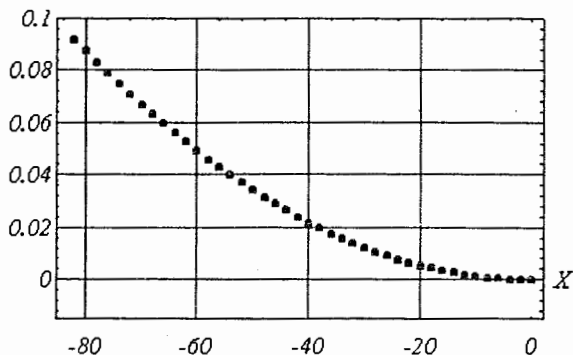


Рис. 14. Распределение, подобное изображенному на рис. 13. Расчет выполнен для 301 изображения.

плотности зарядов проволочек, линейная плотность зарядов определяется с большой точностью уже при $NS=33$ (рис. 12).

Рассмотрим влияние числа изображений NS на точность определения других характеристик МППК. Наибольшая зависимость получаемых результатов от конечного числа изображений должна наблюдаться в области крайних проволочек. Этого следует ожидать на основании данных, представленных на рисунках 8-14. Проанализируем поведение какой либо силовой линии вблизи края камеры. При достаточном числе изображений точка пересечения силовой линии с катодной плоскостью не должна смещаться в том или ином направлении. Положение этой точки не должно зависеть от числа изображений (начиная с некоторого), а также от длины проволочки. Рассмотрим случай $2L=180$ мм Пусть силовая линия начинается на 4 проволочке от края камеры (80 проволочка из общего числа,

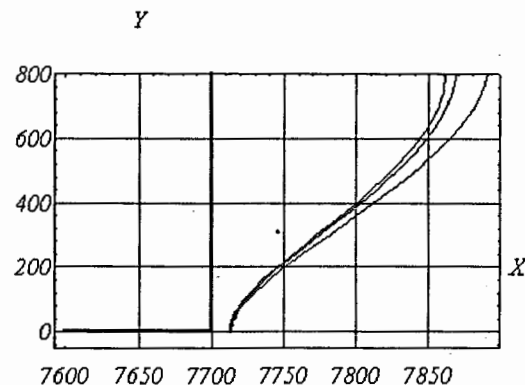


Рис. 15. Силовые линии электрического поля, проходящие через точку между 3-й и 4-й крайними проволочками, для числа изображений 33, 53 и 83 (справа налево). 100 делений - 1 мм.

равного 83) и проходит через точку с координатой на оси x середине между 80 - й и 81 - й проволочками, и с координатой 1 мкм по оси y . На рисунке 15 показаны линии электрического поля, проходящие через выбранную точку для различного числа изображений. Правая кривая соответствует $NS=33$, далее справа налево для 53, 81 изображений соответственно. Разность координат точки пересечения силовой линии с катодной плоскостью для $NS=81$, $NS=101$ и $NS=201$ в сравнении со случаем $NS=301$ составляет 3,15 мкм, 1,55 мкм и 0,5 мкм соответственно. Из расчетов следует, что числа изображений $NS=53$ явно недостаточно, а тем более $NS=33$. В обоих случаях силовая линия не пересекает место расположения катодной плоскости по нормали, не выполняется основное требование законов электростатики. На этом рисунке прямой ($X=7700$) показан ход линии поля в отсутствие краевых эффектов. Анализ краевых эффектов МППК, выполненный на основе развитого метода расчетов, проведен в [21].

Выражения для расчетов потенциалов и полей (5-9) получены для конечной длины проволочек МППК (линейных зарядов). Рассмотрим, каково влияние длины проволочки $2L$ на выбор числа изображений NS . Независимость от длины проволочки при достаточном числе изображений следует из анализа рисунков 9-11. Линейная плотность зарядов проволочек s остается постоянной для всех проволочек, кроме ~ 10 крайних, и не зависит от их общего числа. Отсюда следует, что линейная плотность заряда также будет постоянной и вдоль проволочки за исключением ее концов. Поскольку вместо дискретного распределения зарядов от проволочки к проволочке рассматривается непрерывное распределение зарядов вдоль проволочек. Воспользуемся анализом хода той же силовой линии, как и в предыдущем случае. Рассмотрим случай $2L=1500$ мм. При увеличении числа изображений координата точки пересечения силовой линии с предполагаемой катодной плоскостью стремится, как это и требуется, к некоторому пределу. Это положение иллюстрирует рисунок 16, на котором показана зависимость координаты

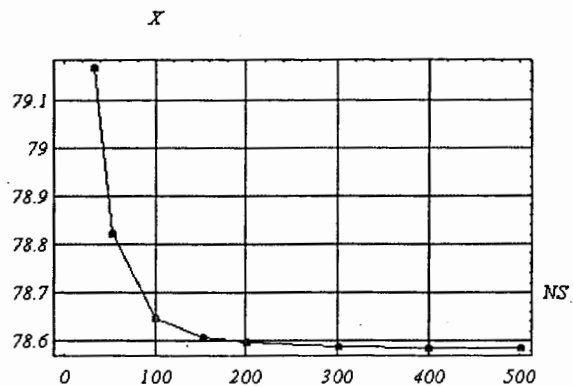


Рис. 16. Расчетное положение точки пересечения силовой линии с катодной плоскостью в зависимости от числа изображений NS при длине проволочек 1500мм.

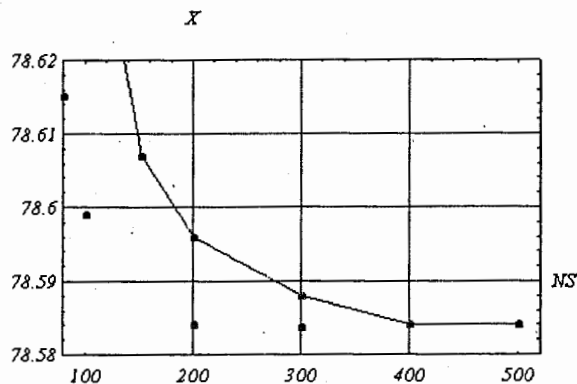


Рис. 17. Часть рис.16 в увеличенном масштабе. Точки характеризуют место пересечения с катодной плоскостью для камеры с длиной проволочек 180 мм.

точки пересечения от числа изображений ($2L=1500$ мм). На рисунке 17 сплошной линией показан участок рисунка 16 в увеличенном масштабе. При переходе от 400 изображений к 500 координата пересечения смещается всего на 0,5 мкм. Точками на этом рисунке обозначено положение точки пересечения для камеры с проволочками длиной 180 мм. Положение точки пересечения силовой линии с катодной плоскостью стремится к пределу и не зависит от длины проволочки, начиная с некоторого числа изображений. Это является еще одним указанием на ограниченность области, в которой могут проявиться краевые эффекты на концах анодных проволочек. Таким образом, в большинстве случаев достаточно ограничиться $NS=100-200$, получая вполне корректные результаты. Разница в положении точки пересечения силовой линии с катодной плоскостью при одинаковом числе изображений, но при разных длинах проволочки, легко

объяснима. При больших длинах проволочек и малых величинах NS расстояние между концами последнего изображения проволочек и центром камеры существенно превышает расстояние между плоскостью этого изображения и центром камеры. Ситуация в этом случае аналогична той, что возникла с выбором величины NS при обосновании возможности решения основной задачи электростатики с ограниченным числом изображений (рис. 5).

Оптимизация итеративного процесса

Возможно ли сократить число итераций, используя описанный выше поэтапный вариационно-итерационный способ поиска решений? Анализ показывает, что сократить число итераций можно только на 5-м этапе вычислений, если вместо выражения $\sigma(N+1) = \sigma(N)/(U(N+1))$ использовать другое, в котором знаменатель входит в некоторой степени m : $\sigma(N+1) = \sigma(N)/(U(N+1))^m$. На конкретном примере выясним, каким образом можно выбрать оптимальное значение m . Решим задачу - определить, как изменится величина игононной емкости dC проволочки камеры центральной области при ее смещении на 0,2 мм в направлении к катоду. Величина dC определяется из выражения $ds=dC \times V$, где $ds=s(N)-s(0)$, а $s(0)$ - линейная плотность заряда проволочки до ее смещения. При вычислении в относительных единицах $V=1$ и $dC=ds$. В соответствии с принятой процедурой вычислений определим координаты изображений проволочек камеры, в том числе и координаты смещенной проволочки и ее изображений. Присвоим с учетом знаков всем изображениям линейную плотность в соответствии с распределением, показанным на рис.10. По принятой процедуре получим новые значения линейных плотностей $s(i)$, где i - номер проволочки. Итерация продолжается до тех пор, пока не получим для всех проволочек значение относительной разности потенциалов $V=1 \pm dV$, где dV - заданная точность.

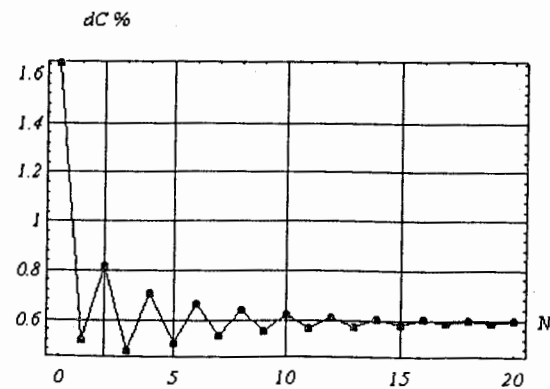


Рис. 18. Изменение величины емкости проволочки, смещенной на 0,2 мм к катодной плоскости, в зависимости от числа итераций. При вычислении линейной плотности заряда σ для каждой последующей итерации использовалось выражение $\sigma(N+1) = \sigma(N)/(U(N+1))^m$, где $m=2$.

На графиках показана зависимость изменения емкости dC от числа итераций N . Величина $s(N)$ в соответствии с 5-м этапом метода вычислений определяется из выражения:

$$\sigma(N+1) = \sigma(N) / (U(N+1))^m \quad (14)$$

На рис.18 показано, как меняется величина dC в зависимости от числа итераций для $m=2$. Вычисления прерваны при $N=20$, при котором $dV \approx 0,000004$. На рис.19

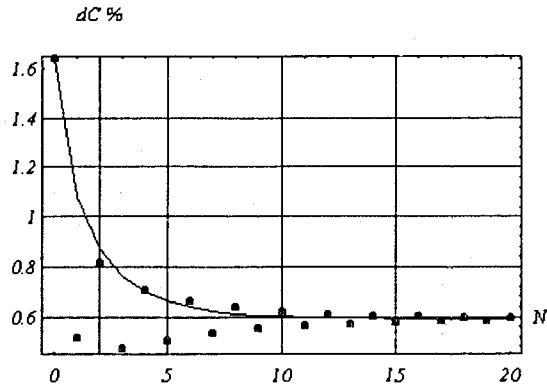


Рис. 19. Распределение, аналогичное показанному на рис.18. Сплошная кривая - $m=1$, точки - $m=2$.

приведены графики для $m=1$ и $m=2$. Сплошная линия соответствует $m=1$, при этом $dV=0,0000002$ для $N=20$, точками обозначена зависимость для $m=2$. Резкие изменения $s(i)$ при каждом последующем шаге итерации, следующие из соотношения (14), приводят к значительному разбросу точек. Вычисления показали, что величина $m \approx 1,5$ является оптимальной. На рис. 20 показаны результаты вычислений для $m=1,5$ (точки) и $m=1$ (сплошная кривая). При той же

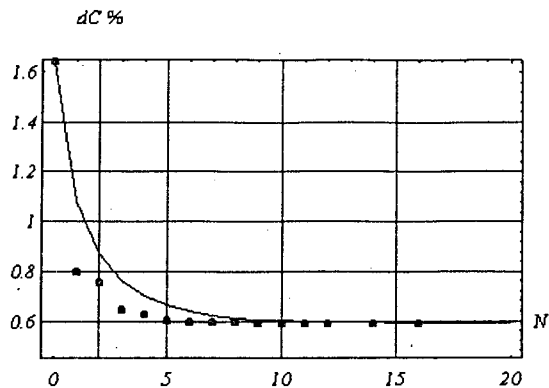


Рис. 20. Изменение вычисляемой величины емкости проволоочки от числа итераций для $m=1$ (сплошная кривая) и для $m=1,5$ (точки).

точности вычислений погонной емкости проволоочки число итераций для случая $m=1,5$ сокращается примерно в два раза по сравнению с $m=1$. Погонная емкость проволоочки, смещенной на 0,2мм от первоначального положения, увеличилась в $1,00593 \pm 0,00001$ раз.

Способ построения силовых линий поля

Поясним способ построения силовых линий электрического поля и эквипотенциалей. В [2] эквипотенциали и линии поля, проходящие через выбранную точку на комплексной плоскости z , строятся достаточно сложным способом: численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге - Кутты. Метод численного интегрирования требует соответствующего программного обеспечения и сам по себе продолжителен по времени. В настоящей работе использовался простой и наглядный способ, описываемый ниже.

В результате процесса вычислений мы знаем линейную плотность заряда каждого источника и распределение всех источников в пространстве. Тогда по формулам (8-10) мы можем определить составляющие электрического поля и потенциал в каждой точке пространства, а из выражений (11 и 12) те же величины для медианной плоскости. Силовые линии электрического поля являются наглядным способом описания векторного характера поля. Они представляют собой пространственные кривые, касательные к которым в любой точке пространства совпадают с направлением поля в этой точке. Силовая линия поля, проведенная через любую точку, и эквипотенциальная поверхность в этой точке взаимно перпендикулярны. На основании этих общих свойств силовых линий и эквипотенциальных поверхностей мы можем построить карты силовых линий и эквипотенциалей методом замены участка кривой линии отрезком касательной. Для наглядности рассмотрим метод построения линий поля и эквипотенциалей на плоскости. Покажем применение метода на аппроксимации отрезками касательных дуги окружности радиуса R . Выберем какую-либо точку A на плоскости, через которую необходимо провести силовую линию (рис. 21), и проведем из этой точки

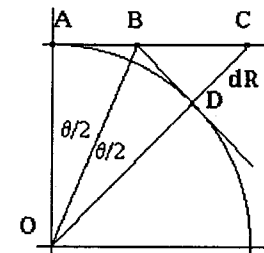


Рис. 21. Схема, поясняющая метод аппроксимации дуги окружности AD отрезком касательной AC для построения силовых линий поля и эквипотенциалей.

касательную. Пусть AC - отрезок, аппроксимирующий дугу окружности AD. Из построения следует $dR = BD \operatorname{tg} \theta = R \operatorname{tg} \theta \times \operatorname{tg} \theta / 2$. Для углов q , таких, что значение $\operatorname{tg} q = \sin q = q$ имеем $dR = R \frac{\theta^2}{2}$. После n шагов, при условии $q = \operatorname{const}$, ограничившись

первыми двумя членами биннома, имеем $R_n \approx R (1 + n \frac{\theta^2}{2})$. Отсюда $dR = R n \frac{\theta^2}{2}$.

Пример: $q = 0,01$, $n=100$, при $R=1$ получим $dR=0,005$. Это означает, что при аппроксимации дуги в один радиан с помощью 100 отрезков касательных и радиусе дуги окружности в 100 мм увеличение радиуса составит 0,5 мм. При увеличении числа шагов в k раз при той же длине дуги величина угла уменьшается также в k раз, следовательно, и dR уменьшается в k раз. Карты силовых линий и потенциалей скорее носят качественный, иллюстративный характер, поэтому при построении линий поля вполне можно обойтись небольшим числом шагов итераций. Если возникает необходимость получить по карте силовых линий количественные данные, то уменьшение величины отрезка касательной позволяет получить сколь угодно точные результаты, но ценой более длительных вычислений.

Рассмотрим на примере, как этот способ реализуется практически. Пусть координаты точки A равны x_0 и y_0 . Координата точки C (рис. 21) находится следующим способом. Поскольку известны расположение всех источников и величины их зарядов, то можно вычислить компоненты электрического поля E_x и E_y в точке A и тем самым и направляющие косинусы вектора поля $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ в этой точке. А они являются также направляющими косинусами касательной к линии поля в этой точке. В таком случае координаты точки C x_1 и y_1 можно найти из выражений: $x_1 = x_0 + s \cos \alpha$ и $y_1 = y_0 + s \cos \beta$, где s - величина отрезка касательной AC. Для пространства задача решается аналогично рассмотренной, но для вычисления пространственной координаты необходимо использовать все три направляющих косинуса вектора электрического поля.

Построение эквипотенциалей

Каким образом провести эквипотенциаль в пространстве? Вернемся к общему свойству линий поля и эквипотенциалей, в силу которого эквипотенциальная поверхность перпендикулярна вектору электрического поля. На этой поверхности любая произвольная по форме линия является эквипотенциалью. Поэтому можно говорить об эквипотенциали только как о линии на поверхности или плоскости, которая выбирается в зависимости от решаемой задачи.

Рассмотрим некоторую плоскость. Пусть вектор электрического поля лежит в этой плоскости и совпадает с отрезком AE (рис. 22), тогда линия UV является касательной к эквипотенциали в точке A. Таким образом, для нахождения направления касательной UV, вектор электрического поля необходимо повернуть на угол $\rho / 2$. Если углы между вектором поля и осями x и y равны α и β , то координаты следующей точки на эквипотенциали равны $x_1 = x_0 + s \cos \beta$ и $y_1 = y_0 - s \cos \alpha$ для направления вдоль линии от точки A к точке U. Заменой знаков

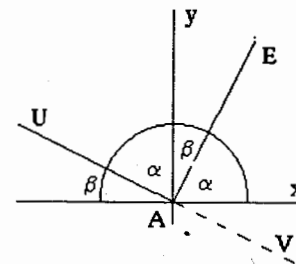


Рис. 22. Схема построения эквипотенциали на плоскости по направляющим косинусам вектора электрического поля E при его повороте на угол $\rho / 2$ в направлении U или V.

+ и - на противоположные получим координаты для эквипотенциали в направлении AV. Вычисляя направляющие косинусы вектора поля в этой точке и проводя дальнейшие вычисления, как это указано, мы можем построить эквипотенциаль.

Рассмотрим рис. 23, который служит иллюстрацией метода построения эквипотенциали в медианной плоскости камеры. На нем показаны кривые,

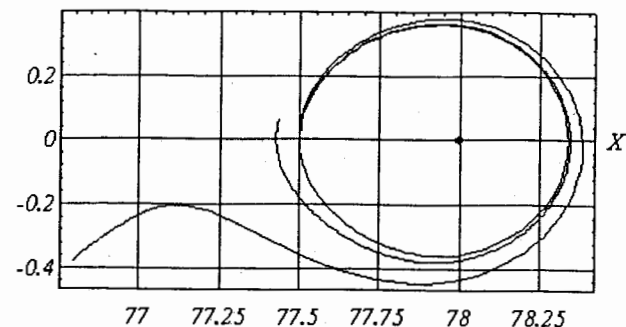


Рис. 23. Иллюстрация метода построения эквипотенциали через заданную точку на плоскости при замене криволинейного отрезка отрезком касательной (величина отрезка 40, 10 и 5 мкм).

начинающиеся в одной и той же точке с координатами $x=77,5$ мм и $y=0$. Координата $x=78$ мм соответствует 81-й (третьей от края) проволочке камеры. Внешняя кривая построена с шагом 40 мкм, который равен отрезку касательной AC (рис. 21). Кривая должна быть зеркально симметричной относительно линии $y=0$. Из-за большого шага и малого радиуса происходит переход в область с другим значением потенциала, в результате построена линия, не являющаяся эквипотенциалью. Следовательно, необходимо уменьшить величину шага. Кривая, расположенная между внешней и внутренней кривыми, построена с шагом 10 мкм. Внутренняя замкнутая кривая построена с шагом 5 мкм, и она является эквипотенциалью. В

форме кривой проявляются краевые эффекты МППК, что особенно хорошо видно на рис. 24, на котором показаны некоторые силовые линии поля и эквипотенциалы той же 81-й проволоочки. Силовые линии отходят от поверхности проволоочки под углами в 5, 30, 60, 90, 120, 150 и 175 градусов к оси x . В отсутствие краевых эффектов три первые линии должны быть симметричны трем последним. Линия, идущая под углом 90 градусов, должна идти строго по линии $x=78$ мм.

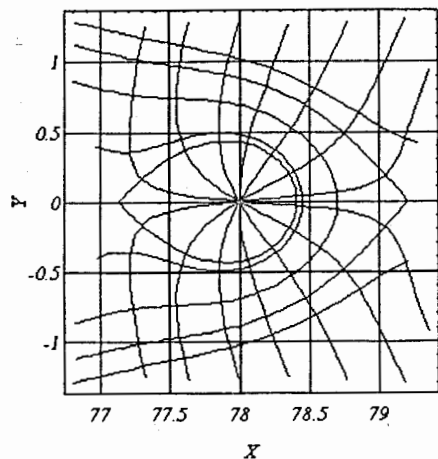


Рис. 24. Силовые линии и потенциалы электрического поля в окрестности 3-й крайней проволоочки. Отсутствие симметрии относительно прямой $x=78$ мм связано с краевым эффектом.

Потенциальные линии должны быть также симметричны относительно линии $x=78$ мм. На рис. 25 показана карта линий поля и эквипотенциалов в окрестности 12-й проволоочки от края камеры. Симметрия хода линий поля и эквипотенциалов говорит об отсутствии краевых эффектов в районе этой проволоочки.

Для сравнения приводим расчетные данные погонной емкости проволоочки, полученные в [2] и опубликованные в [3], с нашими данными (таблица 1). В таблице приведены величины погонных емкостей проволоочки камеры в pF/m .

Таблица

1	2	3	4
3,33	3,327	5,33	5,331
3,47	3,472	5,71	5,711
3,56	3,562	5,96	5,959

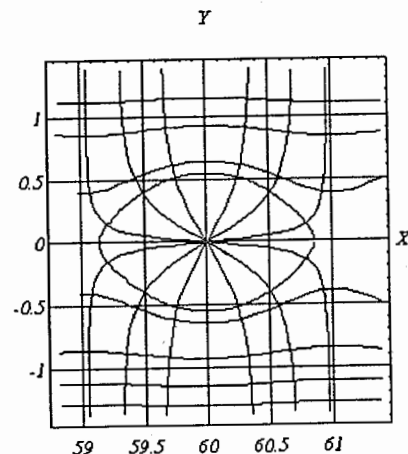


Рис. 25. Карта силовых линий и эквипотенциалов в окрестности 12-й от края проволоочки. Симметричный ход эквипотенциалов и линий поля свидетельствует об отсутствии краевых эффектов.

Первые две колонки относятся к камере с расстоянием между катодом и плоскостью сигнальных проволоочек $l=8$ мм. Две вторые - к камере с

$l=4$ мм. В 1-й и 3-й колонках приведены данные работы [10], во 2-й и 4-й колонках даны результаты расчетов автора данной работы для камеры из 83 проволоочек. Погонную емкость, приведенную в таблице, имеют проволоочки камеры, для которых относительная величина заряда $Q=1$, т.е. для всех проволоочек, за исключением $\sim 5-6$ проволоочек с каждого края камеры (рис. 10). Для этих проволоочек к краям камеры величина емкости увеличивается пропорционально величине заряда Q .

Заклучение

Разработанный метод расчета электростатических характеристик планарной МППК применим для расчетов характеристик планарных дрейфовых и мини-дрейфовых камер. На основе предложенного метода выполнены расчеты конфигураций электрических полей в планарных пропорциональных и дрейфовых камерах, улучшающих их свойства [11]. Впервые проведены исследования краевых эффектов в МППК, позволившие определить размеры области, в которой эти эффекты играют заметную роль [21]. Предложен алгоритм решения основной задачи электростатики (ОЗЭ) для многопроволочных детекторов. Этот алгоритм может быть применен для нахождения решения ОЗЭ для проводников любой формы при их произвольном размещении в пространстве.

Автор выражает искреннюю благодарность М. Г. Шафрановой за ценные замечания, сделанные ею в процессе подготовки рукописи к публикации.

Литература

- [1] G.Charpak, Ann. Rev. Nucl. Sci., vol. 20, (1970), 195.
- [2] G. A. Erskine, Nucl. Instr. and Meth., 105, (1972), 565.
- [3] F. Sauli, Principles of operation of multiwire proportional and drift chamber, CERN 77-09. В книге *Experimental techniques in high-energy nuclear and particle physics*, Second edition, Word Scientific, Edited by Thomas Ferbel, Singapore, New Jersey, London, (1991), 79.
- [4] P. Rice-Evans, Sparc, Streamer, Proportional and Drift Chamber, Richelieu Press, London, 1974.
- [5] P. Lazeyras et al. CERN 74-1.
- [6] A.H.Walenta, J.Heintze and B. Schürlein, Nucl. Instr. and Meth. 92,(1971),373.
- [7] A.Peisert and F.Sauli, Drift and diffusion electrons in gases: a compilation, CERN 84-08.
- [8] G. Charpak, F. Sauli and W. Duinker, Nucl. Instr. and Meth., 113, (1973), 381.
- [9] T.S. Nigmanov et al. Nucl. Instr. and Meth., 143, (1977), 17.
- [10] F.Sauli, Nucl. Instr. and Meth., 156, (1978), 147.
- [11] M.D.Shafranov, Nucl. Instr. and Meth., A 367 (1995), 125
- [12] И.Е.Тамм, *Основы теории электричества*. Москва, 1966.
- [13] Э. Парселл, *Электричество и магнетизм*. Москва, 1983.
- [14] T. Tomitani, Nucl. Instr. and Meth., 100, (1972), 179.
- [15] G. T. Symm, Nucl. Instr. and Meth., 118, (1974), 605.
- [16] Ф.М. Морс и Г. Фешбах. *Методы теоретической физики*. Часть 2, Москва, 1960., 224.
- [17] Г. Бухгольц. *Расчет электрических и магнитных полей*, ИЛ, Москва, 1961, 142.
- [19] Ф.М. Морс и Г. Фешбах. *Методы теоретической физики*. Часть 1, Москва, 1960, 406.
- [20] Ф.М. Морс и Г. Фешбах. *Методы теоретической физики*. Часть 2 Москва, 1960, 5.
- [21] М.Д. Шафранов. Красные эффекты в многопроволочных пропорциональных камерах, Краткие сообщения ОИЯИ, 6, Дубна, 1995, 21.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 октября 1996 года.