СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р13 - 6223

С.Р.Аврамов, С.И.Орманджиев

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

РАСЧЕТНОЕ РАЗРЕШАЮЩЕЕ ВРЕМЯ И ВРЕМЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОСЛЕ АМПЛИТУДНОЙ ПЕРЕГРУЗКИ ФОРМИРОВАТЕЛЕЙ С RC ЦЕПЯМИ

1972

P13 - 6223

С.Р.Аврамов, С.И.Орманджиев

РАСЧЕТНОЕ РАЗРЕШАЮЩЕЕ ВРЕМЯ И ВРЕМЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОСЛЕ АМПЛИТУДНОЙ ПЕРЕГРУЗКИ ФОРМИРОВАТЕЛЕЙ С RC ЦЕПЯМИ

Загрузочные характеристики спектрометрических усилителей определяются параметром "разрешающее время"/1/, который не дает точного представления о возможностях использованного типа формирования. Иногда используют параметр "эффективное разрешающее время"/2/, легко применимый для экспериментального определения загрузочной способности. В/3/ сделан расчет эффективного разрешающего времени для однократного дифференцирования. Время восстановления усилителя после амплитудной перегрузки определялось экспериментально в/3,4/, где дана и формулировка условий эксперимента.

В указанной литературе нет общих математических выражений как для расчета временного интервала между импульсами при заданной погрешности от наложения, так и для теоретического предела времени восстановления формирующего устройства после амплитудной перегрузки и числовых данных к ним.

В настоящей работе дано определение максимального интервала между импульсами в *RC* формирователях с одно-, дву- и трехкратным дифференцированием, при заданной погрешности определения амплитуды импульсов, а также определение времени восстановления после амплитудной перегрузки. Введен термин " расчетное разрешающее время" для нахождения временного интервала между импульсами. Получены аналитические формулы для указанных двух случаев и числовые значения при разном количестве интегрирующих звеньев. В формулах отражены два возможных случая работы: когда константы времени формирования оптимальны для каждой кратности дифференцирования и когда константы времени при двукратном и трехкратном дифференцировании равны константам времени при однократном дифференцировании. Определено отношение шум/сигнал при неоптимальном формировании для случаев дву- и трехкратного дифференцирования.

Полученные результаты сравниваются с результатами, получающимися при вычислении по классическому определению разрешающего времени.

Расчетное разрешающее время t_p (ψ)

Под расчетным разрешающим временем t_p (ψ) будем понимать временной интервал между первыми максимумами двух следующих один за другим импульсами с одинаковыми амплитудами, причем амплитуда второго импульса изменяется на долю ψ своей номинальной величины из-за наложения. Величина ψ должна задаваться погрешностями амплитудных измерений. Для сцинтилляционных приборов примем $\psi = 10^{-2}$, для приборов с полупроводниковыми детекторами $-\psi = 10^{-3}$, однако тенденция развития этих приборов даст в недалеком будущем $\psi = 10^{-4}$. Для ясности при написании разрешающего времени в скобках будем давать численную величину погрешности.

Определение расчетного разрешающего времени сводится к решению относительно t уравнения

$$\psi \; U_{M1} = U \; (t, \tau, n, m) \; , \qquad (1)$$

где ψ – относительная погрешность первого максимума второго импульса, U_{M1} – величина первых максимумов импульсов, τ – константы времени единичных RC цепей (все константы времени приняты одинаковыми), n – количество интегрирующих звеньев, m – количество дифференцирующих звеньев. После определения t вычтем из полученной величины время достижения первого максимума.

Все формулы выведены при условии, что на вход формирующей системы подается единичное напряжение. Для случая RC формирования получаются трансцендентные уравнения, которые могут быть решены или приближенным аналитическим представлением зависимости $t\,(\tau, n, m, \psi)$ или с помощью вычислительных машин.

При приближенном аналитическом представлении можно использовать то, что при $\psi \leq 10^{-2}$ падающий участок функции после последнего максимума может быть представлен достаточно точно (с ошибкой $<10\%$) экспоненциальной функцией:

$$U(t) = e^{-a\frac{t}{\tau}+b}. \qquad (2)$$

Тогда определение расчетного разрешающего времени сводится к определению времени достижения первого и последнего максимумов t_{M1} и t_{Mm} и временного интервала t_ψ между последним максимумом и точкой ψU_{M1}:

$$t_p(\psi) = t_{Mm} - t_{M1} + t_\psi . \qquad (3)$$

Из работы /5/ возьмем выражения для t_{M1} и t_{Mm}. Выражение для t_ψ при $m = 1$ и разных n, τ определено в приложении (1). Полученная окончательная формула имеет вид:

$$t_p(\psi) = \tau \frac{x_0 + b - \ln \psi \mathcal{L}}{a} . \qquad (4)$$

Числовые величины коэффициентов a и b и величина разрешающего времени для оптимального τ даны в таблице 1.

Аналогичным образом получены выражения для $t_p(\psi)$ при $m = 2$. Формула имеет вид (см. приложение 2):

$$t_p(\psi) = \tau \left(2\sqrt{n+1} + \frac{x_0 + b - \ln \psi \mathcal{L}}{a}\right). \qquad (5)$$

Коэффициенты a, b, x_0, $\mathcal{L}$, $t_p(\psi)$ и $t_b(\psi)$ даны в таблице 2. τ_{m1} соответствует оптимальной величине при $m = 1$, τ_{m2} соответствует оптимальной величине при $m = 2$.

При $m = 3$ получена (см. приложение 3) формула:

$$t_p(\psi) = \tau \left\{ 2\sqrt{n+2} \left[\cos\frac{\phi_0}{3} + \sin\left(\frac{\phi_0}{3} + 30^\circ\right)\right] + \frac{x_0 + b - \ln \psi \mathcal{L}}{a} \right\}. \qquad (6)$$

Величины коэффициентов a, b, x_0, $\mathcal{L}$, а также $t_p(\psi)$ для $\tau = \tau_{m1}$ и для $\tau = \tau_{m2}$ даны в таблице 3.

Таблица I

n	a	b	x_0	$\mathcal{L}$	$t_p(\psi)/\sqrt{A/B}$			$t_b(\psi)/\tau$		$\frac{N}{S}$
					10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-2}	10^{-3}	
I	0,92	0,56	I	I	6,6	9,2	II,8	II,8	I4,2	I,36
2	0,85	I,43	2	4	4,5	6,I	7,7	I3,3	I5,9	I,22
3	0,80	2,55	3	27	3,9	5,2	6,5	I4,5	I7,2	I,I8
4	0,75	3,90	4	256	3,6	4,8	5,9	I5,6	I8,4	I,I6
5	0,70	5,44	5	$3{,}I2.I0^3$	3,4	4,5	5,5	I6,5	I9,4	I,I5
6	0,66	7,I2	6	$4{,}66.I0^3$	3,2	4,3	5,2	I7,4	20,4	I,I5

Таблица 2

$m = 2$

n	a	b	x_0	$\mathcal{L}$	τ_{m1}		τ_{m2}		τ		τ_{m1}
					$t_p(\psi)/\sqrt{A/B}$		$t_p(\psi)/\sqrt{A/B}$		$t_b(\psi)/\tau$		$\frac{N}{S}$
					10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-3}	
I	0,88	0,74	0,59	0,83	9,I	I2,0	I5,8	20,8	I4,7	I7,3	I,53
2	0,84	I,44	I,27	2,79	6,2	7,7	I0,8	I3,6	I6,6	I8,8	I,45
3	0,79	2,74	2,00	I6	5,4	6,8	9,3	II,8	I8,3	2I,I	I,46
4	0,76	4,24	2,76	I30	5,0	6,2	8,7	I0,8	I9,5	22,5	I,47
5	0,73	5,89	3,55	$I{,}38.I0^3$	4,8	5,9	8,3	I0,2	20,9	23,9	I,49
6	0,70	I0,03	4,35	$I{,}8.I0^4$	4,6	5,7	8,0	9,8	22,0	25,0	I,5I

Таблица 3

$m = 3$

n	a	b	x_0	$\mathfrak{L}$	τ_{m1}: $t_p(\psi)/\sqrt{A/B}$, 10^{-2}	τ_{m1}: $t_p(\psi)/\sqrt{A/B}$, 10^{-3}	τ_{m3}: $t_p(\psi)/\sqrt{A/B}$, 10^{-2}	τ_{m3}: $t_p(\psi)/\sqrt{A/B}$, 10^{-3}	τ: $t_b(\psi)/\tau$, 10^{-2}	τ: $t_b(\psi)/\tau$, 10^{-3}	τ_{m1}: $\frac{N}{S}$
I	0,86	0,38	0,42	I,5I	I0,8	I4,0	2,4I	3I,3	I7,0	I9,8	I,79
2	0,83	I,62	0,94	4,72	7,4	9,3	I6,5	20,9	I9,2	22,I	I,8I
3	0,79	3,07	I,52	24,88	6,4	8,0	I4,4	I7,8	2I,I	24,I	I,93
4	0,77	4,70	2,I4	I87	6,0	7,3	I3,4	I6,4	22,7	25,8	2,02
5	0,74	6,48	2,8I	$I,86.I0^3$	5,7	6,9	I2,7	I5,5	24,I	27,2	2,I0
6	0,72	8,4I	3,49	$2,22.I0^4$	5,5	6,6	I2,3	I4,8	25,4	28,7	2,I4

Определение разрешения при неоптимальной константе времени в случаях $m = 2$ $m = 3$ вызвано существованием возможности повторного дифференцирования сигнала усилителя для целей предварительного отбора поступающих импульсов/5/. Определено и соотношение шум/сигнал при этих константах времени. В таблице 2 и 3 дано соотношение шум/сигнал, а в приложении 4 – относительное ухудшение разрешения в зависимости от n.

Расчетное время восстановления после перегрузки $t_b(\psi)$

Под расчетным временем восстановления после перегрузки будем понимать временной интервал между первыми максимумами двух следующих друг за другом импульсов, первый из которых имеет амплитуду в N раз большую второго, причем амплитуда второго импульса изменяется вследствие наложения на долю ψ своей номинальной величины. В/3/ принято $N = 100$ и $\psi = 10^{-2}$. При сегодняшних требованиях к спектрометрическим приборам более подходящей является $\psi = 10^{-3}$. Время восстановления определяется по тем же формулам 3,4,5 и только под знаком логарифма (см. приложение 1) нужно поставить величину ψ / N:

$$t_b(\psi) = t_{Mm} - t_{M1} + \frac{x_0 + b - \ell n \frac{\psi}{N} \mathfrak{L}}{a} . \tag{7}$$

При рассмотрении принимается, что в идеальном формирователе перегрузка наступает после прохождения импульса через все формирующие звенья и проявляется как обрезание перегружающего импульса выше максимума второго импульса без затягивания спада импульса. В таблицах 1,2,3 показаны численные результаты расчетов для $\psi = 10^{-2}$ и $\psi = 10^{-3}$.

Численное определение $t_p(\psi)$ и $t_b(\psi)$

Значения $t_p(\psi)$ и $t_b(\psi)$ можно вычислить с произвольной, наперед заданной точностью как решения уравнений вида $z = \phi(z)$, корни которых можно определить с помощью итерационного процесса:

$$z_0 / z_{k+1} = \phi(z_k) , \tag{8}$$

который сходится к корню $z_{1E}\ (a, b)$, если

$$|\phi'(z)| \leq q < 1 \quad \text{для} \quad z_E\ /a, b/ .$$

В приложении 5 показано, что основные зависимости приводятся к виду (8) с правой частью, удовлетворяющей сходимости:

$$z = \frac{1}{x_0} \ln (z^n |n|) + \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{\psi} + 1 , \tag{9}$$

где x_0 – абсцисса первого максимума

$z = (t/r)/x_0$,

W – алгебраическое выражение, зависящее от q_1, z, m и n, ψ – искомое значение отношения $U(t)/U_{M1}$.

Вычисленные этим способом значения приводятся в таблицах 1, 2 и 3. Вычисления производились по программе **CØPSI**, реализованной на алгоритмическом языке **FORTRAN-63** для ЭВМ **CDC-1604A**. В программе **CØPSI** ошибки определения величин $t_p\ (\psi)$ и $t_b(\psi)$ меньше одного процента. Ошибка определялась в процессе вычисления в соответствии с отношением:

$$|z_{k+1} - z_k| \leq (1-q)\epsilon/q ,$$

где ϵ – допустимая абсолютная ошибка.

В ы в о д ы

Из таблиц 1,2,3 и графиков на рис. 1 а,б,в видно, что расчетное разрешающее время дает большую информацию, чем разрешающее время, приводимое в работе /1/. Преимуществом является и то, что при этом определении можно сравнивать экспериментально полученные результаты с теоретическими и, таким образом, ввести объективную оценку качества данного конкретного усилителя. Это относится и к определению времени восстановления после амплитудной перегрузки усилителя. Из таблиц видно, что времена восстановления после амплитудных перегрузок при m = 1,2 и 3 мало отличаются. Существенное ухудшение расчетного разрешающего времени и времени восстановления после перегрузки получается при работе с оптимальными константами формирования в случаях m = 2 и m = 3. При-

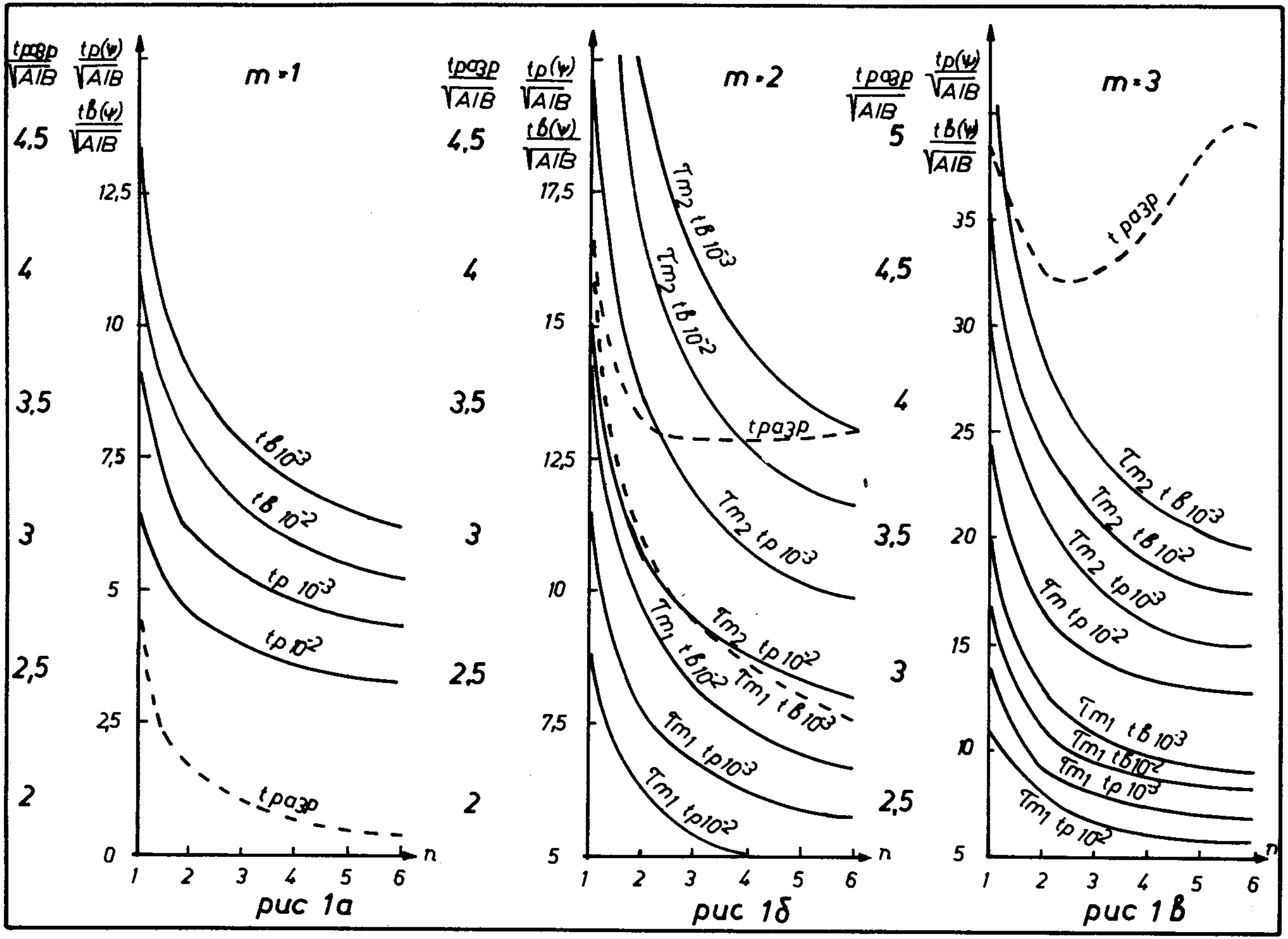

рис 1а

рис 1б

рис 1в

веденные в таблицах 1,2,3 соотношения шум/сигнал при неоптимальном формировании показывают ухудшение этого соотношения на 7% для $m = 2$ и на 14% – для $m = 3$.

Полученные формулы и таблицы, как и программа для машинного счета, могут быть использованы и при решении других аналогичных задач.

Приложение 1

Напряжение на выходе формирующего RC устройства с одинаковыми константами времени при подаче единичного скачка напряжения на вход, время достижения максимума, максимальное напряжение и оптимальная константа формирования для случая $m = 1$ имеют вид/5/:

$$U(t) = \frac{1}{n!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^n e^{-\frac{t}{\tau}}\;; \qquad \frac{t_M}{\tau} = n = x_0\,,$$

$$U_M = \frac{n^n}{n!\;e^n} + \frac{\mathfrak{L}}{n!\;e^{x_0}}\;; \qquad \tau_{opt.} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}\sqrt{\frac{A}{B}}\,.$$

Смещаем начало координатной системы в точке x_0. Приближенно представим падающий участок после максимума экспонентой и приравняем функцию ψU_M. Искомое нами решение получим, решая относительно t уравнение

$$\psi\,\frac{\mathfrak{L}}{n!\,e^{x_0}} = \frac{1}{n!}\,e^{-a\frac{t}{\tau}+b}$$

Прологарифмируем выражение:

$$t_p(\psi) = \tau\,\frac{b + x_0 - \ln\psi\,\mathfrak{L}}{a}\,.$$

Для определения коэффициентов приравниваем функции:

$$\left(\frac{t}{\tau} + x_0\right)^n e^{-\left(\frac{t}{\tau}+x_0\right)} = e^{-a\frac{t}{\tau}+b}\,.$$

Выбираем две точки совпадения обеих функций в области возможных решений $\frac{t}{\tau}$: $\frac{t}{\tau} = x_1$ и $\frac{t}{\tau} = x_2$ и после решения системы уравнений для коэффициентов получаем:

$$a = 1 - \frac{n}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2 + n}{x_1 + n},$$

$$b = n \left[-1 + \ln (x_2 + n) - \frac{x_2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2 + n}{x_1 + n} \right].$$

Численные величины коэффициентов a и b при $x_1 = 8$ и $x_2 = 16$ даны в таблице 1.

Определение времени восстановления после амплитудной перегрузки сводится к решению той же задачи, но при условии, что первый импульс имеет амплитуду, в N раз превышающую амплитуду второго импульса. Тогда приближенное уравнение будет иметь вид:

$$\psi \frac{\mathfrak{L}}{n!\, e^{x_0}} = \frac{N}{n!} e^{-a\frac{t}{\tau} + b}.$$

Это выражение после логарифмирования даст:

$$t_p(\psi) = \tau \frac{x_0 + b - \ln \frac{\psi}{N} \mathfrak{L}}{a},$$

т.е. равносильно уменьшению ψ в N раз.

Приложение 2

Формулы для случая $m = 2$ имеют вид /5/:

$$U(t) = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{t}{\tau} \right)^n e^{-\frac{t}{\tau}} \left(n + 1 - \frac{t}{\tau} \right)$$

$$\frac{t_{MK}}{\tau} = n + 1 \pm \sqrt{n+2} = x_{0,m} \qquad K = 1,2; \quad \tau_{opt.} = \tau_{m2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{\frac{A}{B}}$$

$$U_{M1} = \frac{\sqrt{n+1}\, (n+1-\sqrt{n+1})^n}{(n+1)!\, e^{n+1-\sqrt{n+1}}} = \frac{\mathfrak{L}}{(n+1)!\, e^{x_0}}.$$

Смещаем начало координатной системы в точке t_{M2}. Приближенно представим участок после максимума экспонентой и приравняем функцию $\psi\, U_{M1}$:

$$\psi \frac{\mathfrak{L}}{(n+1)!\,e^{x_0}} = \frac{1}{(n+1)!}\, e^{-a\frac{t}{\tau}+b} ,$$

$$t(\psi) = \tau\, \frac{x_0 + b - \ln \psi \mathfrak{L}}{a} .$$

Определяем величины коэффициентов как в приложении 1:

$$-\left(\frac{t}{\tau} + x_m\right)^n e^{-\left(\frac{t}{\tau}+x_m\right)} \left(n+1 - \frac{t}{\tau} - x_m\right) = e^{-a\frac{t}{\tau}+b}$$

$$a = 1 - n \frac{1}{x_2 - x_1} \left(\ln \frac{x_2 + n + 1 + \sqrt{n+1}}{x_1 + n + 1 + \sqrt{n+1}} + \ln \sqrt[n]{\frac{x_2 + \sqrt{n+1}}{x_1 + \sqrt{n+1}}} \right)$$

$$b = -(n+1+\sqrt{n+1}) + n \left[\ln (x_2 + n + 1 + \sqrt{n+1}) \sqrt[n]{x_2 + \sqrt{n+1}} - \right.$$

$$\left. - \frac{x_2}{x_2 - x_1} \left(\ln \sqrt[n]{\frac{x_2 + \sqrt{n+1}}{x_1 + \sqrt{n+1}}} + \ln \frac{x_2 + n + 1 + \sqrt{n+1}}{x_1 + n + 1 + \sqrt{n+1}} \right) \right] .$$

Численные значения коэффициентов a, b, x_0, $\mathfrak{L}$ при $x_1 = 10$ и $x_2 = 20$ даны в таблице 2. Для определения интервала между импульсами применим формулу (3):

$$t_p(\psi) = t_{M2} - t_{M1} + t_\psi = \tau \left(2\sqrt{n+1} + \frac{x_0 + b - \ln \psi \mathfrak{L}}{a} \right) .$$

Расчетное разрешающее время для $\tau = \tau_{opt.}$ $(m = 1)$ и для $\tau = \tau_{opt.}$ $(m = 2)$ дано в таблице 2. Время восстановления определяем как в приложении 1.

П р и л о ж е н и е 3

Для m= 3 необходимые формулы имеют вид /5/:

$$U(t) = \frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{t}{\tau}\right)^n e^{-\frac{t}{\tau}}\left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - \frac{t}{\tau}\,2(n+2) + (n+1)(n+2)\right],$$

$$\frac{t_{MK}}{\tau} = n+2+2\sqrt{n+2}\,\cos\frac{\phi_0+2\pi K}{3} = x_{0,m}, \qquad K = 1,2,3,$$

$$U_{M1} = \frac{\left(n+2+2\sqrt{n+2}\cos\frac{\phi_0+2\pi K}{3}\right)^n(n+2)}{(n+2)!\,e^{\left(n+2+2\sqrt{n+2}\,\cos\frac{\phi_0+2\pi}{3}\right)}}\left[4\sin^2\left(30^\circ+\frac{\phi_0}{3}\right)-1\right] = \frac{\mathfrak{L}}{(n+2)!\,e^{x_0}}$$

$$\psi = \frac{\mathfrak{L}}{(n+2)!\,e^{x_0}} = \frac{1}{(n+2)!}\,e^{-a\frac{t}{\tau}+b}$$

$$t(\psi) = \frac{x_0+b-\ln\psi\,\mathfrak{L}}{a}.$$

Определяем величины коэффициентов как в приложении 1.

$$\left(\frac{t}{\tau}+x_m\right)^n e^{-\left(\frac{t}{\tau}+x_m\right)}\left[\left(\frac{t}{\tau}+x_m\right)^2 - \left(\frac{t}{\tau}+x_m\right)2(n+2)+(n+1)(n+2)\right] = e^{-a\frac{t}{\tau}+b}$$

$$a = 1 - \frac{n}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2+x_m}{x_1+x_m}\sqrt[n]{\frac{D_2}{D_1}},$$

$$D_p = \left[(x_p+x_m)^2 - (x_p+x_m)\,2(n+2)+(n+1)(n+2)\right] \qquad p = 1,2,$$

$$b = -x_m + n\left[\ln(x_2+x_m)\sqrt[n]{D_2} - \frac{x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2+x_m}{x_1+x_m}\sqrt[n]{\frac{D_1}{D_2}}\right].$$

Если воспользоваться формулой (3) для расчетного разрешающего времени, получим:

$$t_p(\psi) = 2\sqrt{n+2}\left[\cos\frac{\phi_0}{3} + \sin\left(\frac{\phi_0}{3}+30^\circ\right)\right] + \frac{x_0+b-\ln\psi\,\mathfrak{L}}{a}.$$

Коэффициенты a , b , x_0 , $\mathfrak{L}$ вычисляем для $x_1 = 12$ и $x_2 = 24$. Эти значения даны в таблице (3). Определение времени восстановления проводится как в приложении 1. Результаты вычислений даны в той же таблице.

П р и л о ж е н и е 4

Соотношение шум/сигнал при неоптимальном формировании определяется формулами [5]. Для $m = 2$ будем иметь:

$$\overline{U}^2_{ш} = \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2\, 2^{2n+2}\, n(n+1)} \left[A\frac{3}{r} + Br\,(2n-1)\right]'.$$

Положим

$$r = r_{opt.}(m=1) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{\frac{A}{B}} \,,$$

$$\frac{N}{S} = \frac{e^{(n+1-\sqrt{n+1})}}{2^n(n+1-\sqrt{n+1})^n} \sqrt[3]{n(2n-2)!}\, \sqrt[4]{2n-1}\, \sqrt[4]{AB} - 1{,}07\left(\frac{N}{S}\right)_{opt.}.$$

Для $m = 3$

$$\overline{U}^2_{ш} = \frac{3(2n-2)!}{[(n-1)!^2\, 2^{2n+3}\, n(n+1)(n+2)} \left[A\frac{5}{r} + Br(2n-1)\right].$$

Положим

$$r = r_{opt}(m=1) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{\frac{A}{B}} \,,$$

$$\frac{N}{S} = \frac{e^{(n+2-2\sqrt{n+2}\,\sin(30^\circ+\frac{\phi_0}{3})}\,\sqrt[3]{0{,}75(2n-2)!\,n(n+1)(n+2)}\,\sqrt[4]{AB}}{2^{n+2}[n+2-2\sqrt{n+2}\,\sin(30^\circ+\frac{\phi_0}{3})\;[\sin^2(30^\circ+\frac{\phi_0}{3}) - 0{,}25]} = 1{,}14\left(\frac{N}{S}\right)_{opt}.$$

Численные значения N/S даны в таблицах 2 и 3.

П р и л о ж е н и е 5

Общее выражение для основных соотношений представим в виде

$$U_m(x) = x^n e^{-x} P_{m-1}(x),$$

где $x = t/\tau$ и P_{m-1} – полином степени $m-1$ (m – число диф. цепей).

Для вычисления величин $t_p(\psi)$ и $t_b(\psi)$ удобно рассмотреть частное:

$$\frac{U_m(x)}{U_{M1}} = z^n e^{-x_0(z-1)} W_{m-1}, \qquad (10)$$

где $z = x/x_0$; $W_{m-1} = P_{m-1}(zx_0)/P_{m-1}(x_0)$.

Если в равенстве (10) положить $U_m(x)/U_{M1} = \psi$ и потом взять логарифм, то получится удобная для процесса (8) запись (9), где для функции $\phi(z)$ получается:

$$\phi(z) = \frac{1}{x_0} \ln (z^n / W_{m-1}/) + \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{\psi} + 1 .$$

Исследование первой производной выражения (11) показывает, что $/\phi'(z)/ = 1$ для значений z_i^m, определяемых общим соотношением $z_i^m = x_i^m / x_0^m$ $(i=0,1,2)$ $i=0,\dots,m-1$, где x_i – корни уравнения $U'_m(x) = 0$ в возрастающем по i порядке.

Как и следовало ожидать, учитывая характер зависимостей $U_m(x)$, условие сходимости процесса (8): $\phi'(z) \le q < 1$ выполняется для любого $z > \max(z_0, z_1, \dots)$.

В приведенной программе для вычисления величин $t_p(\psi)$ и $t_b(\psi)$ ошибка в их определении оценивается на каждой итерации проверкой условия

$$/z_{k+1} - z_k/ < \frac{1 - q_k}{q_k} E ,$$

где

$$q_k = \max [/\phi'(z_k)/, /\phi'(z_{k+1})/] .$$

Величина E определяет абсолютную ошибку в значении $t_p(\psi)$, $t_b(\psi)$.

```
      PROGRAM COPSI
      E=.OOI
      B=I.
      DO 5 I5=I,5
      B=B*IO.
      PRINT IOOO,B
IOOO  FORMAT(30X,5H   B=,E20.IO)
      BO=LOGF(B)
      DO 5 J5=I,IO
      J5I=J5
      AN=FLOATF(J5I)
      S=SQRTF(2.+AN)
      FIO=ACOSF(I./S)
      PRINT IOOI,AN
IOOI  FORMAT(30X,5H  AN=,E20.IO)
      DO I I=I,3
      ZO=ZOF(I,AN,FIO)
      OMEGA=OMF(I,AN,FIO)
      ZIT=2.*(AN+2.)/ZO
      BOI=BO/ZO+I.
      PRINT IOO2,ZIT
IOO2  FORMAT(20X,5H  XO=,E20.IO)
      Q=O.
      DO 2 J=I,25
      W=OMEGA*WMF(I,AN,ZIT*ZO)
      WI=ABSF(W)
      ZITI=LOGF((ZIT**AN)*WI)/ZO+BOI
      S=(ZITI**AN)*W*EXPF(-ZO*(ZITI-I.))
      SI=ABSF(ZITI-ZIT)
      QI=DWMF(1,AN,ZITI,ZO,W,OMEGA)/ZO
```



```
      IF(Q-QI) 3,3,4
3     Q=QI
4     QI=((I.-Q)/Q)*E
      ZIT=ZITI*ZO
      PRINT IOO3,SI,S,ZITI,ZIT
      ZIT=ZITI
IOO3  FORMAT(IOH    /Z-Z/=,E20.IO,IOH    U/UMAX=,E20.IO,
     *IOH         Z=,E20.IO,IOH         X=,E20.IO)
      IF(SI-Q1) I,I,2
2     CONTINUE
I     CONTINUE
5     CONTINUE
      END
      FUNCTION ZOF(I,AN,FIO)
      II=I
      GO TO(I,2,3),II
I     ZOF=AN
      RETURN
2     ZOF=AN+I.-SQRTF(AN+I.)
      RETURN
3     ZOF=AN+2.-2.*SQRTF(AN+2.)*SINF(.523599+FIO/3.)
      RETURN
      END
      FUNCTION OMF(I,AN,FIO)
      II=I
      GO TO(I,2,3),II
I     OMF=I.
      RETURN
2     OMF=I./SQRTF(AN+I.)
      RETURN
```

```
3     OMF=I./(4.*(AN+2.)*((SINF(.523599+FIO/3.))**2-.25))
      RETURN
      END
      FUNCTION WMF(I,AN,Z)
      II=I
      GO TO(I,2,3),II
I     WMF=I.
      RETURN
2     WMF=AN+I.-Z
      RETURN
3     WMF=(AN+I.)*(AN+2.)+Z*(Z-2.*(AN+2.))
      RETURN
      END
      FUNCTION DWMF(I,AN,ZITI,ZO,W,OM)
      II=I
      Z=ZITI*ZO
      ZI=AN/ZITI
      GO TO(I,2,3),II
I     DWMF=ZI
      RETURN
2     DWMF=ZI-ZO*OM/W
      RETURN
3     DWMF=ZI+2.*(Z-AN-2.)*OM/W
      RETURN
      END
```

Программа вычисляет $t_p(\psi)$, $t_b(\psi)$ при следующих значениях параметров

$$m = 1,2,3; \quad n = 1 \div 10; \quad \psi = 10^{-1} \div 10^{-4}.$$

При желании эти параметры, как и величина ошибки E, могут быть изменены. Тем самым расширяется область значения параметров.

Программа выдает на печать:

для каждого ψ: ψ и

последовательно все значения n.

Для каждого n последовательно для каждого m :

значение z_0^m

в 4 столбца под z_0^m :

а) первый столбец – $/z_{k+1} - z_k/$

б) второй столбец $U_m(z) / U_{m1}$ — вычисленные по формуле (10)

в) третий столбец z_k

г) четвертый столбец $z_k x_0 = x_k$

по итерациям.

Все идентификаторы в программе соответствуют принятым обозначениям, за исключением величины $1/\psi$, для которой использован идентификатор B .

Литература

1. А.Б. Джиллеспи. Сигнал, шум и разрешающая способность усилителей Атомиздат, 1964.
2. К.Г. Родионов, Ли Сам Рен. Сообщение ОИЯИ, 3-3259, Дубна, 1967.
3. А.М. Зубарева, Г.Г. Субботина, В.Г. Субботин. Сообщение ОИЯИ 13-4458, Дубна, 1969.
4. E.Fairstein. IEEE Trans.Nucl. Ns-13(Feb.1966) p. 596.
5. С.И. Орманджиев. Сообщение ОИЯИ, Р13-6219, Дубна, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 января 1972 года.