ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р13 - 7867

Л.Г.Ткачев, В.Д.Шестаков

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПУЗЫРЬКА В ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ

1974

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

P13 - 7867

Л.Г.Ткачев, В.Д.Шестаков

АВТОМОДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПУЗЫРЬКА В ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ

Направлено в Intern. Journ. of Heat
and Mass Transfer

Развитие методики резонансных и ультразвуковых камер потребовало более глубокого рассмотрения динамики парового пузырька в жидкости. Его поведение определяют такие нелинейные процессы, как тепло-массообмен на движущейся границе раздела фаз, пульсации на собственной частоте и т.д., что приводит к необходимости рассмотрения системы нелинейных уравнений [1], аналитическое решение которой удается получить лишь в простейших случаях [2,3]. Основные результаты в этой области получены численными методами. Наряду со своими достоинствами, они обладают тем недостатком, что требуют больших затрат машинного времени для получения каждого конкретного решения.

В данной работе рассмотрены следствия ковариантности уравнений, описывающих поведение однородного парового пузырька относительно преобразования независимых переменных как при постоянном, так и при переменном, зависящем от времени, давления в жидкости, в частности, в ультразвуковом поле. Ковариантность уравнений приводит к автомодельной зависимости радиуса пузырька от времени, что позволяет сократить объем численных расчетов.

1. Коллапс паровых пузырьков при постоянном давлении

Как известно [2,3], рост парового пузырька в перегретой жидкости при постоянном давлении определяется в основном процессом передачи тепла между жидкостью и пузырьком, т.е. уравнением тепловодности в жидкости

$$R^2 \frac{\partial T}{\partial t} + R\dot{R}\nu(1-\nu^3)\frac{\partial T}{\partial \nu} = D\nu^4 \frac{\partial^2 T}{\partial \nu^2}$$

$$0 \leq \nu = \frac{R(t)}{r} \leq 1 \qquad /1/$$

с начальными и граничными условиями

$$T(0,\nu) = T_0(\nu);\ R(0)=R_0\ ;\ k\frac{\partial T(t,1)}{\partial \nu} = -\rho' L\dot{R}R$$

$$T(t,1)=T';\ T(t,0)=T_\infty\ . \qquad /2/$$

Здесь $T(t,\nu)$ - температура жидкости на расстоянии $r = \frac{R}{\nu}$ от центра пузырька в момент времени t, T', ρ' - температура и плотность пара в пузырьке, которые в данном случае не зависят от времени, поскольку давление в жидкости постоянно. T_∞ - температура жидкости на бесконечности, k и D - коэффициенты тепло- и температуропроводности жидкости, L - теплота парообразования.

Исходя из ковариантности уравнения /1/ и условий /2/ относительно преобразования независимых переменных

$$t \to \tilde{t} = mt \qquad /3/$$

$$r^2 \to \tilde{r}^2 = mr^2\ , \qquad /4/$$

в работе [3] было показано, что рост паровых пузырьков при постоянном давлении в перегретой жидкости описывается автомодельным решением уравнения /1/ $T(t,\nu) = T(\nu)$, а зависимость радиуса пузырька от времени имеет вид

$$R^2(t) = R^2(0) + At\ , \qquad /5/$$

где $A > 0$. В работах [4,5] показано, что коллапс парового пузырька при постоянном давлении также описывается уравнением /1/ с условиями /2/, причем $T' > T_\infty$. Однако в этом случае автомодельное температурное распределение и формула /5/ с $A < 0$ не имеют физического смысла, так как не удовлетворяется одно из граничных условий /2/.

В данной работе рассматриваются следствия ковариантности уравнения /1/ и соответствующих начальных и граничных условий относительно преобразований /3/, /4/, как при постоянном, так и зависящем от времени давлении в жидкости.

В общем случае для ковариантности уравнения /1/ относительно преобразований /3/, /4/ необходимо, чтобы функция $R^2(t)$, описывающая зависимость радиуса пузырька от времени, преобразовывалась следующим образом:

$$R^2(t) \to \tilde{R}^2(mt) = mR^2(t). \qquad /6/$$

Если $R^2(t)$ и $T(t,\nu)$ являются решениями /1/ и /2/, то преобразованные решения выражаются через них в виде

$$\tilde{R}^2(t) = mR^2\left(\frac{t}{m}\right)$$

$$\tilde{T}(t,\nu) = T\left(\frac{t}{m},\nu\right)\ . \qquad /6'/$$

Равенство /6/ означает, что зависимости $R^2(t)$ образуют однопараметрическое автомодельное семейство, отдельные кривые которого связаны друг с другом преобразованием подобия с центром подобия в начале координат.

На *рис. 1* приведены зависимости $R^2(t)$, описывающие захлопывание пузырьков различных начальных радиусов в жидком водороде при постоянном давлении, полученные численным интегрированием более общей системы уравнений, учитывающей как поверхностное натяжение, так и динамические эффекты, обусловленные инерцией жидкости [1]. Видно, что подобие кривых $R^2(t)$ дейст-

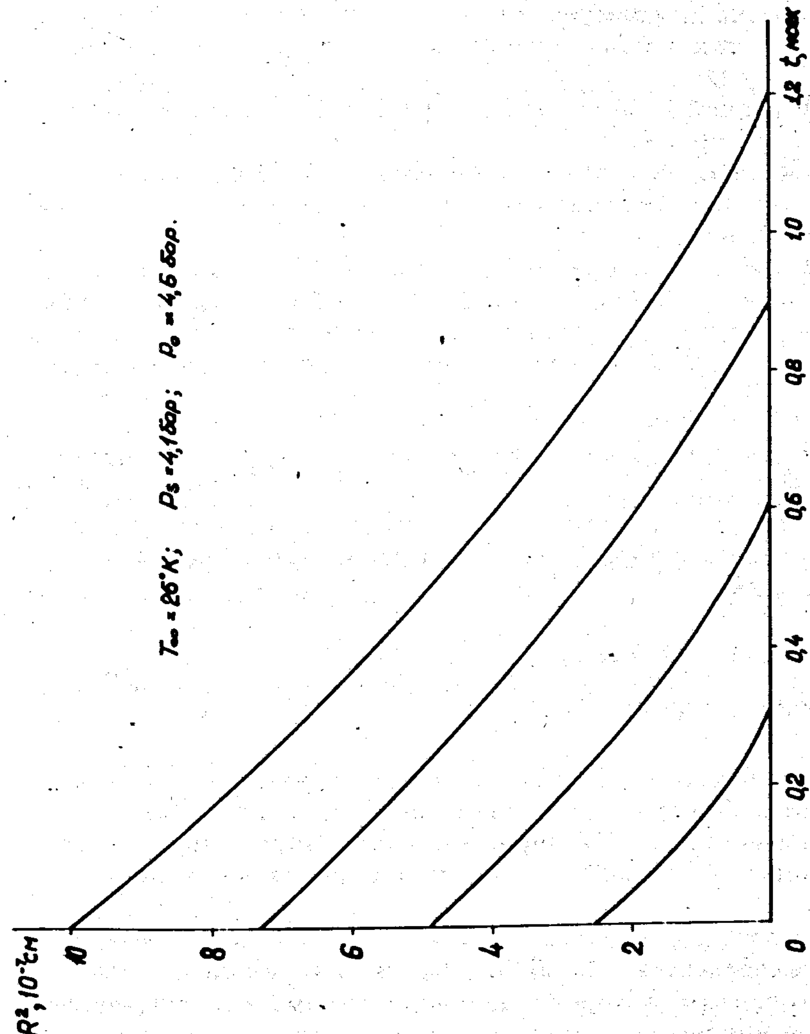

Рис. 1. Коллапс паровых пузырьков различных радиусов в жидком водороде. Численные решения.

вительно имеет место, причем усложняющие факторы оказываются несущественными.

Рассмотрим равенства /3/ и /6/ в начальный момент времени $t=0$ и в момент захлопывания пузырька t^*

$$\tilde{R}^2(0) = m R^2(0), \quad \tilde{t}^* = m\, t^*;$$

исключая параметр преобразования m, получаем как следствие автомодельности кривых $R^2(t)$, что

$$\tilde{t}^* = \frac{\tilde{R}^2(0)}{R^2(0)}\, t^*,$$

т.е. время жизни пузырька пропорционально квадрату начального радиуса - результат, отмечавшийся при численных расчетах[5]. Существенно, что начальное температурное распределение $T_0(\nu)$ может быть произвольным, но фиксированным.

В принципе, функцию $R^2(t)$ для коллапса пузырька при постоянном давлении можно получить аналитически из решения интегрального уравнения

$$\Phi(x,\tau) = \int_0^\tau d\tau' \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi+1}\, \Phi(\xi,\tau')\left[F(\tau')\frac{(\xi+1)^3-1}{\xi+1}+2\right]\frac{\partial G(x,\tau,\xi,\tau')}{\partial x},$$

которое следует из /1/ и /2/ при пренебрежении влиянием начального температурного распределения $T_0(\nu)$, где

$$F(\tau) \equiv \frac{1}{R(\tau)}\frac{dR(\tau)}{d\tau} = \frac{k\,\Delta T}{\rho' LD}\,\Phi(0,\tau)$$

$$\Phi(x,\tau) = \frac{1}{\Delta T}\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial x}, \quad \Delta T = T' - T_\infty$$

$$\tau = D\int_0^t \frac{dt}{R^2(t)}, \quad x = \frac{(r-R)}{R}.$$

$$G(x,\tau,\xi,\tau') = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau-\tau')}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(\tau-\tau')}}\right]$$

/G - функция Грина канонического уравнения теплопроводности/.Решение этой задачи требует преодоления значительных математических трудностей.

Заметим, что функция $R^2(t)$ зависит от параметров ΔT, k, ρ', L в комбинации $(k\Delta T)/(\rho' L)$.

2. *Поведение пузырька в течение рабочего цикла классической пузырьковой камеры*

До сих пор рассматривалось поведение парового пузырька при постоянном давлении в жидкости. Однако в пузырьковых камерах рост и коллапс паровых пузырьков происходит при изменяющемся во времени давлении. Поскольку давление в камере изменяется достаточно медленно, то инерциальными эффектами можно пренебречь. Тогда поведение пузырька можно описать уравнением /1/ с начальными и граничными условиями :

$$\left.\begin{aligned} &T(0,\nu)=T_0(\nu), \quad R(0)=R_0 \\ &T(t,1)=T'(t), \quad T(t,0)=T_\infty \end{aligned}\right\} \qquad /7/$$

$$\left(L\frac{d\rho'}{dT'} + c_s\rho'\right)\frac{dT'}{dt} = -\frac{3}{R^2}\left(k\frac{\partial T(t,1)}{\partial\nu} + \rho' L R\dot{R}\right), \qquad /8/$$

где удельная теплоемкость насыщенного пара c_s и производная $\frac{d\rho'}{dT'}$ вычисляются вдоль кривой фазового равновесия. Температура пара зависит от времени $T'(t)$,

что обусловлено соответствующей зависимостью от времени давления в жидкости и определяется из условия термодинамического равновесия жидкости и пара $T'=f(P)$. Величина, стоящая в левой части соотношения /8/, зависит только от температуры $T'(t)$. Нетрудно проверить, что соотношения /7/ и /8/ ковариантны относительно преобразований /3/,/4/,/6/, причем остаются в силе равенства /6'/, которые следует дополнить соответствующим преобразованием давления

$$\tilde{P}(t)=P\left(\frac{t}{m}\right). \qquad /9/$$

Из ковариантности уравнений /1/, /7/ и /8/ следует автомодельность функции $R^2(t)$. На *рис. 2* сплошной кривой представлено численное решение общей системы уравнений [1], полученное при тех значениях термодинамических параметров, которые реализованы в течение рабочего цикла жидководородной пузырьковой камеры [6]. Изменение давления в камере представлено на нижнем графике. Пунктиром представлены численные решения, которые соответствуют преобразованным зависимостям $\tilde{P}(t)$ при $m=2$ и 4.

Видно, что факторы, нарушающие автомодельность, и в этом случае несущественны. Представляет интерес проверка автомодельности экспериментально, т.е. получение данных, соответствующих преобразованным зависимостям $\tilde{R}^2(t)$ и $\tilde{P}(t)$, согласно формулам /6'/ и /9/.

3. *Поведение пузырька в ультразвуковой пузырьковой камере*

Уравнения /1/, /2/ и /8/ справедливы, если рассматриваются достаточно большие пузырьки. При переходе к меньшим размерам необходимо учитывать влияние сил поверхностного натяжения. При этом в правой части соотношения /8/ появляются дополнительные слагаемые [1], нарушающие его ковариантность. Учет инерции жидкости, существенный при быстром изменении давления, описы-

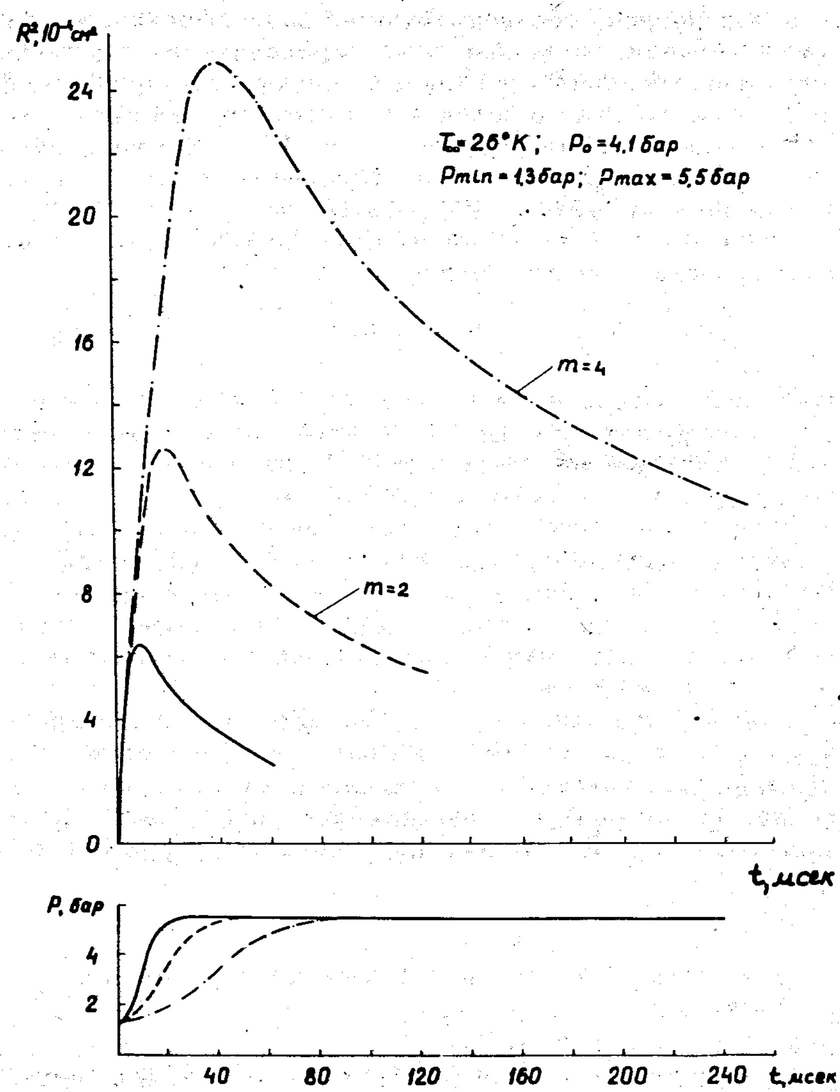

Рис. 2. Зависимости $R^2(t)$ в течение рабочего цикла жидководородной пузырьковой камеры при различных режимах. Сплошная кривая соответствует экспериментальным данным /6/. На нижнем графике представлены соответствующие зависимости давления в камере от времени $P(t)$.

вается уравнением Релея, которое также нековариантно при преобразованиях /3/, /4/ и /6/. Таким образом, поведение пузырька в ультразвуковой камере определяется в общем случае нековариантной системой уравнений. Однако в работах /1/ было показано, что рост однородного парового пузырька в ультразвуковой камере определяется выпрямленной тепловой диффузией. Это означает, что уравнение /1/ с условиями /7/, /8/ и в этом случае играет существенную роль, и, следовательно, их ковариантность относительно преобразований /3/, /4/ и /6/ должна существенным образом сказываться на свойствах зависимостей $\bar{R}^2(t)$. /$\bar{R}(t)$ - средний за период радиус пузырька/. В статическом приближении /пренебрежение инерцией жидкости/ давление пара в пузырьке определяется функцией вида $P = P(ft)$, где f - частота ультразвукового поля. Преобразование /9/ для такой функции

$$\tilde{P}(t) = P\left(\frac{ft}{m}\right) \equiv P(\tilde{f}t), \qquad /10/$$

$$\tilde{f} = \frac{f}{m} \qquad /11/$$

приводит к связи между кривыми $\bar{R}^2(t)$, соответствующими частотами f и $\tilde{f}$.

Исключая параметр преобразования m из равенств /6/ и /11/ и переходя к измерению времени в периодах ультразвукового поля, приходим к универсальной зависимости

$$F(n) = \tilde{f}\,\bar{\tilde{R}}^2(n) = f\,\bar{\bar{R}}^2(n), \qquad /12/$$

где n - число периодов ультразвукового поля. На *рис. 3* представлены зависимости $f\bar{R}^2(n)$ при различных частотах, полученные численным интегрированием общей системы уравнений /1/, при фиксированных начальном температурном распределении $T_0(\nu)$, статическом давлении P_0 = 4,6 *бар* и амплитуде ультразвукового поля P_1 = 2,03 *бар* и температуре жидкого водорода T_∞=26° К. Начальные радиусы пузырьков выбраны таким образом, чтобы соотношение /12/ для них имело место. Различие

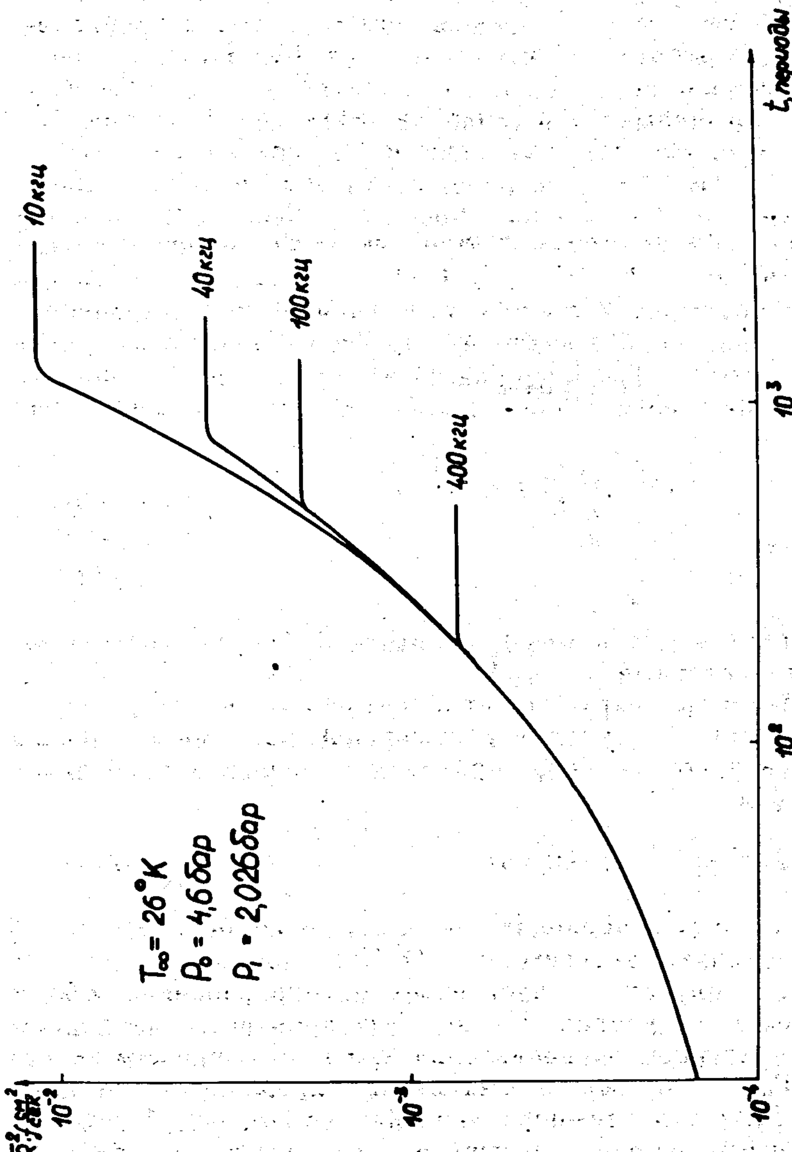

Рис. 3. Зависимости $\bar{R}^2(t)$ f, полученные для различных частот ультразвука. В различии хода отдельных кривых проявляется степень нарушения автомодельности.

хода отдельных кривых можно считать мерой нарушения автомодельности функций $\bar{R}^2(t)$, обсуловленного влиянием инерции жидкости при пульсациях парового пузырька под действием ультразвукового поля.

Как и следовало ожидать, по мере роста пузырька и приближения его резонансной частоты к частоте ультразвука, существенную роль начинают играть инерционные эффекты и автомодельность нарушается тем раньше, чем выше частота ультразвукового поля.

Для достаточно низких частот автомодельное поведение кривых $R^2(t)$ имеет место, что позволяет получить эти зависимости, не прибегая к численным расчетам.

В заключение авторы благодарят В.А.Акуличева и В.А.Жукова за интерес к работе.

Литература

1. *Л.Г.Ткачев, В.Д.Шестаков. Акустический журнал, 18, 433 /1972/; 19, 257 /1973/; ОИЯИ, Р13-7206, Дубна, 1973.*
2. *M.S.Plesset, S.A.Zwick. J.Appl.Phys., 23, 95 (1954); 25, 493 (1954). G.Birkhoff, R.S.Margulies, W.A.Horning. Phys.Fluids, 1, 201 (1958).*
3. *L.E.Scriven. Chem.Eng.Sci., 10, 1 (1959).*

   Л.Г.Ткачев. ОИЯИ, Р13-3726, Дубна, 1968.
4. *Л.Г.Ткачев. Автореферат диссертации. ОИЯИ, 5-6377, Дубна, 1972.*
5. *Л.Г.Ткачев, В.Д.Шестаков. ОИЯИ, Р13-6037, Дубна, 1971.*
6. *G.Harigel, G.Horlitz, S.Wolff. Preprint DESY 67/14 (1967).*

Рукопись поступила в издательский отдел
15 апреля 1974 года.