

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



1/IV-24

B-191

P13 - 7489

1295/2-74

Б.В.Васильев, А.И.Иваненко, В.Н.Трофимов

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО  
КВАНТОВОГО МАГНИТОМЕТРА

**1973**

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

P13 - 7489

Б.В.Васильев, А.И.Иваненко, В.Н.Трофимов

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО  
КВАНТОВОГО МАГНИТОМЕТРА

Направлено в журнал "Радиотехника и электроника"



Васильев Б.В., Иваненко А.И., Трофимов В.Н. P13 - 7489

О выборе оптимальных параметров сверхпроводящего квантового магнитометра

Рассмотрен вопрос о выборе оптимального коэффициента связи и оптимальной рабочей частоты сверхпроводящего квантового магнитометра. Экспериментально полученная зависимость отношения сигнал - шум подтверждает сделанные выводы.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.  
Дубна, 1973

Vasiliev B.V., Ivanenko A.I., Trofimov V.N.

On the Choice of Optimal Parameters for P13 - 7489  
the Superconductive Quantum Magnetometer

A problem of choosing the optimal coupling coefficient and optimal working frequency for superconductive quantum magnetometer is considered. The present experimental signal-noise dependence confirms the drawn conclusions.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.  
Dubna, 1973

Как впервые показано Лондоном /1/, полный магнитный поток  $\Phi_{\Sigma}$ , пронизывающий сверхпроводящее кольцо, квантуется

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_x + I L_R = n \frac{hc}{2e} = n \phi_0 \quad /1/$$

Здесь  $\Phi_x$  - магнитный поток, связанный с кольцом, создаваемый внешними источниками,  $I$  - ток, текущий по внутренней поверхности кольца, имеющего эффективную индуктивность  $L_R$ ,  $n$  - целое число,  $\phi_0 = \frac{hc}{2e}$  - квант магнитного потока.

Если кольцо содержит разрыв - "слабую связь" или туннельный контакт Джозефсона /рис. 1/, то условие квантования /1/ к такому кольцу неприменимо, но общее определение потока

$$\Phi_{\Sigma} = \Phi_x + I L_R \quad /2/$$

сохраняет силу. В связи с тем, что в этом случае ток, циркулирующий по кольцу, протекает через контакт Джозефсона, величина тока подчиняется уравнению Джозефсона /2/

$$I = I_{кр} \sin 2\pi \frac{\Phi_{\Sigma}}{\phi_0} \quad /3/$$

Здесь  $I_{кр}$  - критический ток джозефсоновского контакта. Подставляя /3/ в равенство /2/, получим трансцендентное уравнение

$$\Phi_{\Sigma} - L_R I_{кр} \sin 2\pi \frac{\Phi_{\Sigma}}{\phi_0} = \Phi_x \quad /4/$$

описывающее поведение полного магнитного потока в зависимости от внешнего потока для кольца, имеющего слабое звено.

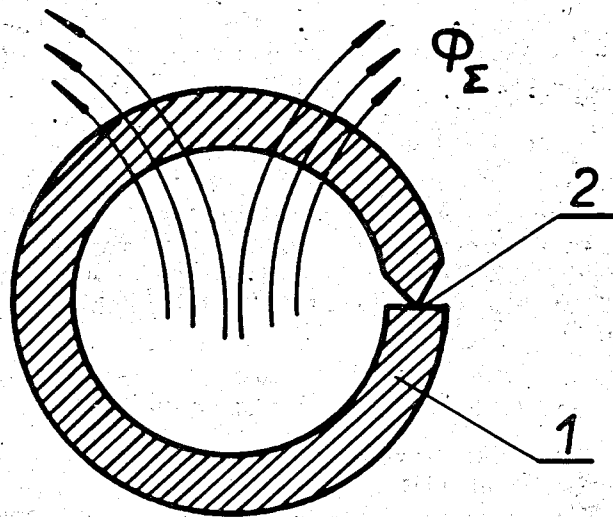


Рис. 1. 1 - сверхпроводящее кольцо, 2 - слабая связь.

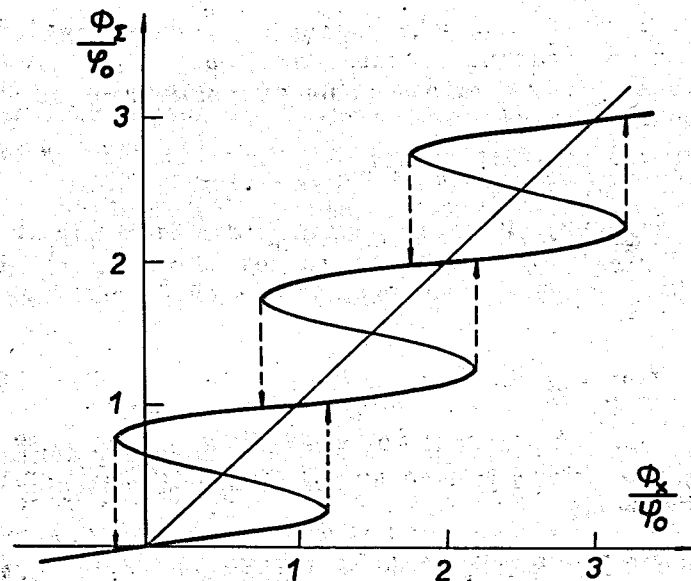


Рис. 2. Зависимость полного магнитного потока в сверхпроводящем кольце со слабой связью от величины магнитного потока, создаваемого внешними источниками.

Анализ уравнения /4/ может быть проведен графически. Так, если  $L_R I_{кр} \ll \phi_0$ , то влияние осциллирующего члена пренебрежимо мало, и характеристикой кольца является прямая, проходящая под углом  $45^\circ$  /рис. 2/. Если  $L_R I_{кр}$  достаточно велико /несколько больше  $\phi_0$ /, то на прямую наложатся осцилляции с периодом по переменному  $\Phi_\Sigma$ , равным  $\phi_0$ . Участки этой характеристики кольца, имеющие отрицательную производную, описывают неустойчивые состояния /устойчивые состояния потока обозначены на рис. 2 более жирными линиями/. Если внешний поток  $\Phi_x$  изменяется в пределах, больших  $I_{кр} L_R$ , то может произойти скачкообразный переход из одного устойчивого состояния в другое, что изображено на рисунке пунктирными стрелками. Рассмотрим случай, когда внешний поток есть

$$\Phi_x = \Phi_{x0} + \Phi_{x1} \sin \omega_0 t, \quad /5/$$

где  $\Phi_{x0}$  - квазипостоянный поток, подлежащий измерению,  $\Phi_{x1} \sin \omega_0 t$  - поток, с помощью которого производится опрос состояния сверхпроводящего кольца, причем для простоты предлагается

$$\Phi_{x1} \approx I_{кр} L_R \quad /5a/$$

Как видно из рис. 3, иллюстрирующего этот случай, реакция кольца на опрашивающий радиочастотный поток будет существенно различной в зависимости от того, какое значение имеет квазипостоянный поток  $\Phi_{x0}$ . Если поток  $\Phi_{x0}$  равен целому числу квантов  $\phi_0$ , то колебания потока кольца происходят в одном устойчивом состоянии, и результирующий отклик кольца есть  $\Phi_{\Sigma \min}$ .

поток  $\Phi_{x0} = (n+1/2)\phi_0$ , то дважды за период изменения радиочастотного потока происходят скачкообразные переходы из одного устойчивого состояния в другое, что приводит к увеличению радиочастотного отклика кольца до величины  $\Phi_{\Sigma \max}$  за счет появления гистерезиса. Промежуточные значения потока  $\Phi_{x0}$  приводят к промежуточным значениям радиочастотных потоков  $\Phi_\Sigma$  и при непрерывном изменении  $\Phi_{x0}$  поток  $\Phi_\Sigma$  периодически растет от значений  $\Phi_{\Sigma \min}$  к  $\Phi_{\Sigma \max}$  и далее снова уменьшается до  $\Phi_{\Sigma \min}$ .

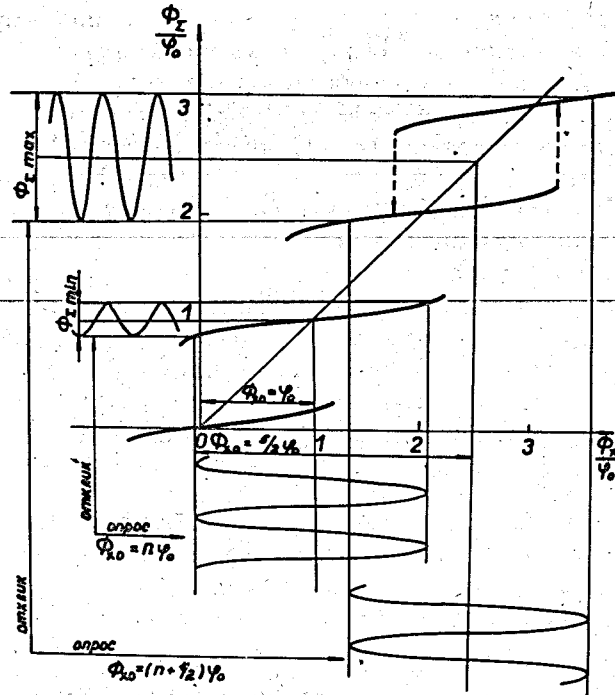


Рис. 3. Иллюстрация зависимости радиочастотного отклика кольца от величины квазипостоянного внешнего потока.

Так как величина скачка при переходе из одного устойчивого состояния в другое примерно равна  $\phi_0$ , можно считать, что амплитуда изменения отклика кольца равна:

$$\Delta \Phi_{\Sigma} = \Phi_{\Sigma \max} - \Phi_{\Sigma \min} = \phi_0 \quad /6/$$

Экспериментально для измерения величины отклика кольца удобно кольцо индуктивно связать с колебательным контуром, резонансная частота которого равна частоте опроса  $\omega_0$ .

Вычислим напряжение, возникающее на таком контуре под воздействием отклика кольца /опрашивающий поток удобно создавать рассматриваемым контуром, хотя он может иметь и другой источник/. Для этой цели представим отклик как результат протекания по кольцу некоторого эффективного тока с амплитудой

$$i_R = \frac{1}{2} \Delta \Phi_{\Sigma} / L_R, \quad /7/$$

создаваемого эквивалентным генератором /рис. 4/, амплитуда напряжения которого определяется равенством

$$e_r = \Delta \Phi_{\Sigma} \cdot \omega_0 / 2. \quad /8/$$

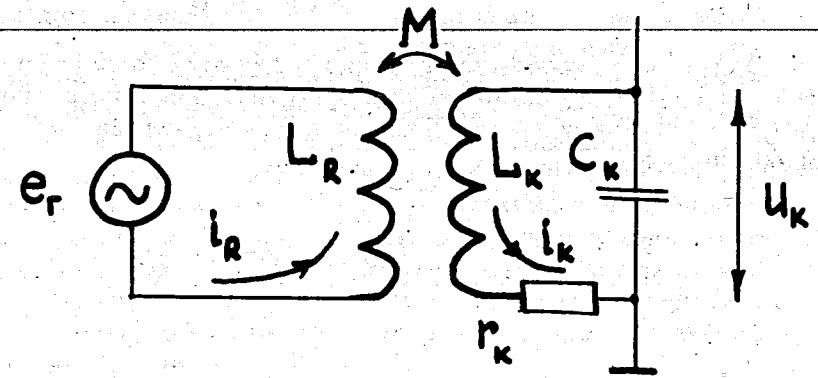


Рис. 4. Эквивалентная схема датчика.

При равенстве частоты эквивалентного генератора /частоты опроса/ резонансной частоте колебательного контура уравнения Кирхгофа имеют вид:

$$e_r - j\omega_0 M i_k = j\omega_0 L_R i_R$$

$$-j\omega_0 M i_R = r_k i_k.$$

Здесь  $M$  - взаимная индукция контура и кольца,  $i_k$  и  $r_k$  - ток и нормальное сопротивление контура. Используя такую эквивалентную схему, мы предполагаем, что активным сопротивлением точечного контакта можно пренебречь по сравнению с его индуктивным сопротивлением. Как показано в работе /16/, такой индуктивный режим оказывается более выгодным в смысле получения

большей чувствительности, и потому мы рассматриваем только этот случай. В дальнейшем настройка точечных контактов велась так, чтобы экспериментально найти и зафиксировать этот режим. Решив уравнения /9/, получим величину амплитуды напряжения на контуре, возникающую вследствие воздействия кольца

$$U_k = \sqrt{\frac{L_k}{L_R}} \epsilon_r \frac{kQ}{\sqrt{1+k^4 Q^2}} \quad /10/$$

Здесь  $k$  - коэффициент связи датчика с контуром,  $Q = \omega_0 L_k / r_k$  - добротность контура. Учитывая определение амплитуды эквивалентного генератора, из /8/ и /6/ получим:

$$U_k = \frac{\phi_0}{2} \frac{\sqrt{L_k} \omega_0}{\sqrt{L_R}} \frac{kQ}{\sqrt{1+k^4 Q^2}} \quad /11/$$

При слабой связи  $\omega_0 = 1/\sqrt{L_k C_k}$  и напряжение на контуре можно записать в виде:

$$U_k = \frac{\phi_0}{2} \frac{1}{\sqrt{L_R C_k}} \frac{kQ}{\sqrt{1+k^4 Q^2}} \quad /12/$$

Здесь  $C_k$  - емкость колебательного контура.

В реальных магнитометрах /3-5/ напряжение на колебательном контуре усиливается по высокой частоте, детектируется, затем измеряется выходное напряжение. Так как выходное напряжение пропорционально амплитуде отклика  $\Phi_{\Sigma}$ , оно является периодической функцией измеряемого потока и называется сигналом магнитометра. Величина  $U_k$ , определяемая равенством /12/, является амплитудой сигнала магнитометра, приведенной к его входу. До настоящего времени в литературе часто можно встретить другую формулу, описывающую величину сигнала магнитометра на его входе:

$$U_k = \phi_0 \omega_0 L_k / 2M, \quad /13/$$

полученную авторами /3,6,7/ иным путем.

Далее будет показано, что формула /13/ описывает частный случай сильной связи датчика и контура.

Вопрос связи в сверхпроводящем магнитометре стал обсуждаться сравнительно недавно /11/. До этого некоторые исследователи /3,8,9/ признавали существование оптимальной связи, но, не зная условий оптимизации, путем подбора взаимного расположения индуктивности контура и датчика получали максимально возможное отношение сигнал/шум; другие же /10/ стремились достичь наиболее сильной связи. Симмондс и Паркер /11/ при решении уравнений квантового состояния сверхпроводящего кольца со слабой связью на аналоговой вычислительной машине нашли, что коэффициент взаимной индукции  $M$  не является удобной величиной для характеристики связи. Этим способом они определили, что условие оптимальной связи есть  $k^2 Q = 1$ .

В настоящее время большинство экспериментаторов эмпирически оптимизируют связь /4,6,12,13/.

Для того чтобы выяснить роль параметра  $k^2 Q$  и других коэффициентов, входящих в формулу /10/, рассмотрим их физический смысл. Коэффициент  $(L_k/L_R)^{1/2}$ , входящий в равенство /10/, описывает трансформацию напряжения от одновиткового датчика к многовитковой катушке; коэффициент  $k$  учитывает связь потоков датчика и контура; множитель  $Q$  дает учет накопления потока контуром, происходящего за счет резонансного воздействия датчика на контур. Фактор  $kQ$ , таким образом, описывает отношение накопленного контуром потока к потоку кольца-датчика. Накопленный поток воздействует в свою очередь на кольцо. Это обратное воздействие учитывается фактором  $k^2 Q$ . Экспериментально фактор  $k^2 Q$  может быть реализован как много большим единицы, так и много меньшим ее. В этих предельных случаях, согласно формуле /12/, сигнал будет относительно малым. Действительно, при  $k^2 Q \ll 1$



$$U_k = \frac{\phi_0}{2\sqrt{L_R C_k}} k Q \quad /14/$$

При  $k^2 Q \gg 1$  амплитуда сигнала определяется как

$$U_k = \frac{\phi_0}{2\sqrt{L_R C_k}} k^{-1} \quad /15/$$

Нетрудно видеть, что такая запись полностью эквивалентна формуле /13/, используемой зарубежными авторами для описания амплитуды сигнала. Как отмечено рядом экспериментаторов /4,11/, в этом предельном случае наблюдается возрастание шумов и нестабильностей, а также искажается форма сигнала.

Согласно /12/, амплитуда сигнала достигает максимального значения в том случае, когда фактор обратного воздействия контура на кольцо  $k^2 Q$  равен единице

$$U_k = \frac{\phi_0}{2\sqrt{2L_R C_k}} \sqrt{Q} \cdot k^{-1} \quad /16/$$

Эта формула приводит к выводу о том, что экспериментально для получения оптимального сигнала целесообразно использовать колебательный контур с максимальной высокой добротностью, всегда подбирая связь так, чтобы поддерживать фактор  $k^2 Q$  близким к единице. Следует заметить, что такой вывод справедлив только для случая, когда основной шум магнитометра создается или радиосхемой, или частично колебательным контуром, так как реально оптимизируется отношение сигнал/шум, в то время как формула /16/ описывает величину сигнала.

Исходя из формулы /16/, можно рассмотреть описанные к настоящему времени в литературе методы выделения сигнала:

• а/ Циммерман и его коллеги /3,4/, используя метод Q-метра, съем сигнала с датчика производили с помощью колебательного контура, добротность которого была  $\approx 10^2$ , т.к. катушка индуктивности наматывалась медной прово-

локой. Вся радиосхема размещалась вне криостата при комнатной температуре.

б/. В работе /10/ был использован автодинный метод, при котором колебательный контур являлся элементом автогенератора. Радиосхема размещалась внутри криостата и работала при гелиевой температуре. Для намотки индуктивности использовался сверхпроводник, что позволило получить добротность контура  $\approx 10^3$ . Этот метод, по сравнению с предыдущим, позволяет, в принципе, получить лучший результат за счет более высокой добротности контура и отсутствия шумов и нестабильностей внешнего генератора. Авторы /10/ не проводили оптимизации и реализованный ими коэффициент связи не был близок к оптимальному. Следует отметить, что наличие в автогенераторе сильной положительной обратной связи, строго говоря, делает приведенное выше рассмотрение к этому случаю неприменимым.

в/. Нами в работе /5/ методом Q-метра с использованием сверхпроводящей катушки индуктивности контура и работающего при гелиевой температуре первого каскада усилителя продемонстрирована возможность получения сигнала с хорошим отношением сигнал/шум. Преимущество этого метода - в удобстве проведения оптимизации коэффициента обратного воздействия  $k^2 Q$  при использовании высокодобротного сверхпроводящего контура.

Для осуществления такой оптимизации и тем самым для проверки зависимости амплитуды сигнала от коэффициента связи, даваемой формулой /12/, нами был собран макет, который позволял внутри криостата управлять положением катушки контура относительно датчика. Конструкция датчика описана ранее /5/ и практически не отличалась от использованной Циммерманом /3/. В связи с тем, что изменение связи между контуром и кольцом-датчиком приводит к значительному изменению резонансной частоты, потребовалось использовать специальный широкополосный малозумящий усилитель, дающий возможность вести измерения на разных частотах без перестройки радиочастотного тракта /рис. 5/.

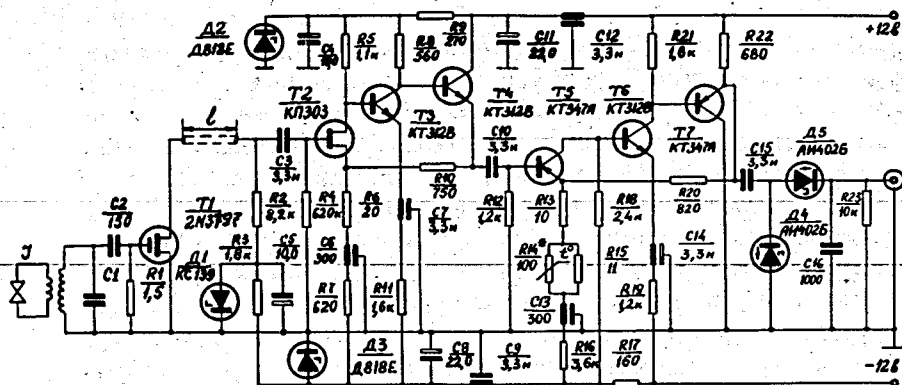


Рис. 5. Принципиальная схема высокочастотного усилителя.

Первый каскад был построен на германиевом полевом транзисторе типа 2N3797 и находился вблизи датчика в криостате при гелиевой температуре.

Измерение коэффициента связи  $k$  может быть проведено двумя способами /6/.

Первый основывается на зависимости резонансной частоты контура от коэффициента связи, так как эффективная индуктивность контура есть  $L' = L_0(1 - k^2)$ , где  $L_0$  — индуктивность при нулевой связи. Эта формула справедлива в предположении, что вторичная цепь, с которой индуктивно связан контур, не имеет потерь.

Второй метод основан на том, что связь может быть измерена на постоянном токе, так как взаимная индукция  $M = k\sqrt{L_R L_k} = \phi_0 / \Delta i \phi_0$  определяется по значению тока  $\Delta i \phi_0$ , необходимого для изменения потока через датчик на один квант  $\phi_0$ .

Для определения  $k$  в этом случае необходимо знать еще индуктивность кольца  $L_R$  и контура  $L_k$ .

Точность второго метода значительно выше, особенно для малых значений  $k$ , поэтому наши измерения велись именно этим методом. Как показали измерения, коэффициент связи зависит примерно линейно от расстояния между центром датчика и центром катушки индуктивности.

Добротность колебательного контура  $Q$  измерялась по полуширине резонансной кривой с помощью электронно-цифрового частотомера. При этом амплитуда ВЧ-напряжения бралась заведомо меньше напряжения, необходимого для перевода точечного контакта в резистивное состояние, так, чтобы получить значение  $Q$  собственно контура, шунтированного лишь большим входным сопротивлением предусилителя.

Как видно из рис. 6, величину добротности при малом коэффициенте связи можно считать не зависящей от связи, что мы неявно предполагали в приведенных выше расчетах.

На рис. 7 треугольниками показана зависимость фактора  $kQ/\sqrt{1+k^4Q^2}$  /отложенного в относительных единицах/ от коэффициента  $k^2Q$ . Здесь же показана зависимость величины отношения сигнал/шум на выходе магнитометра, полученная в том же цикле измерений. Согласно между величиной отношения сигнал/шум и фактором  $kQ(1+k^4Q^2)^{-1/2}$  позволяет сделать вывод о применимости формулы /12/ к описанной схеме магнитометра.

Рассмотрим вопрос о выборе оптимальной рабочей частоты магнитометра.

Пропорциональность амплитуды сигнала, описываемой формулой /13/, частоте опроса  $\omega_0$  побудила авторов работы /14/ для получения большего сигнала магнитометра поднять рабочую частоту до 300 МГц, а авторы /15/ работали в гигагерцевом диапазоне. Нам кажется, что этот весьма трудный путь повышения частоты опроса магнитометра не является самым рациональным.

Трактовка, даваемая формулой /12/, указывает другой путь получения оптимального сигнала — уменьшение емкости колебательного контура. Важно, что при этом увеличивая индуктивность  $L_k$ , частоту опроса  $\omega_0$  можно поддерживать в радиотехнически наиболее удобном диапазоне.

Вообще говоря, эти пути будут абсолютно эквивалентными, если повышение частоты опроса вести за счет уменьшения емкости контура. Кажущееся раз-



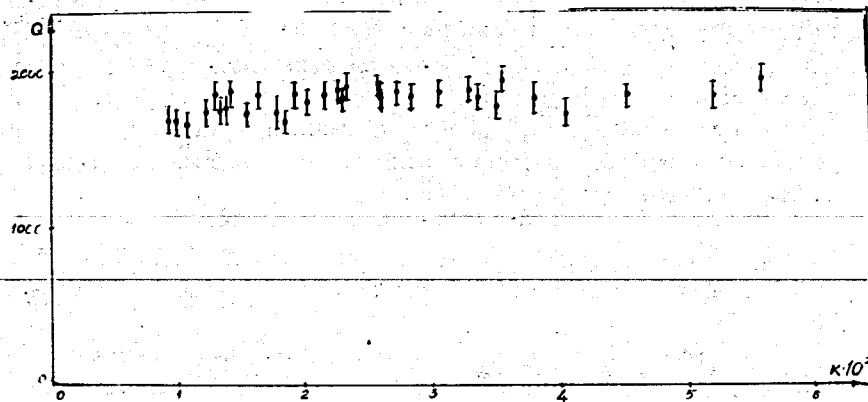


Рис. 6. Зависимость добротности контура от коэффициента связи с датчиком.

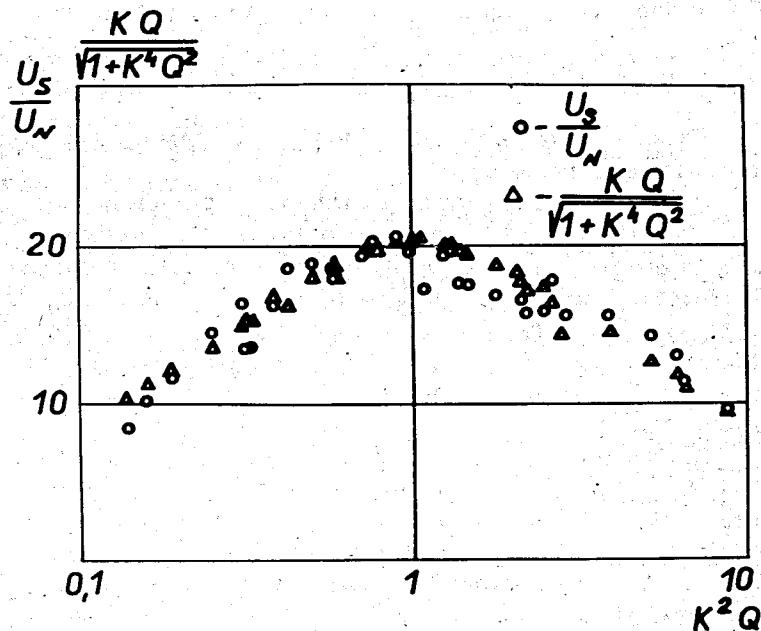


Рис. 7. Зависимость отношения сигнал/шум и фактора  $kQ/\sqrt{1+k^4Q^2}$  в относительных единицах/ от коэффициента связи  $k^2Q$ .

личие появляется в том случае, если изменение частоты ведется за счет изменения индуктивности контура. При этом, согласно формуле /12/, амплитуда сигнала не изменится. Формула /13/ как будто указывает на рост амплитуды с частотой, однако эта зависимость также исчезает, если учесть изменение остальных параметров, входящих в формулу /13/, происходящее при изменении индуктивности контура.

Для проверки правильности формулы /12/ были проделаны измерения величины отношения сигнал/шум на выходе магнитометра для различных емкостей  $C_k$  колебательного контура. При этих измерениях индуктивность колебательного контура  $L_k$  не изменялась, чтобы сохранить постоянной связь контура с датчиком.

Эти измерения велись с тем же датчиком и с той же радиосхемой, что и измерения зависимости сигнала от коэффициента связи.

В качестве индуктивности колебательного контура использовалась двухслойная катушка, намотанная свинцовой проволокой, диаметром около 150 мкм. 55 витков при внутреннем диаметре катушки, равном 1,3 мм, позволили получить индуктивность  $L_k$ , равную 0,5 мкГн. В качестве емкостей колебательного контура использовались конденсаторы типа КСО-1, величиной 100; 150; 200; 270; 470; 750 пф. Независимые измерения показали, что в колебательный контур входят также входная емкость первого транзистора и емкость монтажа, в сумме имеющие величину, примерно, 30 пф. Измерения резонансной частоты контура в зависимости от полной емкости  $C_k$  с удовлетворительной степенью точности подтвердили правильность учета емкостей и неизменность остальных параметров. Коэффициент связи при этих измерениях с точностью около 10% сохранялся равным 0,03; добротность контура была близка к  $10^3$ . Результаты измерений величины отношения сигнал/шум в зависимости от  $C_k$ , приведенные на рис. 8, подтверждают правильность формулы /12/.

Иллюстрацией результата проведенной оптимизации параметров магнитометра, работающего в автодинном режиме при  $k^2Q \sim 1$ , может служить показанная на

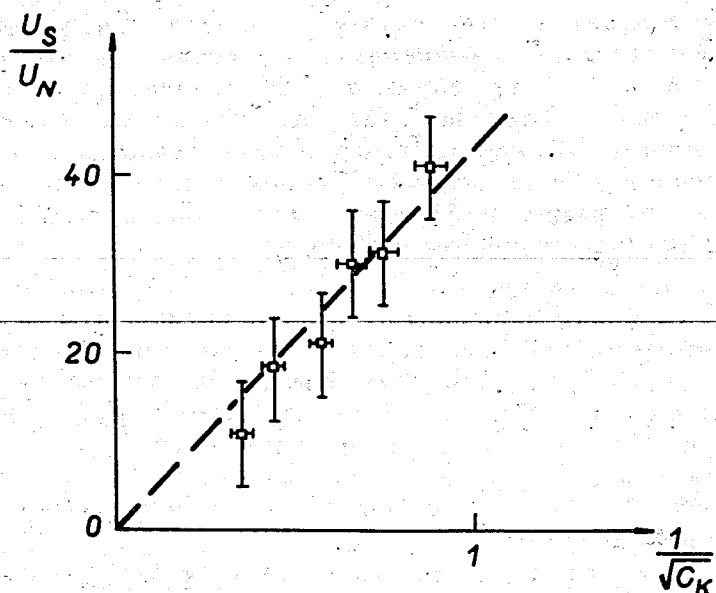


Рис. 8. Отношение сигнал/шум как функция емкости контура  $C_k$  при неизменной индуктивности  $L_k$ .



Рис. 9. Сигнал на выходе магнитометра при импульсном изменении квазипостоянного потока через датчик на  $\phi_0 / 1000$  длительностью  $\sim 15$  сек.

рис. 9 запись реакции магнитометра на калибровочное изменение внешнего потока, величиной  $\phi_0 / 1000 = \sim 2 \times 10^{-10}$  эрст./см<sup>2</sup> и длительностью примерно 15 сек. при постоянной времени регистрации, равной 1 сек.

В заключение следует отметить, что, как указал нам К.К.Лихарев, проведенную оптимизацию параметров магнитометра нельзя считать единственно возможной. Действительно, сигналом магнитометра можно называть также производную  $\partial(\Delta U_k) / \partial \phi_{x0}$  и оптимизировать эту величину относительно напряжения шумов. Оба подхода эквивалентны, пока  $k^2 Q \leq 1$  и напряжение на контуре при изменении внешнего потока изменяется по линейному закону. Однако при  $k^2 Q \gg 1$  имеют место нелинейные эффекты и, в принципе, возможен режим работы, дающий высокую чувствительность, несмотря на наличие в этом режиме более высоких шумов.

Авторы благодарны К.К.Лихареву за интересное обсуждение, а также М.С.Язвницкой за помощь в монтаже радиосхем и Э.Д.Свердлину за помощь в проведении эксперимента.

#### Литература

1. F.London. *Superfluids* (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1950), v.1.
2. B.D.Josephson. *Phys.Lett.*, 1, 251 (1962).
3. J.E.Zimmerman, *J.Appl.Phys.*, v. 42 (1971), 4483.
4. J.E.Zimmerman. *Cryogenics*, v. 12, No.1 (1972), 19.
5. Б.В.Васильев, В.Г.Гребенник, В.Г.Симонин. *Сообщение ОИЯИ Р13-6942*, Дубна, 1973.
6. R.Giffard, R.Webb, J.Wheatly, *J.Low Temp.Phys.*, v. 6, No. 5/6 (1972), 533.
7. J.Clarke. *Proc. IEEE*, v. 61, No. 1, Jan. 1973, 7.
8. J.E.Mercereau. *Rev.Phys.Appl.*, v. 5 (1970), 13.
9. M.Nisenoff. *Rev.Phys.Appl.*, v. 5 (1970), 21.
10. J.Goodkind, D.Stolfa. *Rev.Sci.Instr.*, v. 41, No. 6 (1970), 799.
11. H.Simmonds, W.Parker. *J.Appl.Phys.*, v. 42, No. 1 (1971), 38.
12. W.Webb. *IEEE Trans.Magn*, v. MAG-8, Mar. 1972, 51.
13. J.Zimmerman, P.Thiene, J.Harding. *J.Appl.Phys.*, v. 41 (1970), 1572.
14. J.Zimmerman, N.Frederik. *Appl.Phys.Lett.*, 19, 16 (1971).

15. R.Kamper, M.Simmonds. *Appl.Phys.Lett.*, v. 20, No. 8 (1972), 270.
16. H.A.Notaris, Run-Han Wang, J.E.Mercereau. *Proc. IEEE*, v. 61, No. 1, Jan. 1973, 79.

*Рукопись поступила в издательский отдел  
15 октября 1973 года.*