

6428

Экз. чит. зала

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P13 - 6428



В.М.Вахтель, Б.Ю.Семенов

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛА
В СИСТЕМАХ АМПЛИТУДНОЙ СПЕКТРОМЕТРИИ

1972

Фильтрация сигнала в системах амплитудной
спектрометрии

В работе рассмотрены и изложены следующие вопросы. 1. Получение максимального отношения сигнал/шум в системах общего вида. При рассмотрении этого вопроса использовано понятие функции памяти и эффективного коэффициента корреляции, что обеспечило простоту, компактность и наглядность выкладок. 2. Получение максимально возможного отношения сигнал/шум в системах амплитудной спектрометрии. 3. Оптимизация выбора параметров некоторых практически важных типов RC-фильтров. 4. Рациональный выбор постоянной времени цепочки связи между усилителем и преобразователем аналог-цифра.

В приложении рассмотрена функция памяти и ее связь с широко известным понятием импульсной характеристики системы, а также приведен в систематизированном виде материал по способам представления сигнала, шума и характеристик системы, необходимый при решении задач фильтрации.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1972

VahTel V.M., Semenov B.Yu.

P13 - 6428

Signal Filtration in the Amplitude
Spectrometry Systems

See the Summary on the reverse side of the title-page.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

P13 - 6428

В.М.Вахтель, Б.Ю.Семенов

**ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛА
В СИСТЕМАХ АМПЛИТУДНОЙ СПЕКТРОМЕТРИИ**

S u m m a r y

The following problems have been considered: 1) The production of the maximum signal-to-noise ratio in the standard systems. (When considering this problem the notion of the system weight (memory) function and that of the effective correlation coefficient were employed, which simplified the procedure). 2) The achievement of maximally possible signal-to-noise ratio in the system of amplitude spectrometry. 3) The optimization of the parameter selection of some practically important types of RC-filters. 4) A proper choice of the time constant of the connecting RC-circuit between the amplifier and the analog-to-digital convertor.

The Appendix covers the system memory function and its relation to a widely-known notion of the system impulse response. Besides the material is systematized concerning the ways of describing the signal, the noise and the system characteristics. This material is necessary in solving filtration problems.

Важнейшим параметром спектрометрической системы является отношение сигнал/шум, определяемое при входном сигнале в виде единичной ступенчатой функции как

$$\eta = |v_2(r_m)| / \sigma \quad (1)$$

или

$$\eta^2 = |v_2(r_m)|^2 / \sigma^2, \quad (2)$$

где $v_2(r_m)$ - амплитуда выходного сигнала (r_m - время достижения максимума), σ - среднеквадратичное значение амплитуд шумовых импульсов, η^2 - отношение пиковой мощности выходного сигнала к средней мощности выходного шума.

В амплитудной спектрометрии часто применяют не величину η , а ей обратную - $1/\eta$. Последняя численно равна среднеквадратичному эквивалентному шумовому заряду

$$1/\eta = q_{\ominus}, \quad (3)$$

если v_2 и σ измеряются в единицах заряда.

Соотношение (1), используя частотные представления, можно записать в виде (приложение 2 (П.2))

$$\eta = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} V_1(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega r_m} d\omega \right|}{\left(2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{11}(\omega) |H(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}}, \quad (4)$$

где $V_1(j\omega)$ – спектральная функция входного сигнала, $\Phi_{11}(\omega)$ – спектральная плотность мощности входного шума, $H(j\omega)$ – передаточная функция системы.

В общем случае отношение сигнал/шум, как это видно из (4), зависит от характеристик сигнала, шума и параметров системы. В целях увеличения η в систему вводят формирующие цепи – фильтры. Наиболее употребительные в спектрометрических системах фильтры рассмотрены в работах^{/1-5/}. Однако приводимые там сведения нельзя считать полными как в отношении характеристик фильтров, так и в отношении математического аппарата, необходимого для их расчёта. Кроме того, данные по фильтрам $CR - (RC)^2$ и $(CR)^2 - (RC)^2$ приводимые в работах^{/1-5/}, иногда не согласуются друг с другом.

Настоящая работа проведена с целью расширения и уточнения данных по таким широко применяемым в спектрометрии фильтрам, как $CR - (RC)^2$, $CR - (RC)^4$, $(CR)^2 - RC$ и $(CR)^2 - (RC)^2$. Определенное внимание уделено также общей задаче оптимальной фильтрации сигнала, математическому аппарату, необходимому для ее решения, и аппарату расчета RC – фильтров.

1. Максимальное отношение сигнал/шум в системе

Если на вход линейной стационарной системы с функцией памяти $m(t)/6/$ поступает сигнал $v_1(t)$ и белый шум со спектральной плотностью $\Phi_{11}(\omega) = N_0/2 = \text{const}$, то $v_2(t)$, $v_2(r_m)$ и σ^2 определяются выражениями (П.1, П.2):

$$v_2(t) = \int v_1(t') m(t' - t) dt' , \quad (5)$$

$$v_2(r_m) = \int v_1(t') m(t' - r_m) dt' , \quad (6)$$

$$\sigma^2 = (N_0/2) \int m^2(t) dt . \quad (7)$$

При $\int m^2(t) dt = \text{const}$ средняя мощность выходного шума оказывается зафиксированной, поэтому получение максимума η сводится к поиску форм функции памяти, обеспечивающей получение наибольшего значения $|v_2(r_m)|$. Эта задача может быть решена при использовании выражений

$$K_{\Theta} = \frac{|v_2(r_m)|^2}{[\int v_I^2(t) dt] [\int m^2(t) dt]}, \quad (8)$$

$$K_{\Theta} = \frac{|\int v_I(t') m(t' - r_m) dt'|^2}{[\int v_I^2(t) dt] [\int m^2(t) dt]}, \quad (9)$$

представляющих эффективный коэффициент корреляции между $v_I(t)$ и $m(t)$, значения которого, как известно^{/6/}, лежат на отрезке $-0 \leq K_{\Theta} \leq 1$. При заданном входном сигнале и $\int m^2(t) dt = \text{const}$ максимуму K_{Θ} , очевидно, соответствует максимум $|v_2(r_m)|^2$, равный, как это следует из (8),

$$|v_2(r_m)|^2 = [\int v_I^2(t) dt] [\int m^2(t) dt]. \quad (10)$$

Из (2), (7) и (10) видно, что при $K_{\Theta} = 1$ η^2 не зависит от величины интегрального квадрата функций памяти ($\int m^2(t) dt$), поэтому введенное выше ограничение на эту функцию не приводит к потере общности

Из (9) следует, что максимум K_{Θ} достигается при выполнении условия

$$m(t) = a v_I(t + r_m), \quad a = \text{const}, \quad (11)$$

т.е. при совпадении форм функции памяти и входного сигнала. Для реализуемой системы $m(t) = 0$ при $t > 0$ (П.1), поэтому условие (11) выполняется только при

$$r_m \geq r_c, \quad (12)$$

где r_c — длительность входного сигнала.

Систему, удовлетворяющую условию (11), называют оптимальной или согласованной с входным сигналом. Из (2), (6), (7) и (11) следует, что для оптимальной системы:

$$\eta = \sqrt{2E/N_0}, \quad (13)$$

где $E = \int v_I^2(t) dt$ - энергия входного сигнала (П.2).

Таким образом, среди всех линейных систем - согласованная позволяет получить максимальное отношение сигнал/шум, величина которого, как видно из (13), не зависит от параметров системы, а определяется только характеристиками входного сигнала и шума.

В частотном представлении условию (11) соответствует

$$M(j\omega) = aV_I(j\omega) \exp(j\omega\tau_m), \quad (14)$$

где $M(j\omega)$ - спектральная плотность функции памяти.

Учитывая связь функции памяти с импульсной характеристикой, передаточную функцию согласованной системы можно представить в виде (П.1, П.2)

$$H(j\omega) = aV_I^*(j\omega) \exp(-j\omega\tau_m). \quad (15)$$

Тогда спектр выходного сигнала можно записать как

$$V_2(j\omega) = |V_I(j\omega)|^2 \exp(-j\omega\tau_m), \quad (16)$$

а временную функцию как

$$v_2(t) = (a/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} |V_I(j\omega)|^2 e^{-j\omega\tau_m} e^{j\omega t} d\omega. \quad (17)$$

Наличие фазового множителя $\exp(-j\omega\tau_m)$ при гармонической составляющей выходного сигнала $(a/2\pi) |V_I(j\omega)|^2 \exp(-j\omega\tau_m) \exp(j\omega t) d\omega$ указывает на то, что все они имеют одну и ту же, равную нулю, фазу в момент $t = \tau_m$ и, следовательно, каждая из них дает максимальный вклад в пиковое значение выходного сигнала - $v_2(\tau_m)$.

Необходимость условия $\tau_m \geq \tau_c$ можно проиллюстрировать, если представить входной сигнал в виде последовательности линейных импульсов, каждому из которых соответствует набор гармоник. При $\tau_m < \tau_c$ в реализуемой системе в $v_2(\tau_m)$ даст вклад только часть гармонических составляющих и лишь при $\tau_m \geq \tau_c$ - все.

Если входной шум небелый, то задачу получения η_{max} можно привести к рассмотренной выше, пропустив предварительно шум и сигнал через убывающий фильтр с передаточной функцией, равной (17', стр.8 13)

$$H(j\omega) = b \exp(j\phi(\omega) / \sqrt{\Phi_{11}(\omega)}), \quad b = const. \quad (18)$$

Естественно, что в этом случае под величиной τ_c в соотношении (12) следует понимать длительность сигнала на выходе убывающего фильтра.

Максимальное значение η для этого случая, с учетом (4), (15), (18), (П.2), может быть записано в виде

$$\eta_{max} = \left[(1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} |V_1(j\omega)|^2 / \Phi_{11}(\omega) d\omega \right]^{1/2}, \quad (19)$$

частным случаем которого при $\Phi_{11}(\omega) = const$ является (13).

2. Максимально возможное отношение сигнал/шум в системах амплитудной спектрометрии

При решении задач фильтрации в амплитудной спектрометрии сигнал с детектора излучения в большинстве случаев с хорошей точностью может быть аппроксимирован ступенчатой функцией заряда (или напряжения)

$$V_1(j\omega) = 1/j\omega. \quad (20)$$

Односторонняя спектральная плотность шума на входе амплитудного спектрометра, как известно /8,9/, может быть представлена в виде

$$\Phi_{11}(\omega) = B + A_1/\omega + A_2/\omega^2, \quad (21)$$

где A_1, A_2, B для конкретной системы - константы.

Членом A_1/ω обычно пренебрегают, поэтому

$$\Phi_{11}(\omega) = B + A/\omega^2, \quad A \equiv A_2. \quad (22)$$

Из (1), (3), (4), (20), (22) следует, что для спектрометрической системы общего вида

$$q_{\ominus} = (1/|v_2(r_m)|) \sqrt{(1/2\pi) \int_0^{+\infty} (B + A/\omega^2) |H(j\omega)|^2 d\omega}, \quad (23)$$

а для оптимальной (19)

$$q_{\ominus} = \sqrt[4]{AB}. \quad (24)$$

Передаточную функцию оптимальной системы, учитывая (15), (18), (20), (22), можно представить в виде

$$H(p) = \frac{p \tau_0}{(1 + p\tau_0)(1 - p\tau_0)} e^{-p\tau_m}, \quad (25)$$

$$\tau_0 = \sqrt{B/A}. \quad (26)$$

τ_0 — постоянная времени оптимальной системы. Эта функция имеет полюс в правой полуплоскости комплексного переменного $p = \sigma + j\omega$. Система с такой передаточной функцией не может быть одновременно реализуемой и устойчивой. Практическая реализуемость подобной системы возможна лишь в том случае, если наложить ограничение на τ_m (устранение неустойчивости) и на время памяти системы (устранение нереализуемости). Эти ограничения приводят к тому, что совпадения форм функции памяти и входного сигнала обеспечиваются лишь на конечном интервале значений. Такого рода систему можно считать квазиоптимальной, так как отношение сигнал/шум на ее входе с какой угодно степенью точности, в зависимости от выбранного значения τ_m , можно приблизить к η_{\max} .

Заметим, что часто за единицы измерения среднеквадратичного эквивалентного шумового заряда, постоянных времени фильтров и временных параметров сигнала принимают соответствующие параметры оптимальной системы (24), (26):

$$Q_{\text{э}} = q_{\text{э}} / q_{\text{э опт}} = q_{\text{э}} / \sqrt[4]{AB}, \quad (27)$$

$$T_{\text{о опт}} = \tau / \tau_0 = \tau / \sqrt{B/A}, \quad (28)$$

так что $Q_{\text{э опт}} = 1$, $T_{\text{о опт}} = 1$.

3. Расчет и характеристики RC-фильтров некоторых

типов

Значения $q_{\text{э}}$, достаточно близкие к $q_{\text{э опт}}$ (24), позволяют получить RC-фильтры [1-5,8], отличающиеся к тому же простотой реализации. Ниже рассматриваются фильтры, состоящие из последовательности изолированных m -дифференцирующих и n -интегрирующих RC-цепей, обозначаемые в дальнейшем $m-n$.

Схема расчета фильтров изображена на рис.1. Расчет проводился для фильтров: 1-2, 1-4, 2-2 и 2-1, при этом полагалось, что в первых трех случаях $\tau_{\partial 1} = \tau_{\partial 2} \equiv \tau_1$; $\tau_{u1} = \dots = \tau_{un} = \tau_2$, а в последнем $\tau_{\partial 1} = \tau_{u1} = \tau_0 \equiv \tau_1$; $\tau_{\partial 2} \equiv \tau_2$ (τ_{∂} - постоянная времени дифференцирующей цепи, τ_u - интегрирующей).

На определенном этапе вводится относительное безразмерное время $x = t / \tau_1$. В результате этого функция v_2 оказывается зависимой только от двух переменных, что приводит к резкому упрощению выражений. Кроме этого, введение относительного времени устраняет явную зависимость выходного сигнала от τ_1 , что позволяет минимизировать отношение шум/сигнал по τ_1 путем минимизации шума. При этом отпадает необходимость в проведении сложной операции минимизации отношения σ / v_m по двум переменным.

Перед построением графиков все рассматриваемые величины, кроме v_m , нормируются согласно (27) и (28) и в единицах оптимальной системы ($q_{\ominus \text{ опт}}, r_0$) обозначаются следующим образом: Q_{\ominus} - эквивалентный шумовой заряд при $r_1 = r_{\mu} = T_{\mu} \sqrt{B/A}$, T_{μ} - минимизирующее Q_{\ominus} значение постоянной времени фильтра, T_m - время максимума выходного сигнала, $T_c(i/100)$ - длительность сигнала на уровне $(1/100) v_m$.

Ниже приведены соотношения, используемые при расчете фильтров по схеме рис. 1.

Фильтр 1 - 2. $H(p) = p r_1 / (1 + p r_1) (1 + p r_2)^2$

1) $v_2(x) = [e^{-x} - (1 + (1 - \nu) x / \nu) e^{-x/\nu}] / (1 - \nu)^2$.

2) Уравнение для нахождения $x = x_m = x_m(\nu)$:

$$e^{(\nu-1)x/\nu} = 1 + (1 - \nu) x / \nu^2$$

3) $\sigma^2 = [B / r_1 \nu + A (2 + \nu) r_1] / 8 (1 + \nu)^2$.

4) $r_m = r_0 / \sqrt{(2 + \nu) \nu}$.

Фильтр 1 - 4. $H(p) = p r_1 / (1 + p r_1) (1 + p r_2)^4$

1) $v_2(x) = \frac{1}{(1 - \nu)^4} e^{-x} + \frac{1}{6(\nu - 1)\nu^3} \left[x^3 + \frac{3\nu x^2}{1 - \nu} + \frac{6\nu^2 x}{(1 - \nu)^2} + \frac{6\nu^3}{(1 - \nu)^3} \right] e^{-x/\nu}$.

2) Уравнение для нахождения $x = x_m = x_m(\nu)$:

$$\frac{\nu}{(\nu - 1)^3} e^{-x} = \frac{1}{2\nu^2} \left[(x^2 + \frac{2\nu x}{1 - \nu} + \frac{2\nu^2}{(1 - \nu)^2}) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3\nu} \left(x^3 + \frac{3\nu x^2}{1 - \nu} + \frac{6\nu^2 x}{(1 - \nu)^2} + \frac{6\nu^3}{(1 - \nu)^3} \right) \right] e^{-x/\nu}$$

$$3) \sigma^2 = \frac{B}{64r_1} \frac{5(1-\nu^2)^2(1+\nu)+2\nu^2(1+\nu)(7-3\nu^2)-16\nu}{(1-\nu^2)^3(1+\nu)\nu}$$

$$- \frac{Ar_1}{64} \frac{\nu(1+\nu)[(1-\nu)^2(11-5\nu^2)+8]-16}{(1-\nu^2)^3(1+\nu)}$$

$$4) r_\mu = r_0 \sqrt{\frac{5 - 11\nu + 4\nu^2 + 4\nu^3 - \nu^4 - \nu^5}{16\nu - 19\nu^2 - 19\nu^3 + 16\nu^4 + 16\nu^5 - 5\nu^6 - 5\nu^7}}$$

Фильтр 2 - 1. Рассматривается влияние на величину Q_\ominus и характеристики сигнала второй дифференцирующей CR-цепочки ($r_{\partial 2} = r_2$) в случае $r_{\partial 1} = r_{u1} = r_0 = r_1$ ($Q_\ominus(r_1) = Q_{\ominus min} = 1,355$).

$$H(p) = p^2 r_1 r_2 / (1 + p r_1)^2 (1 + p r_2).$$

$$1) v_2(x) = (\nu / (\nu - 1)^2) [(1 + (\nu - 1)x) e^{-x} - e^{-x/\nu}].$$

2) Уравнение для нахождения $x = x_m = x_m(\nu)$:

$$(\nu - 1)x / \nu - \ln \nu = \ln(2 - \nu + (\nu - 1)x).$$

$$3) \sigma^2 = \nu / 4 (1 + \nu).$$

Изображенные на рис. 2,3 графики позволяют решать вопрос выбора оптимальных параметров фильтра, устанавливать допустимые пределы их изменения и т.д. Кривая $v_m = v_m(\nu)$, в частности, дает возможность рассматривать вопрос о допустимых пределах увеличения коэффициента передачи фильтра, т. е. вопрос об упрощении каскадов магистрального усилителя. Следует отметить, что результаты для фильтра 1-2 совпадают с опубликованными в работе /2/, а для фильтра 2-2 - в работе /1/.

Часто с целью упрощения системы связь между усилителем и преобразователем аналог-цифра выполняется в виде простой дифференцирующей RC-цепи. Графики параметров фильтра 2-1 построены применительно к этому, весьма важному для практики случаю и могут быть использованы для оптимизации выбора постоянной времени дифференцирующей цепочки связи. Так, например, в спектрометрическом тракте со стабилизацией положения измерительной характеристики рационально иметь значения $\tau_{d2} \geq 250 \tau_0$, соответствующие при данной структуре фильтра минимальной длительности выходного сигнала и минимальному значению эквивалентного шумового заряда.

Приложение 1

Импульсная характеристика и функция памяти системы

Импульсный сигнал с какой угодно степенью точности можно представить в виде суммы смежных прямоугольных импульсов C_i длительностью $\Delta t'_i$ и амплитудой $v_1(t'_i)$ (рис. 5а):

$$v_1(t') \approx \sum C_i,$$

где $v_1(t'_i)$ - значение сигнала $v_1(t')$ в момент времени t'_i .

Если $v_1(t')$ поступает на вход линейной системы, то выходной сигнал $v_2(t)$ можно представить в виде суммы реакций на действие совокупности импульсов C_i . За меру действия каждого из C_i естественно принять его площадь - $v_1(t'_i) \Delta t'_i$, тогда реакцию системы на единицу площади этого импульса можно представить как

$$h(t-t'_i) = [v_2(t)]_i / v_1(t'_i) \Delta t'_i,$$

а выходной сигнал как

$$v_2(t) \approx \sum [v_2(t)]_i = \sum v_1(t'_i) \Delta t'_i h(t - t'_i).$$

В пределе при $\Delta t'_i \rightarrow 0$ $\lim C_i = v_1(t') \delta(t'_i - t) dt'$, т.е. предел C_i есть линейный импульс $L(t')$ (рис. 5б), существующий (отличный от нуля) лишь в одной точке временной оси. При этом функция $h(t - t')$ удовлетворяет определению импульсной характеристики, т.е. приобретает смысл реакции системы на импульс в виде дельта-функции, отнесенной к его воздействию (площади). Выходной сигнал представляется в этом случае выражением, называемым интегралом суперпозиции (рис. 5в) ^{16/}: $v_2(t) = \int h(t - t') v_1(t') dt'$.

При интегрировании время-выходного сигнала t -параметр, а время-входного t' -время интегрирования, в функции же $h(t - t')$, наоборот, t' -параметр, а t -текущее время. Поэтому импульсная характеристика определяет вклад составляющей входного сигнала $L(t')$ в совокупность значений выходного. Для реализуемой системы - только в ту совокупность значений, которые располагаются на интервале $t > t'$, ибо реакция не может возникнуть раньше входного воздействия ($h(t - t') = 0$ при $t - t' < 0$). Заметим, что для устойчивой системы $h(t - t') \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Если считать в $h(t - t')$ t -параметром, а t' -текущим временем, то эта функция будет определять вклад составляющих входного сигнала $L(t')$, расположенных на интервале от $-\infty$ до t , в мгновенное значение выходного сигнала в момент времени t (рис. 4г,д). В этом случае $h(t - t')$ участвует в операции получения выходного сигнала как функция памяти системы. Если хотят подчеркнуть, что $h(t - t')$ следует рассматривать как функцию памяти, то вводят новое обозначение - m , изменяя при этом обычно знак у аргумента $m(-t + t') = h(t - t')$, последнее позволяет представить выходной сигнал как функцию взаимной корреляции v_1 и m (рис. 5д).

В реализуемой системе в момент наблюдения выходного сигнала функция памяти станет равной нулю, т.е. $m(t' - t) = 0$ при $t' - t > 0$. Иными словами, реализуемая система "помнит" прошлое, но не "помнит" будущего.

Можно заметить, что функция памяти совпадает по форме с зеркальным отображением импульсной характеристики (рис. 5 в, г).

Приложение 2

Характеристики шума, сигналов и систем

Характеристики шума, сигналов и систем изображены на диаграмме (рис. 6).

1. Случайный гауссовский процесс (шум) в случае его эргодичности может быть охарактеризован:

1) $n_a(t)$ - реализацией (выборкой), т.е. временной функцией шума за достаточно большое время рассмотрения. Причем $n_a(t)$ может представлять: $v_{ш}(t)$ - шумовое напряжение, $J_{ш}(t)$ - шумовой ток, $Q_{ш}(t)$ - шумовой заряд и т.п.

2) $\phi_{nn}(\tau) = (1/T) \int n(t)n(t-\tau) dt$ - автокорреляционной функцией, определяющей характер поведения $n(t)$, т.е. степень связи между мгновенными значениями шумового процесса. Значение $\phi_{nn}(0)$ дает средний квадрат (дисперсию) шума - $\phi_{nn}(0) = \overline{n^2(t)} = \sigma^2$.

Заметим, что если $v_{ш}$, $J_{ш}$ или $Q_{ш}$ нормированы относительно нагрузки, т.е. если $v_{ш} = v'_{ш} / \sqrt{R}$, $J_{ш} = J'_{ш} \sqrt{R}$, $Q_{ш} = Q'_{ш} / C\sqrt{R}$, то $\phi_{nn}(\tau)$ будет содержать информацию об энергетических характеристиках источника шума, например, значение $\phi_{nn}(0)$ в этом случае равно средней мощности источника шума. Очевидно, что подобный способ представления $n(t)$ имеет ряд преимуществ и поэтому широко используется.

3) $\Phi_{nn}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{nn}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$ - преобразованием Фурье автокорреляционной функции. $\Phi_{nn}(\omega)$ - несет информацию о плотности распределения $\overline{n^2(t)}$ ($v_{ш}^2$, $J_{ш}^2$ или $Q_{ш}^2$) по спектру частот. Интеграл $(1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{nn}(\omega) d\omega = \overline{n^2(t)}$ так же, как и $\phi_{nn}(0)$, представляет дисперсию шума.

Если $n(t)$ нормирована относительно нагрузки, то $\Phi_{nn}(\omega)$ приобретает смысл спектральной плотности мощности шума, показывающей распределение мощности источника шума по гармоническим составляющим $\exp(j\omega t)$, ибо $\phi_{nn}(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{nn}(\omega) \exp(j\omega t) d\omega$.

Заметим, что шум со спектральной плотностью $\Phi_{nn}(\omega) = \text{const} = N_0/2$ называется белым. Так как $\Phi_{nn}(\omega)$ — действительная четная функция $\Phi_{nn}(\omega) = \Phi_{nn}(-\omega)$, то при переходе от двухстороннего к одностороннему преобразованию спектральная плотность должна быть удвоена, т.е. $\Phi_{nn}(f) = 2\Phi_{nn}(\omega) = N_0$ при $f \geq 0$.

II. Сигнал можно охарактеризовать:

1. $v(t)$ — временной функцией, или плотностью распределения во времени, $v(t') \delta(t-t') dt'$, которую можно рассматривать как импульс в виде дельта-функции, умноженной на нормирующий множитель $v(t') dt'$. Очевидно, что $v(t) = \int v(t') \delta(t-t') dt'$.

2. $V(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \exp(-j\omega t) dt$ — преобразованием Фурье временной функции сигнала, имеющим смысл плотности распределения амплитуд его гармонических составляющих по частоте. Обратное преобразование Фурье определяется выражением $v(t) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$, следовательно, $(1/2\pi) V(j\omega) d\omega \exp(j\omega t)$ — элементарная гармоническая составляющая сигнала с частотой ω , $(1/2\pi) V(j\omega) d\omega$ — амплитуда этой составляющей, $V(j\omega)$ — плотность амплитуд на интервале частот ω , $\omega + d\omega$.

3. $\psi(t) = \int v(t) v^*(t-\tau) dt$ — автокорреляционной функцией и ее фурье-преобразованием $\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) \exp(-j\omega \tau) d\tau$, определяющими характер и степень связи между мгновенными значениями $v(t)$ и несущими информацию о распределении энергии сигнала по временным и частотным составляющим. Если $v(t)$ — нормированная относительно нагрузки функция (П2-1), то значения $\psi(0)$ и $(1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega$ равны полной энергии сигнала $E = \psi(0) = \int |v(t)|^2 dt = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\omega) d\omega$.

Заметим, что $\Psi(\omega) = |V(j\omega)|^2$, поэтому $\Psi(\omega)$ может быть получена двумя путями: $v(t) \rightarrow \psi(\tau) \rightarrow \Psi(\omega)$ или $v(t) \rightarrow V(j\omega) \rightarrow |V(j\omega)|^2 = \Psi(\omega)$.

III. Систему можно охарактеризовать:

1. $h(t)$ - импульсная характеристика или функция памяти.
2. $H(j\omega) = V_2(j\omega) / V_1(j\omega)$ - передаточной функцией, имеющей

смысл отношения комплексных амплитуд сигналов при гармоническом сигнале на входе.

$H(j\omega)$ является фурье-преобразованием импульсной характеристики.

3. $\psi_{hh}(r) = \int h(t) h^*(t-r) dt$ - автокорреляционной функцией импульсной характеристики и ее фурье-преобразованием

$$\Psi_{hh}(\omega) = \int \psi_{hh}(r) \exp(-j\omega r) dr .$$

Заметим, что определение импульсной характеристики (П.1) позволяет рассматривать ее просто как временную функцию сигнала, поэтому к ней и к ее производным $H(j\omega)$, $\psi_{hh}(r)$, $\Psi_{hh}(\omega)$ применимо все сказанное в (П.2 - П).

Связь между входными и выходными характеристиками

(рис. 6)

Связь между входными и выходными характеристиками во временной области может быть установлена путем применения операции свертки функций, например, $v_2 = v_1 \otimes h$, $\psi_{22} = \psi_{11} \otimes \psi_{hh}$, $\Phi_{22} = \Phi_{11} \otimes \Psi_{hh}$, или применения операции вычисления взаимной корреляционной функции, например, $v_2 = v_1 [K] m$.

В частотной области связь между входными и выходными характеристиками может быть установлена применением операции умножения или деления, например, $V_2 = V_1 H$, $\Psi_{22} = \Psi_{11} \Psi_{hh}$, $\Phi_{22} = \Phi_{11} \Psi_{hh} = \Phi_{11} |H|^2$, $V_1 = V_2 / H$.

Литература

1. А.А. Воробьев, В.А. Королев, Г.Е. Солякин. ПТЭ, 2, 95 (1959).
2. М. Tsukuda. Nucl. Instr. and Meth., 14, 241 (1961).
3. Б.В. Фефилов. Препринт ОИЯИ, 13-3101, Дубна, 1967.
4. А.М. Зубарева, Г.Г. Субботина, В.Г. Субботин. Препринт ОИЯИ, 13-4458, Дубна, 1969.

5. Ю.К. Акимов, А.И. Калинин, В.Ф. Кушнирук, Х. Юнгклауссен. Полупроводниковые детекторы ядерных частиц и их применение. Атомиздат, Москва, 1967.
6. С. Мэзон, Г. Циммерман. Электронные цепи, сигналы и системы. Иностранная литература, Москва, 1963.
7. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. Советское радио, Москва, 1971.
8. Л.С. Горн, В.В. Матвеев, Б.И. Хазанов, А.В. Шифрин. Элементы схем ядерного приборостроения. Атомиздат, Москва, 1970.
9. V.Radeka. Int.Symp.on Nucl.Electr., Versailles, 1968, 1, 46.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1972 года.

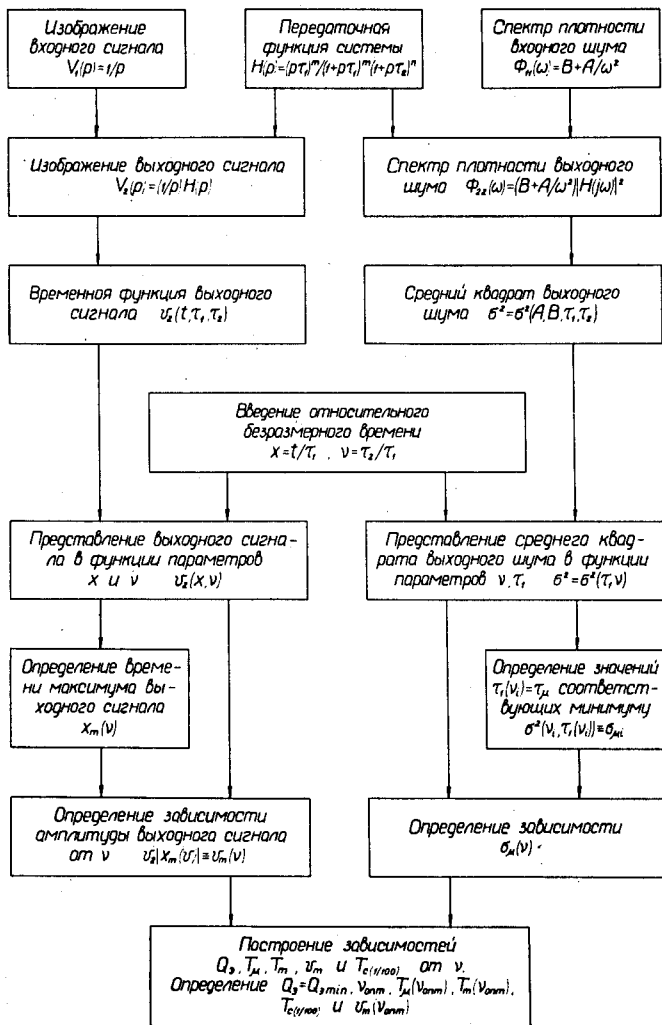


Рис. 1. Схема расчета фильтра.

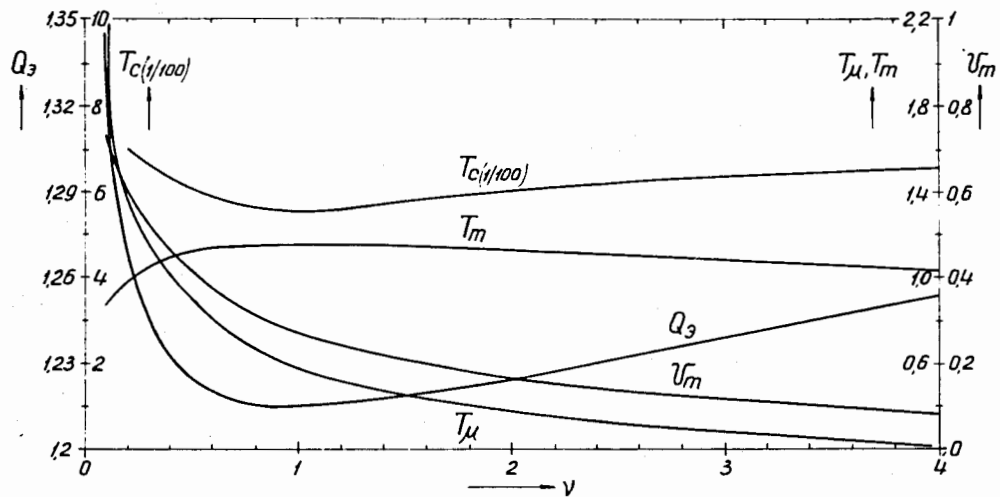


Рис. 2. Фильтр 1-2. Q_3 , T_μ , T_m , $T_c(1/100)$, v_m в функции отношения постоянных времени фильтра $\nu = \tau_2 / \tau_1 = \tau_u / \tau_\partial$. Параметры фильтра и сигнала при $Q_3 = Q_{3\text{min}} = 1,215$: $T_\mu = 0,59$, $\nu = 0,95$, $T_m = 1,15$, $T_c(1/100) = 5,63$, $v_m = 0,28$.

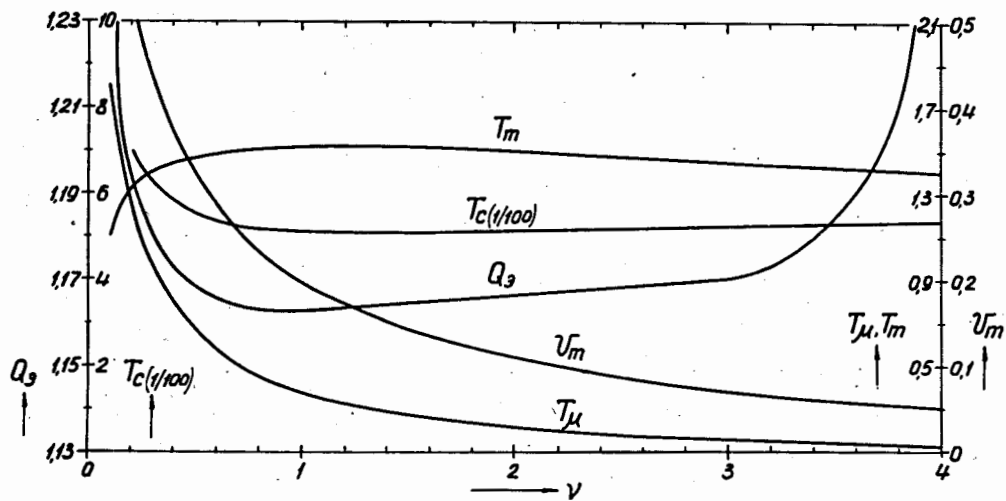


Рис. 3. Фильтр 1-4. Q_3 , T_μ , T_m , $T_c(1/100)$, U_m в функции отношения постоянных времени фильтра $\nu = r_2 / r_1 = r_u / r_d$. Параметры фильтра и сигнала при $Q_3 = Q_{3 \min} = 1,164$; $T_\mu = 0,38$, $\nu = 1$, $T_m = 1,51$, $T_c(1/100) = 5,1$, $U_m = 0,195$.

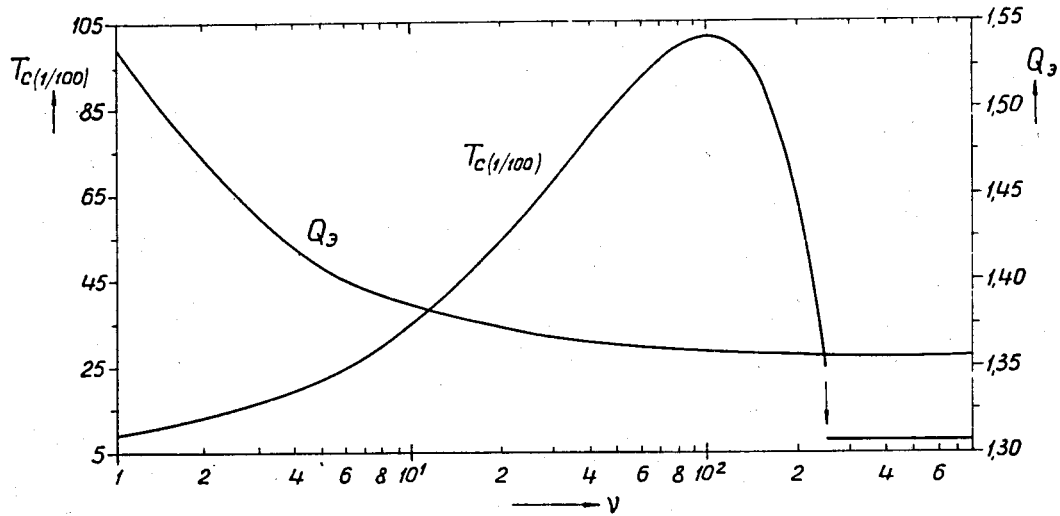


Рис. 4. Фильтр 2-1. Q_3 и $T_c(1/100)$ в функции отношения постоянных временей фильтра $\nu = \tau_2 / \tau_1$.

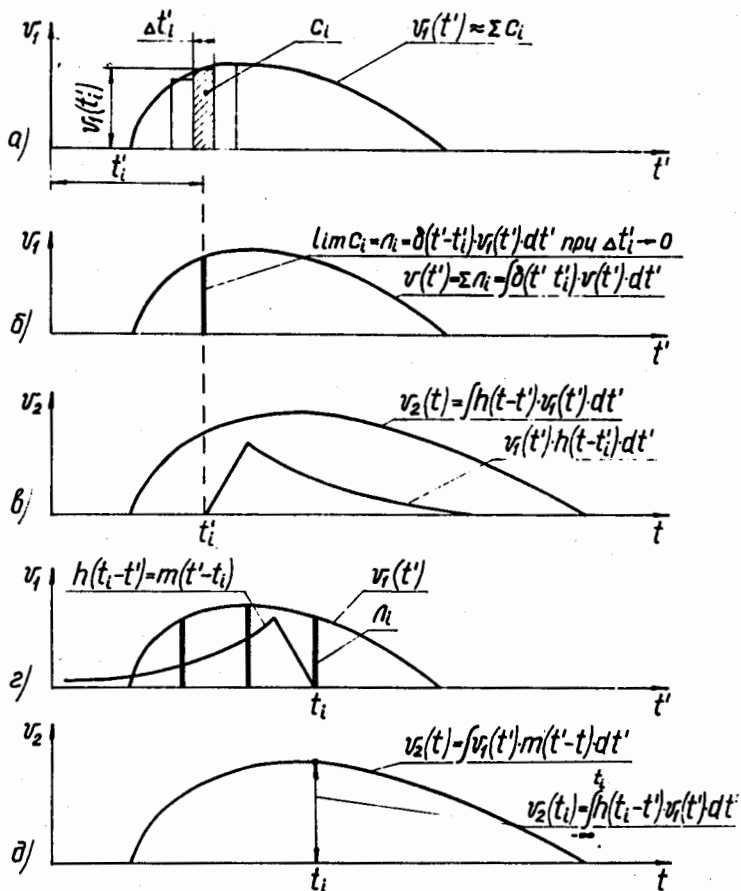


Рис. 5. Различные способы представления входного и выходного сигналов
 а) - приближенное представление входного сигнала в виде суммы прямоугольных смежных импульсов; б) - представление входного сигнала в виде бесконечной суммы линейных импульсов; в) - реакция системы на линейный импульс (импульсная характеристика системы), представление выходного сигнала в виде интеграла суперпозиции; г) - функция $h(t_1 - t')$ как функция памяти системы; д) - выходной сигнал как функция взаимной корреляции между v_1 и m .

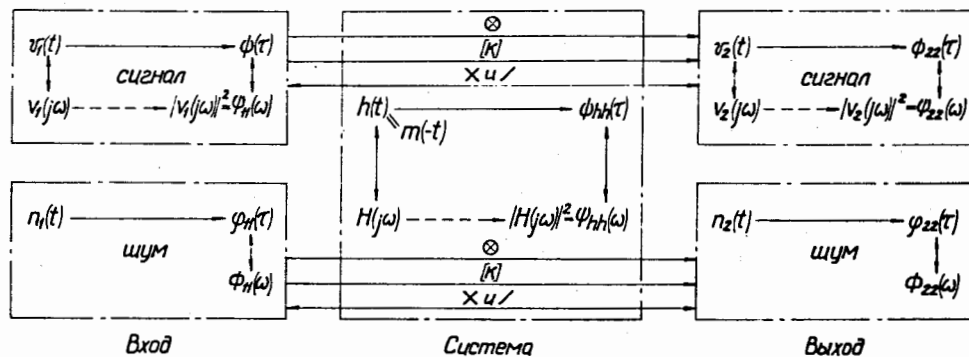


Рис. 6. Характеристики сигнала, шума, системы и связи между ними.

↓ - прямое и обратное преобразование Фурье $V(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt$

$$v(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} V(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

→ - вычисление автокорреляционной функции $\psi(\tau) = \int v(t) v^*(t-\tau) dt$.

→ - вычисление квадрата модуля спектра $\Psi(\omega) = |V(j\omega)|^2$.

⊗ - умножение алгебры свертки свертка $v_2(t) = \int v_1(t') h(t-t') dt' = v_1 * h$.

⊗ - вычисление функции взаимной корреляции $v_2(t) = \int v_1(t') m(t'-t) dt'$.

⊗ - умножение и деление в частотной области

$$V_2(j\omega) = V_1(j\omega) \times H(j\omega), \quad V_1(j\omega) = V_2(j\omega) / H(j\omega).$$