

сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

P13-85-412

М.В.Ляблин, Г.В.Цепилов

АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНОЙ ШИРИНЫ  
КВАНТОВЫХ ПЕРЕХОДОВ  
В ДЕТЕКТОРЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

1985

## ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с результатами работы /1/ амплитуда электромагнитной сигнальной волны, возникающей в результате нелинейного взаимодействия световых волн накачек и гравитационной волны с атомами цезия, описывается выражением

$$C_{10}(z) = -2\pi ikN \frac{d_{01} d_{12} d_{23} d_{34} d_{45} Q_{56} d_{67} d_{78} d_{80}}{h^8 (\Delta_{10} - i\Gamma_{10})(\Delta_{20} - i\Gamma_{20})(\Delta_{30} - i\Gamma_{30})} \times \\ \times \frac{h^* C_{20}^* C_{30}^* C_{40} C_{50} C_{60} C_{70} C_{80} z}{(\Delta_{40} - i\Gamma_{40})(\Delta_{50} - i\Gamma_{50})(\Delta_{60} - i\Gamma_{60})(\Delta_{70} - i\Gamma_{70})(\Delta_{80} - i\Gamma_{80})} \quad /1/$$

где приняты следующие обозначения:  $C_{10}$  - амплитуды световых волн / $i = 1, \dots, 8$ /, определяемые соотношением

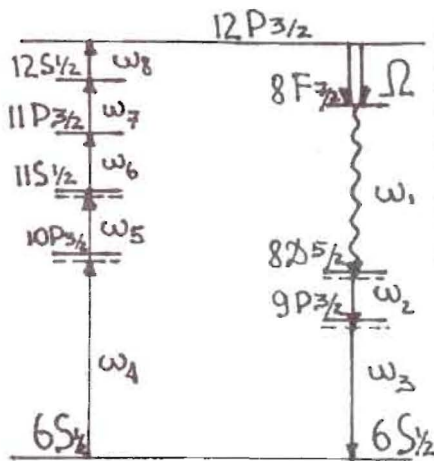
$$C_i(z, t) = C_{10} e^{i(\omega_i t - k_i z)} + \text{к.с.};$$

$k_i = \frac{\omega_i n_i}{c}$  - волновой вектор;  $n_i$  - показатель преломления на частоте  $\omega_i$ ;  $N$  - плотность атомов цезия;  $d_{rs}$  - матричные элементы дипольных переходов  $r \rightarrow s$  / $r, s = 0, \dots, 8$ ;  $s = r + 1$ ,

$Q_{kl} = \langle \frac{P_\alpha P_\beta}{2m\ell} \rangle$  / $k\ell = 56$ / - матричный элемент перехода осциллятора под действием гравитационной волны;  $h$  - амплитуда гравитационной волны;  $\Delta_{r0}$  - отстройка от резонанса;  $\Gamma_{r0} = \frac{1}{2} \Delta \omega_{r0}$ ,  $\Delta \omega_{r0}$  - суммарное уширение спектральной линии для перехода  $r \rightarrow 0$ ;  $z$  - длина когерентного взаимодействия. Формула /1/ получена для случая использования в детекторе семи лазерных накачек и одной гравитационной волны, распространяющихся вдоль оси  $z$ .

На рисунке представлена система энергетических уровней атома Cs, выбранных для реализации схемы детектирования гравитационной волны. Переходы осуществляются из основного состояния  $6S_{1/2}$  с накачкой "вверх" световыми волнами на частотах  $\omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7$  и  $\omega_8$ , а переходы "вниз" индуцируются гравитационной волной с частотой  $\Omega$ , световыми холостыми волнами -  $\omega_2$  и  $\omega_3$  и электромагнитной сигнальной волной -  $\omega_1$ , генерируемой в объеме детектора.

Как видно из формулы /1/, амплитуда сигнальной волны существенно зависит от частотной расстройки волн накачек от резонанса соответствующего перехода, а также от ширины спек-



ральной линии. В уширение спектральной линии излучения газа вносят вклад следующие три механизма: радиационный, доплеровский и столкновительный. Поэтому целью данной работы является вычисление ширин линий, величин дипольных переходов и оценки амплитуды сигнальной волны.

Система уровней атома цезия.

## 1. РАДИАЦИОННОЕ УШИРЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Свободные колебания излучающей системы обязательно должны быть затухающими, так как, излучая, система теряет энергию. Однако, как известно, затухающие колебания не являются монохроматическими, а содержат целый набор частот. Распределение интенсивности в спектре излучения осциллятора частоты  $\omega$  описывается дисперсионной формулой /2/:

$$I(\omega) d\omega = I \frac{\gamma}{2\pi} \cdot \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}, \quad /2/$$

или

$$W(\omega) d\omega = W_{ab} \frac{\gamma}{2\pi} \cdot \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2},$$

где  $\gamma$  - константа радиационного затухания, входящая в формулу энергетических потерь;  $E = E_0 e^{\gamma t}$ ;  $I$  - интенсивность излучения;  $W$  - вероятность излучения фотона с частотой  $\omega$  в интервале от  $\omega$  до  $\omega + d\omega$ ;  $W_{ab}$  - полная вероятность /в единицу времени/ перехода осциллятора  $a \rightarrow b$ , причем  $\int W_i(\omega) d\omega = W_{ab}$ . На частотном расстоянии  $|\omega - \omega_0| = \gamma/2$  от  $\omega_0$  интенсивность излучения равна  $\frac{1}{2} I(\omega_0)$ . Поэтому константу затухания  $\gamma$  часто называют также радиационной шириной линии.

Ширина линии  $\gamma$ , согласно квантовой теории /2/, равна

$$\gamma = \gamma_a + \gamma_b, \quad \gamma_a = \sum_{(E_a > E_c)} W_{ac}, \quad \gamma_b = \sum_{(E_b > E_c)} W_{bc}, \quad /3/$$

где  $E_a, E_b, E_c$  - энергии уровней.

Согласно /3/, радиационная ширина уровня  $a(b)$  равна сумме вероятностей радиационных переходов с уровня  $a(b)$  на все остальные уровни. Величиной  $\tau_a = \gamma_a^{-1}$  определяется время жизни атома в состоянии  $a$ . Таким образом, радиационная ширина линии излучения складается из радиационных ширин начального и конечного уровней. Для основного состояния  $\gamma_b = 0$  и  $\tau_b = \infty$ . Поэтому ширины линий, связанных с переходами в основное состояние, определяются радиационными ширинами верхних уровней. Для резонансной линии  $a \rightarrow b$

$$\gamma = W_{ab} = \frac{2 e^2 \omega_n^2}{m c^3} f_{ab}, \quad /4/$$

где  $m, e$  - масса и заряд электрона,  $c$  - скорость света,  $f_{ab}$  - сила осциллятора. Радиационное уширение такого типа, о котором говорилось выше, имеет место только при условии, что спектр возбуждения достаточно широк. Так, если спектр возбуждения осуществляется за счет поглощения электромагнитного излучения, то следует различать две возможности:

1/ падающее излучение имеет непрерывный спектр. В этом случае ширина линии определяется формулой /2/;

2/ падающее излучение сосредоточено в узком частотном интервале шириной  $\Gamma \ll \gamma_a$  вокруг  $\omega_n$ , причем  $\hbar \omega_n = E_a^0 - E_b^0$  и  $|\hbar \omega - (E_a^0 - E_b^0)| < \gamma_a$ , где  $\omega_n$  - частота перехода;  $E_a^0, E_b^0$  - энергии уровней. В этом случае форма линии совпадает с формой линии возбуждающего излучения и, следовательно, имеет ширину  $\gamma = \Gamma \ll \gamma_a$ .

## 2. ДОПЛЕРОВСКОЕ УШИРЕНИЕ

Частота излучения осциллятора, составляющая скорости которого в направлении луча зрения равна  $v$ , в соответствии с принципом Доплера смещена на величину  $\omega_0 \frac{v}{c}$ . Если принять, что распределение излучающих атомов по  $v$  определяется функцией  $W(v)$ ,

а также учесть, что  $\omega = \omega_0 (1 + \frac{v}{c})$  и  $v = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} c$ , то

$$I(\omega) d\omega = W\left(c \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right) \frac{c}{\omega_0} d\omega. \quad /5/$$

В частности, при максвелловском распределении

$$W(v) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} \frac{dv}{v_0}$$

получаем

$$I(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_g}\right)^2\right] \frac{d\omega}{\Delta\omega_g}, \quad \Delta\omega_g = \omega_0 \frac{v_0}{c}, \quad /6/$$

где  $v = \sqrt{\frac{2kT}{m_a}}$ ;  $k$  - постоянная Больцмана;  $T$  - температура газа;

$m_a$  - масса атома;  $c$  - скорость света.

Распределение интенсивности /6/ симметрично относительно частоты осциллятора  $\omega_0$ . Величина уширения определяется параметром  $\Delta\omega_g$ . На расстоянии  $\Delta\omega_g$  от  $\omega_0$  интенсивность убывает в  $e$  раз. Через параметр  $\Delta\omega_g$  выражается ширина линии, которую мы обозначим посредством  $\delta$ , а интенсивность в максимуме -  $I(\omega_0)$ . Определим ширину линии  $\delta$  аналогично тому, как это было сделано выше в случае радиационного уширения, т.е. как расстояние между точками контура  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , для которых  $I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{1}{2}I(\omega_0)$ . В соответствии с /6/:

$$\delta = 2 \sqrt{\ln 2} \Delta\omega_g.$$

/7/

В тех случаях, когда распределение атомов по  $v$  не является максвелловским, доплеровское уширение определяется общей формулой /5/. Применимость этой формулы ограничена условием малости длины волны  $\lambda = 2\pi c/\omega$  по сравнению с  $vT$ , где  $T$  - время, в течение которого лучевая скорость атома  $v$  не меняется.

### 3. СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЕ УШИРЕНИЕ

Уширение спектральных линий, вызываемое взаимодействием атома с окружающими частицами, зависит от концентрации возмущающих частиц. Вычисление контура спектральной линии с учетом всех возможных взаимодействий представляет собой крайне сложную задачу. Поэтому описание эффектов столкновительного уширения целесообразно вести в рамках максимально упрощенной модели:

1/ относительно движение атома и возмущающей частицы квазиклассично, что позволяет пользоваться понятием траектории возмущающей частицы;

2/ эта траектория прямолинейна;

3/ основную роль в уширении играют взаимодействия с ближайшей возмущающей частицей /бинарные взаимодействия/, т.е. тройными и другими многочастичными взаимодействиями можно пренебречь;

4/ возмущение адиабатично, т.е. не вызывает переходов между различными состояниями атома.

В рамках этих предположений рассмотрение механизма столкновительного уширения спектральных линий приводит к следующим результатам <sup>3/</sup>.

Спектральное распределение имеет вид

$$I(\nu) = I_m \frac{\gamma^2}{16\pi^2[(\nu - \nu_{nm})^2 + (\gamma/4\pi)^2]},$$

/8/

где  $I_m$  - максимум излучения,  $\nu_{nm}$  - частота перехода  $n \rightarrow m$ . Уширение линии равно

$$\gamma = \frac{2\pi e^2 f N}{m \omega_{nm}}.$$

/9/

### 4. СОВМЕСТНОЕ ДЕЙСТВИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ УШИРЕНИЯ

Радиационное и столкновительное уширения являются однородными, и спектральная кривая для них описывается лоренцевой функцией. Доплеровское спектральное уширение - неоднородное - описывается функцией Гаусса. Если необходимо учитывать одновременно два фактора лоренцева уширения, то результирующее уширение спектральной линии будет также лоренцевым <sup>5,4/</sup> и будет иметь суммарную ширину линии  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . В случае действия двух факторов неоднородного уширения суммарное уширение линии будет также неоднородным и описывается гауссовой кривой с суммарной шириной линии  $\gamma = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{1/2}$ . Для смешанного случая, т.е. когда одно уширение лоренцево, а другое - гауссово, результирующая спектральная линия описывается интегралом Войта и представляет собой свертку от двух распределений. Форма линии в этом случае называется фогтовской и является, естественно, промежуточной между лоренцевой и гауссовой кривыми. Спектральная ширина этой линии дана в табулированном виде в работах <sup>8-3/</sup>. Однако в практических расчетах из двух ширин - лоренцевой и гауссовой - обычно берут большую, пренебрегая меньшей шириной /см. <sup>4/</sup>, с.59/.

Как видно из выражения /1/, зависимость амплитуды сигнальной волны от частотных расстройек и ширин линий переходов является обратно пропорциональной. Поэтому имеет смысл сократить до минимума эти величины. Поскольку доплеровское уширение зависит от радиальных составляющих скоростей атомов, а столкновительное - от концентрации частиц, то можно существенно уменьшить соответствующие ширины, используя метод атомных пучков <sup>9/</sup>. Из-за малой плотности частиц в пучке столкновительным уширением можно пренебречь. В этом случае доплеровское уширение имеет следующий порядок <sup>9/</sup>:  $\delta\omega_{\text{доп}} = \phi_0 \Delta\omega_{\text{доп}}$ , где  $2\phi_0$  - угловое расхождение пучка частиц при  $\phi = 10^{-3}$  рад,  $\delta\omega_{\text{доп}} \approx 10^6$  рад/с, что сравнимо с радиационным уширением переходов. Поскольку кривая Гаусса спадает быстрее, чем лоренцева при удалении от максимума, то на расстояниях в несколько ширин линии спектр полностью описывается лоренцевой кривой. Таким образом, величины  $\Gamma_{10}$  из выражения /1/ равны  $\Gamma = \Gamma_{\text{рад}} = \frac{1}{2}(\gamma_n + \gamma_m)$ , где  $\gamma_{n,m}$  - ширина линии перехода на полувысоте кривой излучения.

В обзоре <sup>11/</sup> даны радиационные времена жизни ( $\tau_k$ ) возбужденных состояний атома цезия. В соответствии с /2/ вычисляются ширины линий. Результаты сведены в таблицу.

Таблица

№ П П	переход	$\lambda$ (нм)	$d_i$ $\times 10^{-17}$ (ед. СГСЕ)	$\Gamma_{\text{рад}}$ $\times 10^6$ (Гц)	$\Delta/\Gamma_i$	$\epsilon:$ (ед. СГСЕ)
4	$6S_{1/2} - 10P_{3/2}$	347,79	0,0145	1,11	1000	0,1
5	$10P_{3/2} - 11S_{1/2}$	24813,9	5,256	2,17	10	1
6	$11S_{1/2} - 11P_{3/2}$	34364,2	5,149	0,66	0	1
7	$11P_{3/2} - 12S_{1/2}$	38022,8	4,973	1,81	0	1
8	$12S_{1/2} - 12P_{3/2}$	50505,0	9,436	0,5	0	1
9	$12P_{3/2} - 8F_{7/2}$	53763,4	$\frac{P_d P_p}{2 m e}$	0,5	0	$h$
1	$8F_{7/2} - 8D_{5/2}$	48780,5	5,083	2,97	0	$9,14 \cdot 10^{-8}$
2	$8D_{5/2} - 9P_{3/2}$	192307,7	10,547	3,21	10	1
3	$9P_{3/2} - 6S_{1/2}$	339,86	0,011	0,66	1000	0,1

## 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИПОЛЬНЫХ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В соответствии с  $^{10/}$  величина дипольного матричного элемента определяется выражением

$$\alpha_{rs} = \langle n, \ell, s, j, m | P_z | n', \ell', s', j', m' \rangle =$$

$$= -\ell \langle \ell, s, j, m | T_0^{(1)} | \ell', s', j', m' \rangle \langle n, \ell, || r || n', \ell' \rangle.$$

где

$$\langle \ell, s, j, m | T_0^{(1)} | \ell', s', j', m' \rangle = (-1)^{j-m} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j & 1 & j' \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} \langle \ell, s, j || T || \ell', s', j' \rangle;$$

$$\langle \ell, s, j || T^{(1)} || \ell', s', j' \rangle = (-1)^{\ell+s+j+1} (2j+1)^{1/2} \times$$

$$\times (2j'+1)^{1/2} \begin{pmatrix} j & 1 & j' \\ \ell' & s & \ell \end{pmatrix} \langle \ell || T^{(1)} || \ell' \rangle$$

$$\langle \ell || T^{(1)} || \ell' \rangle = (-1)^\ell (2\ell+1)^{1/2} (2\ell'+1)^{1/2} \begin{pmatrix} \ell & 1 & \ell' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После простых преобразований окончательно получим

$$\langle \ell, s, j, m | T_0^{(1)} | \ell', s', j', m' \rangle = (-1)^{j+j'+3\ell+s-m} \times$$

$$\times (2j+1)^{1/2} (2j'+1)^{1/2} \begin{pmatrix} j & 1 & j' \\ -m & 0 & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & 1 & j' \\ \ell+1 & s & \ell \end{pmatrix} \sqrt{\ell+1},$$

где в фигурных скобках 6-j-символы, в круглых скобках - 3-j-символы Вигнера;  $n$  - главное квантовое число;  $\ell$  - орбитальное квантовое число;  $s$  - спин электрона;  $j = \ell + s$ ;  $m$  - магнитное квантовое число;  $e$  - заряд электрона.

Величины  $\langle \ell, s, j || T^{(1)} || \ell', s', j' \rangle$  и  $\langle n, \ell || r || n', \ell + 1 \rangle$  табулированы в  $^{10/}$ . Однако для переходов с  $\ell = 3$  данные не приводятся. Для вычисления дипольных матричных элементов переходов с F-уровней мы воспользовались общим формализмом. Значения дипольных матричных элементов приведены в таблице.

## 6. АМПЛИТУДА СИГНАЛЬНОЙ ВОЛНЫ

Расчет по формуле /1/ для выбранной системы переходов /см. рисунок/ и в предположении мощностей накачек:  $C_3 = C_4 = 0,1$  приводит к следующему результату для амплитуды сигнальной волны:  $C_{10} = 9,14 \cdot 10^{-8}$  ед. СГСЕ или  $N_{\text{сиг}} = 6 \cdot 10^3$  фотон./имп. при условиях, что  $z = 1$  см,  $h = 10^{-33}$ ,  $r_{\text{и}} = 10^{-6}$ ,  $N = 10^{13}$  см $^{-3}$ .

Полученная таким образом сигнальная волна может быть надежно задетектирована гетеродинным приемником.

Нам бы хотелось поблагодарить наших коллег за ценные замечания и помощь, которую они оказали при подготовке рукописи, особенно А.Ф.Писарева, Ю.А.Плиса, А.А.Сазонова.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вакару С.И. В кн.: Гравитационные волны. Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. ОИЯИ, Д2,13-83-689, Дубна, 1983, с.60.
2. Собельман И.И. Введение в теорию атомных спектров. Физматгиз, М., 1966, с.452.
3. Королев Ф.А. Теоретическая оптика. "Высшая школа", М., 1966, с.124.
4. Эвелто О. Физика лазеров. "Мир", М., 1979.
5. Лоудон Р. Квантовая теория света. "Мир", М., 1976.
6. Kuhn H.G. Atomic Spectra. 2nd ed. Longmans, Green and Co., London, 1969, ch.VII.
7. Davies J.T., Vaghan J.M. J.Astrophys., 1963, 137, p.1302.

8. Elste G. Z.Astrophys., 1953, 33, p.157.
9. Летохов В.С. Нелинейные селективные фотопроцессы в атомах и молекулах. "Наука", М., 1983, с.59.
10. Eichler H. IEEE Journ. of Quantum Electronics, 1975, QE 11, No.4, p.121.
11. Веролайнен Я.Ф. и др. УВН, 1982, 137, вып.2, с.316,333.

Рукопись поступила в издательский отдел  
31 мая 1985 года.

Ляблин М.В., Цепилов Г.В.

P13-85-412

Анализ ширины квантовых переходов в детекторе гравитационных волн

Рассматриваются вопросы, связанные с шириной спектральных линий в атомах щелочных металлов, которые используются в качестве рабочего вещества приемника гравитационных волн. Анализируется уширение спектральных линий за счет столкновений между атомами, доплер-эффекта, спонтанного излучения атомами. Рассматривается совместное действие различных механизмов уширения спектральных линий. При определенных условиях /использование охлажденного атомного пучка с малым расхождением/ можно снизить действие столкновительного и доплеровского уширения и тем самым значительно сузить ширину спектральной линии; на этом основании делается вывод о возможности получения регистрируемой сигнальной волны в приемнике гравитационных волн.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Lyablin M.V., Tsepilov G.V.

P13-85-412

Analysis at the Quantum Transition Width in the Gravitation Wave Detector

Problems related to the width of spectral lines in atoms of alkali metals used as working substance in the gravitation wave receiver are discussed. Widening of spectral lines due to collisions of atoms, the Doppler effect, spontaneous atomic radiation is analysed. Joint actions of various widening mechanisms are considered. Under certain conditions (a cooled slightly divergent atomic beam) one can reduce the widening due to collisions and the Doppler effect. Thus the width of the spectral line becomes much narrower. This important fact is a base for the conclusion that it is possible to register a signal wave in the gravitation wave receiver.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1985