8790

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

4/VIII-75

P13 - 8790

Б.В.Васильев, В.В.Данилов, К.К.Лихарев

О ФОРМЕ СИГНАЛА СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО КВАНТОВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА В ГИСТЕРЕЗИСНОМ РЕЖИМЕ

1975

P13 - 8790

Б.В.Васильев, В.В.Данилов, К.К.Лихарев

О ФОРМЕ СИГНАЛА СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО КВАНТОВОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА В ГИСТЕРЕЗИСНОМ РЕЖИМЕ

Направлено в ЖТФ

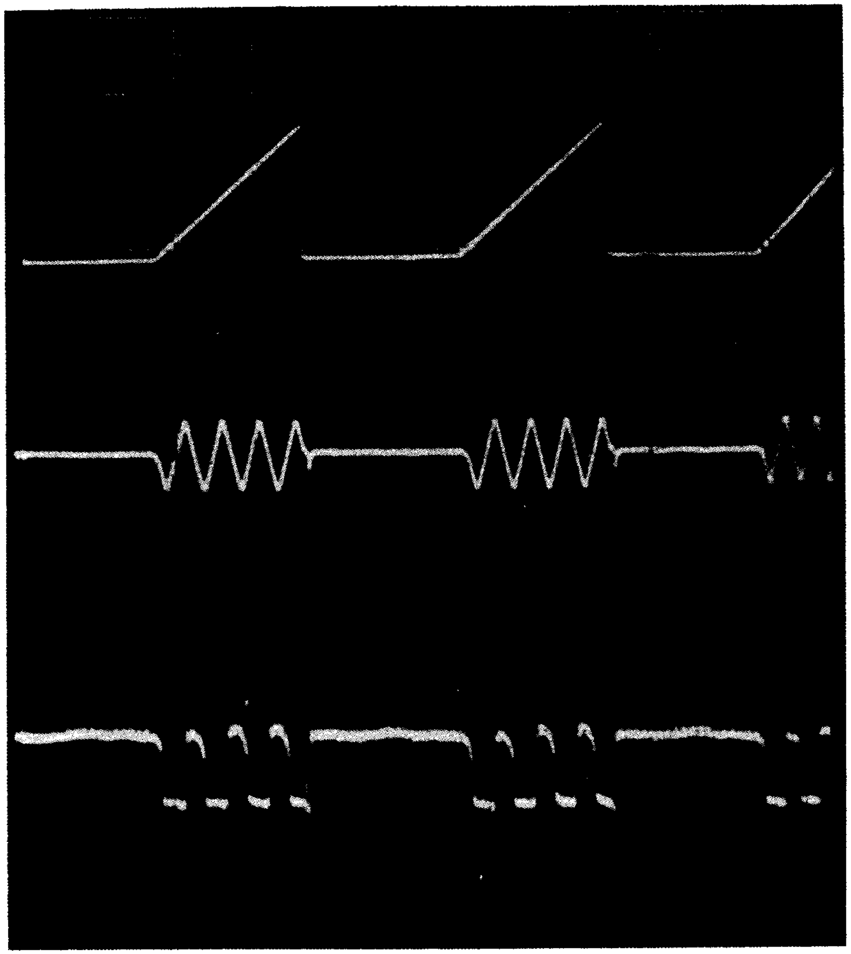
1. Введение

Сверхпроводящие квантовые интерферометры, в которых чувствительными элементами служат сверхпроводящие квантовые интерферометрические датчики – СКВИДы – [1,2], используются в основном в гистерезисном режиме. Этот режим реализуется, когда основной параметр СКВИДа $\ell = 2\pi \frac{L_R I_0}{\Phi_0}$ больше единицы. Здесь $\Phi_0 = h/2e \simeq 2.10^{-15}$ Вб – квант магнитного потока; L_R, I_0 – индуктивность и критический ток СКВИДа.

При обычных условиях работы [2–4] зависимость амплитуды колебаний напряжения на контуре $V(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ от внешнего магнитного потока Φ_e (при фиксированном уровне накачки) имеет треугольную (или трапециевидную) форму [1–5].

Однако оказывается [5], что в области больших отрицательных расстроек ξ_0 сигнал $A(\Phi_e)$, в отличие от обычной треугольной формы (рис.1б), может иметь форму "прямоугольников" (рис.1в). Здесь $\xi_0 = \frac{\omega - \omega k}{\omega}$ – расстройка частоты накачки ω от собственной частоты контура ω_k.

Целью настоящей работы является анализ зависимости формы сигнала интерферометра $A(\Phi_e)$ от величины и знака расстройки ξ_0. При этом в рамках общей теории интерферометра [5], применимой при любых ℓ и ξ_0, рассчитываются условия перехода от треугольной формы сигнала к прямоугольной при больших значениях параметра ℓ.



а

б

в

Рис.1. Форма сигнала интерферометра $A(\Phi_e)$ в экспериментах с положительной расстройкой ξ_0 (б) и большой отрицательной расстройкой (в) при пилообразоном изменении потока смещения Φ_e (а).

2. Основные уравнения работы интерферометра

Важным элементом квантового интерферометра с одноконтактным СКВИДом является индуктивно связанный с датчиком колебательный контур /1-5/. Путем совместного решения уравнений, описывающих колебания в контуре $V(t)$ и ток $I_R(t,V)$ в СКВИДе, можно проанализировать работу интерферометра при любых значениях параметров (например, ℓ и ξ_0). Заметим, что экспериментально обычно /2,3,5/ используются интерферометры с добротностью колебательного контура $Q \gg 1$ и коэффициентом связи СКВИДа с контуром $k<1$*. Использование этих условий ($Q \gg 1$, $k^2 \ll 1$) позволяет при решении системы уравнений, определяющих работу интерферометра, ограничиться учетом только первых членов фурье-разложения величин $V(t)$ и $I_R(t)$ (приближение гармонического баланса). В этом случае алгебраическое уравнение, определяющее амплитуду колебаний в контуре, имеет в безразмерных обозначениях следующий вид:

$$(\epsilon/2)^2 = (\delta \cdot a)^2 + (\xi \cdot a)^2 . \qquad (1)$$

Здесь $a = 2\pi k (L_R/L_k)^{1/2} (\omega \cdot \Phi_0)^{-1} A$ – приведенная величина амплитуды колебаний напряжения на контуре, L_k – индуктивность контура, ϵ – приведенная величина амплитуды колебаний источника накачки, δ – величина эффективного затухания колебаний в контуре, ξ – величина эффективной расстройки.

$$\delta = \delta_0 - \frac{k^2 \ell}{2} \frac{i_{Rs}}{a} ; \quad \delta_0 = (2Q)^{-1} ; \qquad (2)$$

$$\xi = \xi_0 - \frac{k^2 \ell}{2} \frac{i_{Rc}}{a} , \qquad (3)$$

---

* Эти условия являются наиболее выгодными с экспериментальной точки зрения, т.к. в соответствии с /4/ амплитуда сигнала возрастает с увеличением Q при выполнении условия оптимизации $k^2 Q = 1$.

где i_{Rs}, i_{Rc} – амплитуды первых синусной и косинусной гармоник тока I_R, нормированного на критический ток слабого контакта I_0.

Ток $i_R = I_R / I_0$ может быть найден из уравнения для потоков в СКВИДе, которое в обычной резистивной модели записывается в виде

$$i_R = \sin\phi + \Omega\dot{\phi} = \frac{a \cdot \cos\tau + \phi_e - \phi}{\ell}. \qquad (4)$$

Здесь дифференцирование проводится по безразмерному времени $\tau = \omega t$ и введены следующие обозначения: $\phi = 2\pi(\Phi/\Phi_0)$ и $\phi_e = 2\pi(\Phi_e/\Phi_0)$ – приведенные величины потока в СКВИДе Φ и внешнего постоянного потока смещения Φ_e; $\Omega = \omega/\omega_0$, где $\omega_0 = 2\pi\frac{I_0 R}{\Phi_0}$ – характерная частота контакта, R – его нормальное сопротивление.

Совместное решение уравнений (1) и (4) позволяет найти зависимость формы сигнала $a(\phi_e)$ от величины расстройки ξ_0 при любых значениях параметра ℓ. Например, используя (1) и (4), можно получить выражение для формы сигнала в безгистерезисном режиме для случая $\ell \ll 1$ /5,6/.

3. Процессы, определяющие форму сигнала интерферометра

Зависимость амплитуды колебаний напряжения в контуре $a(\phi_e)$ от внешнего магнитного потока ϕ_e в гистерезисном ($\ell > 1$) режиме работы интерферометра обусловлена возникновением в СКВИДе скачков потока и влиянием этих скачков на процессы в контуре. Скачки потока происходят, когда амплитудное значение суммарного магнитного потока $(\phi_e + a)$, приложенного к СКВИДу, достигает порогового значения ϕ_N^*, при котором ток через контакт становится равным критическому /1–5/. Такое состояние СКВИДа является неустойчивым, и происходит скачкообразное проникновение в него потока. Вследствие квантования поток в СКВИДе меняется на один квант, при этом ток в нем соответственно уменьшается и состояние СКВИДа в заданном поле становится устойчивым.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь первого скачка в СКВИДе, точнее, первой пары скачков: скачка в новое состояние и обратно. Первый скачок ($N=1$) происходит при значении амплитуды колебаний в контуре, равном a_1:

$$|\phi_e| + a_1 = \phi_1^* = \sqrt{\ell^2 - 1} + \arccos(-1/\ell). \qquad (5)$$

При этом ввиду периодичности зависимости тока в СКВИДе i_R от внешнего потока ϕ_e с периодом по ϕ_e, равным 2π /1–5/, в формуле (5) $|\phi_e| \le \pi$.

Появление скачков в СКВИДе приводит к изменению значений i_{Rs}, i_{Rc} соответственно на величины Δi_{Rs} и Δi_{Rc}. Физически это означает, что скачки потока в СКВИДе вызывают дополнительную диссипацию энергии (т.е. увеличивают эффективное затухание (2), так как $\Delta i_{Rs} < 0$), а также вносят положительный вклад в эффективную расстройку (3), т.к. $\Delta i_{Rc} < 0$.

Таким образом, возникновение скачков в СКВИДе изменяет эффективный импеданс контура $Z = \delta + j\xi$, причем это изменение зависит от значения внешнего магнитного потока ϕ_e. Это приводит к появлению зависимости $a(\phi_e)$, так как из уравнения (1) следует, что $a \sim |\delta + j\xi|^{-1}$. Представляется удобным провести качественное исследование формы сигнала $a(\phi_e)$, используя построения на комплексной плоскости эффективного последовательного импеданса колебательного контура (рис.2).

При положительных и небольших отрицательных расстройках ξ (рис.2а) скачки потока в СКВИДе ведут к увеличению модуля импеданса контура. При этом источник накачки становится недостаточно эффективным для поддержания прежней амплитуды колебаний, при которой произошел скачок. Вследствие этого скачки потока в СКВИДе происходят не в каждом периоде радиочастотных колебаний. При увеличении амплитуды колебаний источника накачки ϵ (при постоянном ϕ_e) скачки потока в СКВИДе происходят чаще, однако амплитуда колебаний в контуре не превышает порогового значения, определяемого условием (5). При достаточной величине накачки ϵ

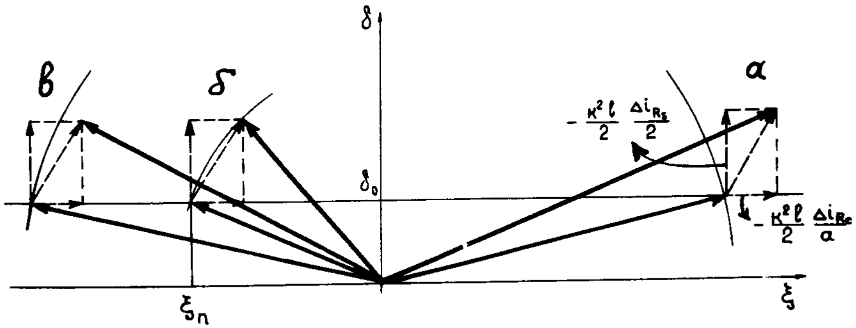
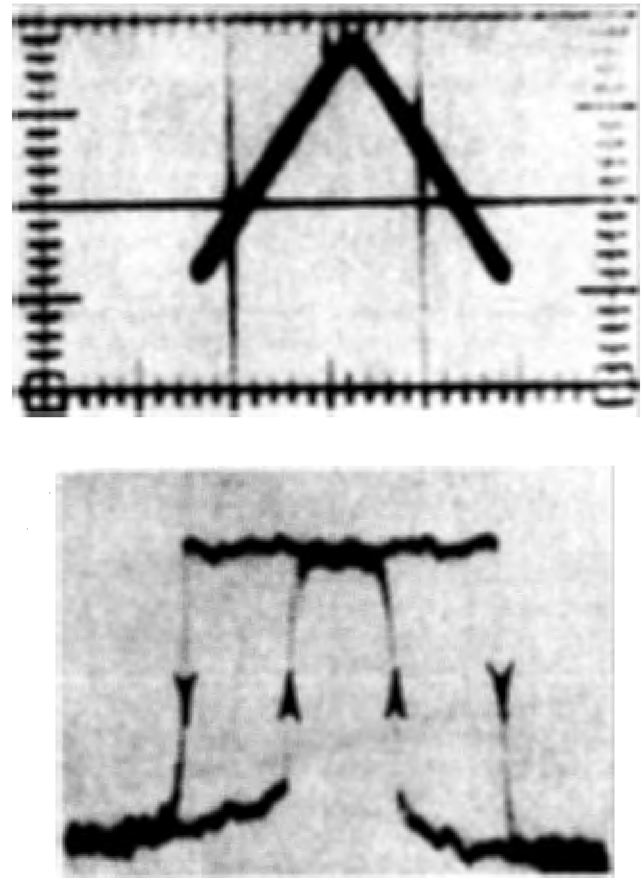


Рис.2. Эффективный комплексный импеданс колебательного контура со СКВИДом при положительном значении расстройки ξ_0 (а), при большом отрицательном значении расстройки ξ_0 (в) и при пороговом значении расстройки $\xi_0 = \xi_п$ (б). Тонкие одинарные стрелки – импеданс без скачков в СКВИДе, двойные – при скачке в каждом периоде колебаний.

скачки потока происходят в каждом периоде РЧ-колебаний и амплитуда колебаний а начинает расти при дальнейшем увеличении ϵ вплоть до возникновения следующей пары скачков. Наличие такой зависимости $a(\epsilon)$, имеющей вид чередующихся плато и подъемов, приводит /1–5/ к обычной треугольной форме сигнала $a(\phi_e)$ (рис.1б, 3а). Это следует, в частности, из условия (5), которое дает линейную зависимость $a_1(\phi_e)$ с периодом по ϕ_e , равным 2π , при условии, что отклонения амплитуды Δa от порогового значения малы ($\Delta a/a \sim k^2 \ll 1$) .

В случае больших отрицательных расстроек появление скачков в СКВИДе может приводить к уменьшению модуля эффективного импеданса контура (рис.2в). При



а)

б)

Рис.3. Поведение сигнала интерферометра $A(\Phi_e)$ при синусоидальном изменении потока смещения Φ_e и синхронной развертке в экспериментах с положительным (а) и большим отрицательным (б) значением расстройки ξ_0 .

этом процессы дополнительной диссипации (при скачках) в СКВИДе перекомпенсируются уменьшением модуля эффективной расстройки ξ . Поэтому после возникновения первых скачков произойдет резкое увеличение амплитуды радиочастотных колебаний в контуре, причем скачки (одна или несколько пар) будут происходить теперь каждый период колебаний. Таким образом, при отрицательных расстройках, больших некоторой пороговой, на зависимости $a(\phi_e)$ появляются "скачки" ("прямоугольная" форма сигнала на рис. 1в).

Следует отметить, что резкое увеличение амплитуды колебаний в контуре при возникновении скачков в СКВИДе соответствует резкому увеличению амплитуды радиочастотного потока, приложенного к СКВИДу, при неизменном внешнем потоке смещения ϕ_e. Поэтому для возвращения на нижний уровень амплитуды колебаний в контуре (т.е. для прекращения скачков) нужно приложить к СКВИДу некоторый отличный от нуля дополнительный поток смещения $\Delta\phi_e < 0$.

Следовательно, зависимость $a(\phi_e)$ будет иметь для сигнала прямоугольной формы гистерезисный характер (рис.3б) – в отличие от обратимого поведения $a(\phi_e)$ для сигнала треугольной формы (рис.3а). Этот эффект затрудняет непосредственное использование в эксперименте участков с большой крутизной на характеристике $a(\phi_e)$ с целью повышения чувствительности интерферометра $\gamma = |dA/d\Phi_e|$.

4. Вычисление пороговой расстройки

Использование уравнений (1) и (4) позволяет вычислить пороговое значение расстройки $\xi_П$ (рис.2б), которое определяет границу между режимами с треугольной формой сигнала ($\xi > \xi_П$) и режимами, в которых форма сигнала становится прямоугольной ($\xi < \xi_П$). В качестве примера рассмотрим случай $\ell \gg 1$, $\Omega \ll \ell^{-1/2}$(6) и, как и ранее, ограничимся рассмотрением лишь первого скачка в СКВИДе. Условие $\Omega \ll \ell^{-1/2}$, как будет показано ниже, позволяет при вычислении $\xi_П$ считать скачок потока в СКВИДе практически мгновенным (фактически скачок происходит за время $\Delta\tau$ порядка $\Omega^{1/7}$).

Учитывая условия (6), опустим в выражении (4) для тока i_R члены, содержащие ℓ^{-1} и Ω (заметим, что $a \sim \ell$, $|\phi_e| < \pi$). Это позволяет получить главный член

разложения ϕ по степеням малых параметров ℓ^{-1} и Ω в виде:

$$\phi \simeq \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \tau, & \tau_1 < \tau \leq \tau_2, \\ -\frac{3\pi}{2} - \tau, & \tau_2 < \tau \leq \pi, \\ -\frac{7\pi}{2} + \tau, & \pi < \tau \leq 2\pi + \tau_1. \end{cases} \tag{7}$$

Заметим, что выражение (7) для ϕ в нашем приближении отличается от значений ϕ в пороговой модели (например, [3]) лишь наличием наклонных, а не горизонтальных, участков на зависимости ϕ от приведенного значения $\phi_x = 2\pi(\Phi_x/\Phi_0)$ суммарного внешнего потока Φ_x, воздействующего на СКВИД (у нас $\phi_x = \phi_e + a\cdot\cos\tau$). В пороговой модели точная зависимость величины сверхпроводящего тока i_s через контакт от значения ϕ несущественна, и принимается, что при ϕ_x, меньших некоторого порогового значения $\phi_{xП}$, СКВИД полностью диамагнитен, а при $\phi_x = \phi_{xП}$ происходит скачок потока в СКВИДе на $\Delta\phi = 2\pi$. В нашем приближении надо принять $\phi_{xП}$ равным $\phi_1 \simeq \ell + \pi/2$, причем скачки потока происходят при $\tau = \tau_1$ и $\tau = \tau_2$, где

$$\phi_e + a\cdot\cos\tau_1 = \phi_1 ; \quad \phi_e + a\cdot\cos\tau_2 = -\phi_1 + 2\pi. \tag{8}$$

При увеличении амплитуды колебаний скачки начинаются при $\tau_1 = 0$, тогда $\tau_2 \simeq \pi - 2\sqrt{\pi - |\phi_e|}/\sqrt{\ell}$.

Используя (4) и (7), можем теперь найти выражения для i_{Rs} и i_{Rc}:

$$i_{Rs} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\phi_e + a\cdot\cos\tau - \phi}{\ell}\sin\tau\cdot d\tau = -4/\ell,$$

$$i_{Rc} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\phi_e + a\cdot\cos\tau - \phi}{\ell}\cos\tau\cdot d\tau = \left(\frac{a}{\ell} - \frac{4}{\pi\ell}\right) - \frac{4\sqrt{\pi - |\phi_e|}}{\ell^{3/2}}. \tag{9}$$

Как видно из (9), изменения Δi_{Rs} и Δi_{Rc} при появлении скачков в СКВИДе равны

$$\Delta i_{Rs} = i_{Rs} = -4/\ell \quad ; \quad \Delta i_{Rc} = -\frac{4\sqrt{\pi - |\phi_e|}}{\ell^{3/2}} . \qquad (10)$$

Нетрудно показать, что, используя пороговую модель, мы пришли бы к тем же результатам для Δi_{Rs} и Δi_{Rc}.

Учет времени скачка $\Delta\tau \sim \Omega$ приведет к появлению в выражениях (8) для τ_1 и τ_2 добавочных членов порядка Ω, а это скажется на величинах Δi_{Rs} и Δi_{Rc} лишь при $\Omega \sim \ell^{-1/2}$, что и было использовано выше при введении ограничений (6).

Далее, из уравнения (1) и выражений (2,3,10) следует, что относительные приращения $(\Delta a/a)$ амплитуды колебаний в контуре при возникновении скачков в СКВИДе малы, именно:

$$(\Delta a/a) \sim (k^2 Q) \cdot \Delta i_{Rs} \sim \Delta i_{Rs} \ll 1, \qquad (11)$$

так как мы рассматриваем режим работы интерферометра, близкий к оптимальному $(k^2 Q \sim 1)$. Это позволяет принять в качестве ξ_Π такое значение расстройки ξ, при котором приращение импеданса направлено по касательной к окружности постоянного модуля импеданса (рис.2б). При этом величина пороговой расстройки ξ_Π определяется следующим выражением:

$$\xi_\Pi / \delta_0 \simeq - \left| \frac{\Delta i_{Rs}}{\Delta i_{Rc}} \right| , \qquad (12)$$

которое в нашем случае дает значение ξ_Π, равное

$$\xi_\Pi = -\delta_0 \frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{\pi - |\phi_e|}} . \qquad (13)$$

Выражение (13) справедливо лишь при $(\pi - |\phi_e|) \gg \ell^{-1}$, в противном случае при вычислении i_{Rc}, i_{Rs} нужно учитывать, помимо (7), следующие члены в разложении выражения для ϕ.

Величина пороговой расстройки ξ_Π, определяемая выражением (13), качественно согласуется с экспериментом.

5. Заключение

Проведенное исследование прямоугольной формы сигнала интерферометра (в области больших отрицательных расстроек) показывает, что особенностью этого сигнала $A(\Phi_e)$ на низких рабочих частотах $(\Omega \ll 1)$ является наличие гистерезиса. Это, как было отмечено выше, не позволяет простым способом использовать участки с большой крутизной $\gamma = |dA/d\Phi_e|$ для повышения чувствительности интерферометра. Так как наличие двух четко выраженных скачков в СКВИДе является причиной гистерезисного вида исследованной прямоугольной формы сигнала $A(\Phi_e)$, то представляется интерсным исследование режима высоких рабочих частот $\Omega \lesssim 1$, при котором время скачка сравнимо с периодом колебаний в контуре. Возможно, этот режим позволит получить увеличение эффективной крутизны характеристики $A(\Phi_e)$ и соответствующее повышение чувствительности интерферометра.

Литература

1. J.Clarke. PIEEE, 61, 7 (1973).
   Дж. Кларк. ТИИЭР, 61, 9 (1973).
2. J.M.Giffard, R.A.Webb, J.C.Wheatley, J.Low Temp.Phys. 6, 533 (1972).
3. H.Simmonds, W.Parker. J.Appl.Phys., 42, 38 (1971).
4. Б.В.Васильев, А.И.Иваненко, В.Н.Трофимов. Препринт ОИЯИ, Р13-7429, Дубна, 1973.
5. Б.В.Васильев, В.В.Данилов, К.К.Лихарев. Препринт ОИЯИ, Р13-8233, Дубна, 1974.
6. P.K.Hansma. J.Appl.Phys., 44, 4191 (1973).
7. J.E.Mercereau. Rev.Phys.Appl., 5, 13 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 апреля 1975 года