



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

658/2-81

9/2-81
P13-80-558

Б.В.Васильев

**СИГНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
РАДИОЧАСТОТНОГО ГИСТЕРЕЗИСНОГО СКВИДА**

Направлено в ЖТФ

1980

Радиочастотный сквид, представляющий собой джозефсоновский контакт, шунтированный малой сверхпроводящей индуктивностью, используется в качестве датчика квантового сверхпроводящего интерферометра для измерения сверхмалых приращений магнитных потоков, полей, их градиентов, а также электрических токов и напряжений /1-4/. Обычно считывание информации о состоянии гистерезисного ВЧ сквида /т.е. информации о приложенном к сквиду магнитном потоке/ осуществляется с помощью колебательного контура, индуктивно связанного со сквидом. Радиочастотный ток накачки в контуре вызывает изменение состояний джозефсоновского контакта, что в свою очередь влияет на колебания тока в контуре, по параметрам которых можно сделать заключение о состоянии контакта и, в конечном итоге, о приложенном к нему магнитном потоке. Диссипация энергии в контакте приводит к появлению амплитудного сигнала интерферометра. Кроме того, воздействие сквида приводит к изменению собственной частоты системы сквид-контур и, как следствие, фазы вынужденных колебаний, т.е. ведет к появлению частотного и фазового сигналов..

Описание этих сигналов фактически сводится к нахождению импеданса сквида, что трудно сделать в общем случае, так как переходы потока в сквиде имеют скачкообразный характер, но задача сильно упрощается при использовании высокочастотного колебательного контура. Такой контур из широкого спектра частот воздействия выбирает только гармоническую составляющую на собственной частоте. Поэтому для описания сигнальных характеристик системы сквид-контур достаточно найти эффективный импеданс сквида на первой гармонике этой частоты, представив систему сквид-контур эквивалентной схемой, показанной на рис.1, и системой уравнений:

$$I_t [R_t + j(\omega L_t - \frac{1}{\omega C_t})] = E + j\omega M I_s .$$

/1/

$$I_s [R_j + j\omega (L_s + L_j)] = j\omega M I_t .$$

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
БИБЛИОТЕКА

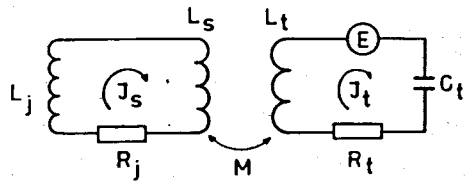


Рис. 1

Здесь индекс t относится к элементам контура, L_s - индуктивность скивда /геометрическая/, $M = k \sqrt{L_t L_s}$ - взаимная индукция скивда с контуром, R_j и L_j - эффективное сопротивление и индуктивность джозефсоновского контакта, возникающие за счет скачков потока в скивде, E - амплитуда напряжения накачки. Если иметь в виду автогенерационный режим накачки, при котором расстройка в контуре отсутствует, т.е.

$$\text{Im } I_t = 0, \quad /2/$$

из /1/ получим амплитуду тока в контуре:

$$I_t = \frac{E/R_t}{1 + \{k^2 Q q_s / [1 + (q_s + q_j)^2]\}} \quad /3/$$

Здесь

$$Q = \frac{\omega L_t}{R_t}; \quad q_s = \frac{\omega L_s}{R_j}; \quad q_j = \frac{\omega L_j}{R_j}.$$

Сдвиг собственной частоты контура ω под воздействием скивда /частотный сигнал/ выразим из /1/, используя /2/:

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{k^2}{2} \frac{q_s (q_s + q_j)}{1 + (q_s + q_j)^2}, \quad /4/$$

где $\Delta \omega = \omega - \omega_0$; $\omega_0 = (L_t C_t)^{-1/2}$.

Для нахождения величин q_s и q_j , описывающих состояние системы, рассмотрим подробнее процессы в скивде.

Ток в скивде I_s течет через джозефсоновский контакт и в низкочастотном приближении определяется уравнением

$$I_s = I_c \sin \frac{2\pi}{\Phi_0} \int V_j dt, \quad /5/$$

I_c - критический ток контакта, V_j - напряжение на контакте, Φ_0 - квант магнитного потока.

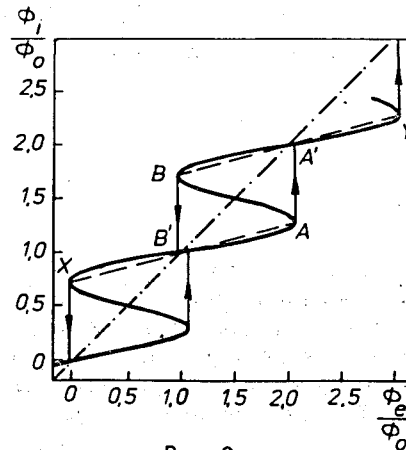


Рис. 2

Используя уравнение /5/, мы предполагаем, что ток в скивде $I_s \leq I_c$. Если внешний источник создает в скивде магнитный поток Φ_e , то циркулирующий по скивду сверхпроводящий ток можно определить из равенства:

$$\Phi_e = L_s I_s + \Phi_j, \quad /6/$$

$\Phi_j = L_j I_s$ - магнитный поток в джозефсоновском контакте. Учитывая, что,

по определению,

$V = - \frac{d\Phi}{dt}$ и $\int V_j dt = I_s L_j$, получаем, что величина проникшего в скивд /внутреннего/ магнитного потока Φ_i , равного потоку в контакте,

$$\Phi_i = \Phi_j = \Phi_e - L_s I_s,$$

откуда получаем известную зависимость /1/:

$$\Phi_i = \Phi_e - L_s I_c \sin 2\pi \frac{\Phi_i}{\Phi_0}. \quad /7/$$

График зависимости внутреннего потока Φ_i как функции приложенного потока Φ_e показан на рис.2. Эта зависимость однозначна, если параметр гистерезиса скивда

$$\beta = \frac{2\pi I_c L_s}{\Phi_0} \quad /8/$$

меньше единицы. Если $\beta > 1$, эта функция многозначна и при увеличении Φ_e от 0 до Φ_{eA} изменение Φ_i идет по кривой ХА; дальнейшее увеличение Φ_e ведет к скачку потока в скивде и переходу Φ_e на ветвь ВУ и далее подобным образом. Уменьшение потока Φ_e от значения Φ_{eY} ведет к обратному скачку потока Φ_i на ветвь ХА при переходе Φ_e через значение Φ_{eB} . Так как скачок потока Φ_i из Φ_{iA} к Φ_{iA}' /рис.2/ происходит,

когда $\sin 2\pi \frac{\Phi_{iA}}{\Phi_0} = 1$, а из Φ_{iB} в Φ_{iB}' , когда $\sin 2\pi \frac{\Phi_{iB}}{\Phi_0} = -1$, то приближенно критический поток для этих случаев

$$\Phi_{eA} = \frac{\Phi_0}{4} + I_c L_s,$$

/9/

$$\Phi_{eB} = \frac{3}{4} \Phi_0 - I_c L_s.$$

Для упрощения нахождения величины скачка потока $\Phi_{iA}' - \Phi_{iA}$ используем линейную аппроксимацию, соединив точки X и A, B и Y отрезками прямых, и будем полагать, что от значения Φ_{iA} внутренний поток скачком изменяется до величины Φ_{iA}' , а не до соответствующего значения на синусоиде, что справедливо при не слишком малых β . В этом приближении вместо /7/ для участка $-\frac{\Phi_0}{4} < \Phi_i < \frac{\Phi_0}{4}$ можем записать

$$\Phi_i = \frac{\Phi_e}{1 + 2\beta/\pi},$$

/10/

и величина скачков

$$\Phi_{iB} - \Phi_{iB}' = \Phi_{iA}' - \Phi_{iA} = \Phi_0 (1 - \pi/2\beta).$$

/11/

Внешний поток, приложенный к радиочастотному скивду, складывается из квазипостоянного /изменяемого/ потока Φ_x и потока накачки $\Phi_p \sin \theta$.

$$\Phi_e = \Phi_x + \Phi_p \sin \theta, \quad \theta = \omega t.$$

/12/

Так как мы считаем ток в скивде гармоническим и равным по амплитуде критическому току контакта, то первый скачок ($\Phi_{iA} \rightarrow \Phi_{iA}'$) всегда происходит в максимуме внешнего потока, т.е. при фазе накачки $\theta_A = \frac{\pi}{2}$. Поэтому из /9/ и /12/ находим

$$\Phi_{eA} = \Phi_x + \Phi_p = \frac{\Phi_0}{4} + I_c L_s.$$

/13/

При не слишком малом параметре β обратный скачок потока происходит при θ_B , близких к $3/2\pi$:

$$\theta_B = \frac{3}{2}\pi - \xi; \quad \xi \ll \pi/2.$$

/14/

и из /9/ и /12/

$$\Phi_{eB} = \Phi_x + \Phi_p \sin \theta_B \approx \frac{3}{4} \Phi_0 - I_c L_s,$$

откуда при $|\Phi_x| \leq \frac{\Phi_0}{2} \ll I_c L_s$

$$-\sin \theta_B \approx \left(1 - \frac{\Phi_0 - 2\Phi_x}{I_c L_s}\right)$$

/15/

и

$$\xi \approx 2 \sqrt{\frac{\Phi_0 - \Phi_x}{I_c L_s}}$$

/16/

Эффективный импеданс скивда, возникающий за счет скачков потока в скивде, будет пропорционален количеству этих скачков в единицу времени. Вычисление вероятности скачка в периоде тока накачки как функции ее амплитуды приближенно может быть проведено следующим образом.

Энергия в контуре при прохождении одного гистерезисного цикла AA'BB' /рис.2/ уменьшается на величину, пропорциональную площади этого цикла:

$$\epsilon = \frac{(\Phi_{eB} - \Phi_{eA})(\Phi_{iA}' - \Phi_{iA})}{L_s} \approx 2I_c \Phi_0 (1 - \pi/\beta).$$

/17/

Считая эту энергию малой по сравнению с полной энергией в контуре $\frac{L_t I_t^2}{2}$, что справедливо опять же при не слишком малых β , получаем, что амплитуда тока в контуре после прохождения гистерезисного цикла упадет от величины I_t на

$$\Delta I \approx \frac{2I_c \Phi_0 (1 - \pi/\beta)}{I_t L_t}$$

/18/

а соответствующая амплитуда тока в скивде станет чуть меньше I_c . Следующий гистерезисный цикл будет пройден после того, как источник накачки компенсирует эту потерю энергии и ток в скивде вновь достигнет критического значения. Обозначим через I_E превышение тока в контуре над значением I_t , это превышение существовало бы при данной амплитуде накачки в отсутствие потерь в скивде:

$$I_E = \frac{E}{R_t} - I_t \quad /19/$$

Нарастание тока в контуре идет по экспоненциальному закону с постоянной времени $\tau = \frac{2Q}{\omega}$, и поэтому

$$\Delta I = I_E (1 - e^{-T_1/\tau}), \quad /20/$$

T_1 - время между прохождением двух следующих друг за другом гистерезисных циклов.

Отсюда вероятность прохождения гистерезисного цикла за период накачки

$$W = -\pi/Q \cdot \ln \left[1 - \frac{2I_0 \Phi_0 (1 - \pi/\beta)}{I_t^2 L_t \left(\frac{E}{R_t I_t} - 1 \right)} \right] \quad /21/$$

Как видно, эта вероятность растет в начале плато быстро, а далее изменяется линейно, достигая единицы в конце плато.

Учитывая, что $I_t \approx \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_s}{L_t}} I_c$ на участке плато, не слишком близком к началу,

$$W = \frac{\beta \left(\frac{E}{R_t I_t} - 1 \right)}{4k^2 Q (1 - \pi/\beta)} \quad /22/$$

Амплитудный сигнал. Для описания амплитудного сигнала сквида необходимо вычислить величину эффективного вносимого скачками потока сопротивления сквида для первой гармонической составляющей тока:

$$R_j = - \frac{\omega W \int_0^{2\pi} \Phi_1 \cos \theta d\theta}{\int_0^{2\pi} \left(I_0 - \frac{|\Phi_x|}{L_s} \right) \sin^2 \theta d\theta} \quad /23/$$

Здесь мы учли, что используемая нами модель позволяет считать, что по сквиду течет только гармоническая составляющая тока, имеющая в среднем амплитуду, равную критической величине I_c за вычетом циркулирующего тока:

$$I_s = I_c - \frac{|\Phi_x|}{L_s} = I_c \left(1 - \frac{|\phi_x|}{\beta} \right); \quad \phi_x = \frac{\Phi_x \cdot 2\pi}{\Phi_0} \quad /24/$$

Используя /11/, получаем

$$R_j = - \frac{\omega W \Phi_0}{\pi I_c} \left(1 - \frac{\pi/2 - |\phi_x|}{\beta} \right) \sin \theta \Big|_{\theta_A}^{\theta_B} \quad /25/$$

учтя, что $\theta_A = \frac{\pi}{2}$, и использовав /15/, окончательно имеем

$$R_j = \frac{4W\omega L_s}{\beta} \left[1 - \frac{\frac{3}{2}\pi - 2|\phi_x|}{\beta} \right], \quad /26/$$

откуда

$$q_s = \frac{\omega L_s}{R_j} = \frac{\beta}{4W} \left[1 + \frac{\frac{3}{2}\pi - 2|\phi_x|}{\beta} \right]. \quad /27/$$

Здесь, как и ранее, мы предполагали, что $\pi/\beta \ll 1$.

Зависимость напряжения на контуре от приложенного к сквиду магнитного потока можно получить, учтя, что в соответствии с системой уравнений /1/ и равенства /24/

$$I_t = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_s}{L_t}} \cdot \frac{\sqrt{(q_j + q_s)^2 + 1}}{q_s} \cdot I_c \left(1 - \frac{|\phi_x|}{\beta} \right). \quad /28/$$

При не слишком малых β , когда $q_s \gg 1$ и

$$\frac{q_j}{q_s} \ll 1, \quad /29/$$

получаем известную /1-4/ зависимость вида "треугольной пилы":

$$U_t = \omega L_t I_t \approx \gamma \beta \frac{\Phi_0}{2\pi} \left(1 - \frac{|\phi_x|}{\beta} \right) \quad /30/$$

с периодом, равным Φ_0 , и размахом

$$\Delta U = \gamma \frac{\Phi_0}{2}, \quad /31/$$

здесь

$$\gamma = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{L_t}{L_s}} \quad /32/$$

Длину плато вольт-амперной характеристики системы сквид-контур можно определить, учитывая, что его началу, обозначенному индексом s соответствует ток

$$I_t(s) = \frac{E(s)}{R_t}$$

т.к. в начале плато скачки потока происходят редко и $q_s \rightarrow \infty$. В конце плато, обозначенном индексом f , из /3/ и /27/ находим

$$I_t(f) = \frac{E(f)}{R_t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4k^2Q}{\beta}} \quad /33/$$

Полагая, что наклон плато отсутствует, т.е. $I_t(f) = I_t(s)$, получим выражение для длины плато:

$$\Delta E = E(f) - E(s) = \frac{2}{\pi} \gamma^2 \Phi_0 \quad /34/$$

Условие оптимизации амплитудного сигнала можно получить из уравнений /3/ и /31/. В начале верхнего плато, обозначенного индексом u ,

$$U_t(s, u) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \gamma \beta, \quad /35/$$

т.к. здесь $w \rightarrow 0$.

В конце нижнего плато, обозначенного индексом d ,

$$U_t(f, d) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \gamma(\beta - \pi) = \frac{E(f, d)Q}{1 + \frac{4k^2Q}{\beta(1 - \pi/2\beta)}}, \quad /36/$$

т.к. здесь $W \rightarrow 1$.

Считая, что оптимально эти участки лежат один под другим, т.е. $E(s, u) = E(f, d)$, получаем*

$$(k^2Q)_{opt} = \frac{\pi}{4} (1 + \pi/2\beta). \quad /37/$$

* Это и полученные ранее выражения дают критерий, который можно использовать при визуальной проверке правильности настройки интерферометра, т.к. величину k^2Q можно оценить на глаз прямо из отношения $\frac{\Delta E}{\Delta U} = k^2$, т.к. $E \sim \frac{U}{Q}$.

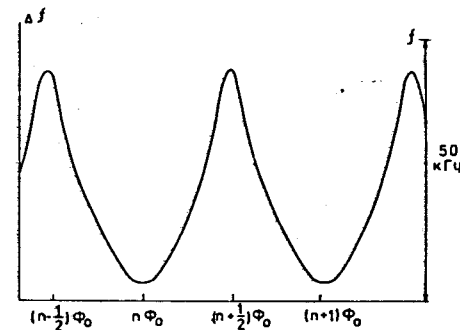


Рис. 3

Частотный и фазовый сигналы. Скачки потока в сквиде ведут не только к диссипации энергии, но и к возникновению дополнительного реактивного сопротивления сквида. Если система сквид-контур является резонатором автогенератора, то частота этого автогенератора будет сдвигаться за счет дополнительного реактивного сопротивления - возникнет частотный сигнал. В случае

накачки генератором с фиксированной частотой за счет дополнительного реактивного сопротивления возникнет фазовый сдвиг между накачкой и колебаниями в контуре - фазовый сигнал. Для описания частотного и фазового сигналов в выбранном приближении достаточно вычислить дополнительную индуктивность, возникающую в сквиде для первой гармоники тока:

$$L_j = \frac{W \int_0^{2\pi} \Phi_x \sin \theta d\theta}{\int_0^{2\pi} (I_c - \frac{|\Phi_x|}{L_s}) \sin^2 \theta d\theta} \quad /38/$$

Учтя /11/, имеем

$$L_j = \frac{2L_s W}{\beta} \left(1 - \frac{\pi - |\phi_x|}{\beta}\right) (-\cos \theta_B), \quad /39/$$

откуда, используя равенства /14/ и /16/, получаем

$$\frac{L_j}{L_s} = \frac{4W}{\beta} \left(1 - \frac{\pi - |\phi_x|}{\beta}\right) \sqrt{\frac{\pi - |\phi_x|}{\beta}}. \quad /40/$$

Рассматривая опять случай не слишком малых β из /4/, имеем

$$\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{k^2}{2} \left(1 + \frac{L_j}{L_s}\right)^{-1} = \frac{k^2}{2} \left(1 - \frac{4W}{\beta} \sqrt{\frac{\pi - |\phi_x|}{\beta}}\right). \quad /41/$$

Эта формула удовлетворительно количественно описывает наблюдаемый экспериментально частотный сигнал /даже при не очень больших β /, показанный на рис.3. Этот сигнал был получен в конце первого плато при $k^2 = 0,07$; $Q = 90$; $\beta \approx 10$. Как

форма, так и амплитуда этого сигнала описываются формулой /41/ примерно с десятипроцентной точностью, что говорит об адекватности рассмотренного описания.

Фазовый сдвиг при фиксированной накачке

$$\Delta\theta = 2\pi \frac{\Delta\omega}{\omega}$$

/42/

также удовлетворительно описывается как по форме, так и по амплитуде формулой /41/ /5/.

Данное выше описание сигнальных характеристик сквида в своих исходных положениях полностью совпадает с развитым ранее и уже ставшим традиционным способом описания сквида - методом гармонического баланса^{/2,4,5/}. Но использование отличной от традиционной эквивалентной схемы дает возможность упростить расчеты, сохранив необходимую точность, и сделать рассмотрение процессов в радиочастотном гистерезисном сквиде более наглядным.

Автор искренне благодарен В.В.Данилову, В.К.Игнатовичу, Г.С.Кривому, В.В.Шмидту и В.И.Шныркову за полезные обсуждения и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Silver A.H., Zimmerman J.E. Josephson Weak-Link Devices. In: Applied Superconductivity. N.Y., 1975.
2. Лихарев К.К., Ульрих Р. Системы с джозефсоновскими контактами. Изд-во МГУ, М., 1978.
3. Васильев Б.В., Иваненко А.И., Трофимов В.Н. РиЭ, 1975, т. XX, вып. 6, с. 1255.
4. Васильев Б.В., Данилов В.В., Лихарев К.К. IEEE Trans. Magn., 1975, v. Mag-11., p. 743.
5. Васильев Б.В., Данилов В.В., Сермягин А.В. ОИЯИ, P13-10171, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 августа 1980 года.