

С 344.36

0-67

28/10/72

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

940/2-72

P13 - 6219



С.И.Орманджиев

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

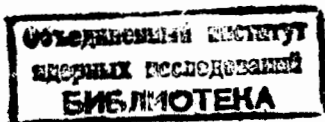
РС ФОРМИРОВАТЕЛИ ИМПУЛЬСОВ  
ОТ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДЕТЕКТОРОВ  
ИЗЛУЧЕНИЯ С ТРЕХКРАТНЫМ  
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

1972

P13 - 6219

С.И.Орманджиев

**РС ФОРМИРОВАТЕЛИ ИМПУЛЬСОВ  
ОТ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ДЕТЕКТОРОВ  
ИЗЛУЧЕНИЯ С ТРЕХКРАТНЫМ  
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ**



Использование  $RC$  формирователей с трехкратным дифференцированием дает возможность быстро восстанавливать рабочий режим усилительных секций после амплитудной перегрузки /1/, что очень существенно при измерениях в низкоэнергетичных участках спектров на фоне линии со значительно более высокой энергией. Это также существенно и при работе с импульсными источниками частиц.

В этой работе даны результаты анализа  $RC$  формирователя с трехкратным дифференцированием и  $n$ -кратным интегрированием импульсов от полупроводникового детектора. Получены расчетные формулы для формы импульса, отношения шум/сигнал, разрешающего времени и определения влияния фронтов входных импульсов на амплитуды выходных импульсов. Сравниваются параметры схем с одно-, дву- и трехкратным дифференцированием и, в связи с этим, выведены некоторые формулы для случаев одно- и двукратного дифференцирования. При анализе принято, что все константы дифференцирования и интегрирования одинаковы. Результаты расчетов представлены в виде таблиц и графиков.

Форма выходных импульсов формирователя

Блок-схема формирователя дана на рис. 1. При анализе принято, что буферные каскады имеют бесконечно высокие входные и бесконечно малые выходные сопротивления, и все  $RC$  цепи имеют одинаковые константы времени.

Операторное уравнение для выходного напряжения при подаче единичного скачка напряжения на вход системы имеет вид:

$$U(p) = \frac{p^{m-1}}{\tau^n (p + \frac{1}{\tau})^{n+m}} = \frac{p^2}{\tau^n (p + \frac{1}{\tau})^{n+3}},$$

где  $\tau$  - константа дифференцирования и интегрирования,  $n$  - количество интегрирующих звеньев,  $m$  - количество дифференцирующих звеньев.

Оригинал функции запишется:

$$U(t) = \frac{1}{(n+2)!} \cdot \frac{t^n}{\tau^n} e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \frac{t^2}{\tau^2} - 2\frac{t}{\tau}(n+2) + (n+1)(n+2) \right]. \quad (1)$$

Выходной импульс имеет 3 максимума, положение  $t_{MK}$  которых находим после приравнивания производной  $U(t)$  нулю и определения корней полученного кубического уравнения:

$$t_{MK} = \tau(n+2) \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{n+2}} \cos \frac{\phi_0 + 2\pi K}{3} \right), \quad (2)$$

где  $K = 1, 2, 3$  - индексы максимумов функции,

$$\cos \phi_0 = 1/\sqrt{n+2}.$$

Времена переходов через нуль  $t_{0,1,2}$  получаем, приравняв нулю  $U(t)$  и определяя корни полученного уравнения:

$$t_{0,1,2} = \tau(n+2 - \sqrt{n+2}). \quad (3)$$

Записывая выражения для  $t_{M1}/\tau$  из формулы (2) в формулу (1), получаем величины амплитуд первого, второго и третьего максимумов. Величины максимумов для  $n = 1 \dots 6$  даны в таблице 1. На рис. 3 дана зависимость амплитуд максимумов от кратности интегрирования, а на рис. 2 в качестве иллюстрации дана форма импульса для  $n = 1$ . Величина первого максимума имеет вид:

$$U_{M1} = \frac{[n+2 - 2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})]^n}{(n+1)! \exp[n+2 - 2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})]} [4 \sin^2(30^\circ + \frac{\phi_0}{3}) - 1]. \quad (4)$$

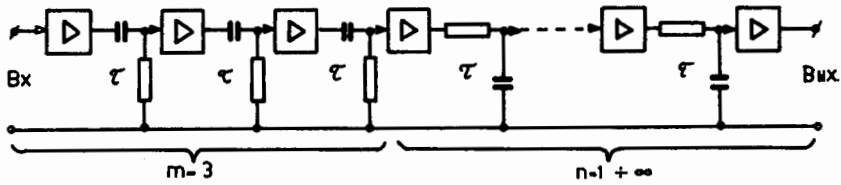


Рис. 1

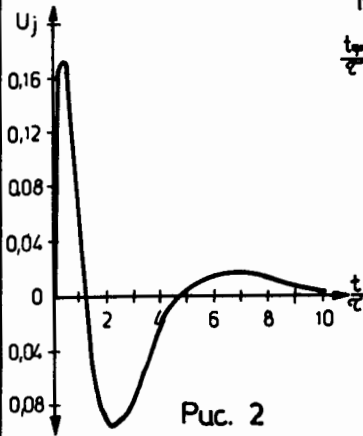


Рис. 2

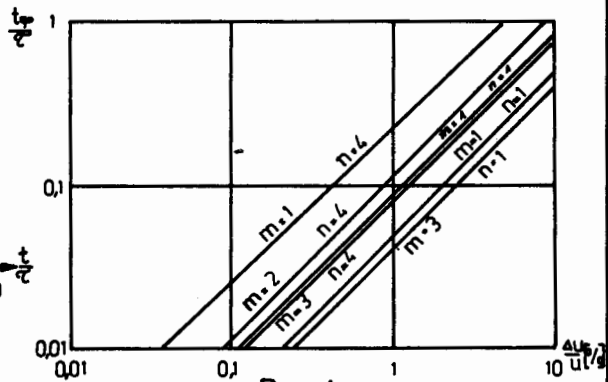


Рис. 4

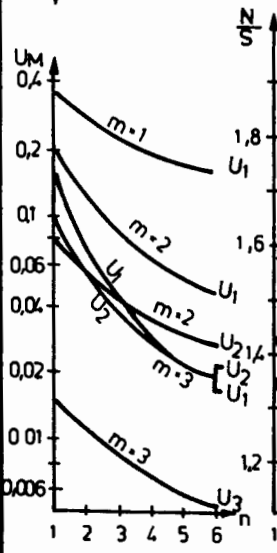


Рис. 3а

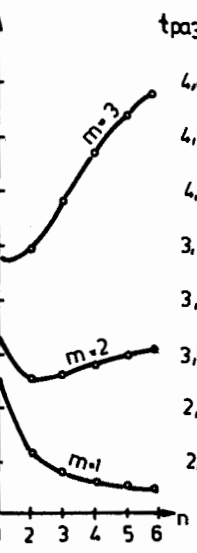


Рис. 3б

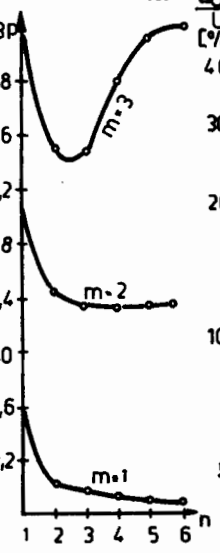


Рис. 3в

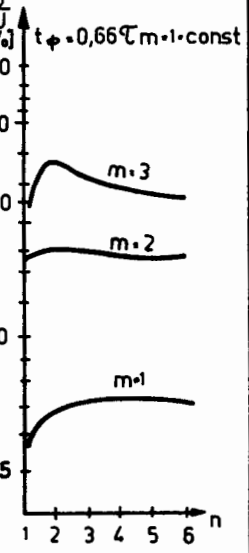


Рис. 5

Таблица 1

$n$	$U_{M1}$	$U_{M2}$	$U_{M3}$	$t_{M1}$	$t_{M2}$	$t_{01}$	$t_{02}$	$\frac{N}{S}$	$t_{\text{разр}}$
1	0,168	0,097	0,0154	0,4 г	2,3 г	1,3 г	4,7 г	1,57	4,98
2	0,077	0,059	0,0108	0,9 г	3,3 г	2,0 г	6,0 г	1,59	4,51
3	0,046	0,04	0,0084	1,6 г	4,3 г	2,8 г	7,2 г	1,68	4,51
4	0,03	0,03	0,0007	2,2 г	5,3 г	3,6 г	8,5 г	1,77	4,81
5	0,022	0,024	0,0006	2,8 г	6,3 г	4,3 г	9,7 г	1,84	4,96
6	0,017	0,019	0,0005	3,5 г	7,2 г	5,2 г	10,8 г	1,88	5,06

Таблица 2

$n$	$U_M$	$t_M$	$t_{\text{разр}}$	$N/S$	$m=2$				$N/S$	
					$U_{M1}$	$U_{M2}$	$t_{M1}$	$t_{01}$		$t_{\text{разр}}$
1	0,368	1 г	2,72	1,355	0,231	0,079	0,6 г	2 г	4,07	1,427
2	0,271	2 г	2,14	1,215	0,131	0,057	1,3 г	3 г	3,43	1,354
3	0,224	3 г	2,0	1,181	0,09	0,045	2,0 г	4 г	3,35	1,364
4	0,195	4 г	1,95	1,168	0,069	0,037	2,8 г	5 г	3,35	1,378
5	0,175	5 г	1,90	1,155	0,055	0,031	3,6 г	6 г	3,37	1,397
6	0,161	6 г	1,88	1,145	0,046	0,027	4,4 г	7 г	3,38	1,410

## Оптимальное отношение шум/сигнал

Отношение шум/сигнал определяем как  $1/2$ :

$$\frac{N}{S} = \frac{\sqrt{\overline{U^2}}}{U_{M1}} = \frac{1}{U_{M1}} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 \left( A + \frac{B}{\omega^2} \right) d\omega \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Оптимальная величина этого отношения для случая трехкратного дифференцирования будет (см. приложение 1):

$$\frac{N}{S} = \frac{e^{n+2-2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})} \sqrt{0,75(2n-2)! n(n+1) \sqrt{5(2n-1)}}^4 \sqrt{AB}}{\sqrt{n+2} 2^{n+2} [n+2-2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})]^n [-0,25 + \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})]} \quad (5)$$

Из таблицы 1 и графика на рисунке 3б видно, что при использовании более чем двух интегрирующих звеньев отношение шум/сигнал быстро ухудшается, чем ограничен выбор количества интегрирующих звеньев.

### Разрешающее время

Разрешающее время определено как:

$$t_{\text{разр}} = \frac{|\int_0^{t_{01}} U(t) dt| + |\int_{t_{01}}^{t_{02}} U(t) dt| + |\int_{t_{02}}^{\infty} U(t) dt|}{|U_{M1}|} \quad (6)$$

Вычисления по этой формуле (см. приложение 2) дают:

$$t_{\text{разр}} = \frac{e^{-2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})} [e^{\sqrt{n+2}} (n+2 - \sqrt{n+2})^{n+1} e^{-\sqrt{n+2}} (n+2 + \sqrt{n+2})^{n+1}] \sqrt{\frac{A}{B}}}{\sqrt{0,8(n+2)(2n-1) [n+2-2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})]^n \cdot [\sin^2(30^\circ + \frac{\phi_0}{3}) - 0,25]}} \quad (7)$$

Числовые величины разрешающего времени для случаев  $n = 1 + 6$  даны в таблице 1 и рис. 3в. Минимум функции получается в области  $n = 2 + 3$ , что совпадает с областью минимума отношения шум/сигнал.

Зависимость амплитуды выходного импульса от  
длительности фронта входного импульса

Получены формулы, определяющие связь между фронтом входного импульса  $t_{\phi}$  и амплитудой выходного импульса  $U(t)$  (приложение 5), с помощью которых определялась зависимость:

$$\frac{U(t_{\phi}) - U(0)}{U(0)} = \Psi\left(\frac{t_{\phi}}{\tau}\right), \quad (8)$$

где  $U(0)$  – амплитуда выходного импульса при  $t_{\phi} = 0$ ,  $U(t_{\phi})$  – амплитуда выходного импульса при  $t_{\phi} > 0$ . Численные результаты для случаев  $n = 1$  и  $n = 4$  представлены графически на рис. 4.

На рис. 5 дана зависимость относительного изменения  $U(t)$  в зависимости от количества интегрирующих звеньев при  $t_{\phi} = \text{const} = 0,3 \tau_1$ .

### Сравнение расчетных параметров схем с 1-, 2- и 3-кратным дифференцированием

Для сравнения схемы с 3-кратным дифференцированием со схемами с 1- и 2-кратным дифференцированием использованы формулы из [3,4,5] и полученные в приложениях к данной работе формулы для  $U(t_{\phi})$  для  $m = 1$  и  $m = 2$  (приложение 3 и 4),  $N/S$  для  $m = 2$  (приложение 6) и  $t_{\text{разр}}$  для  $m = 2$  (приложение 7). Численные величины подлежащих сравнению величин даны в таблице и на рис. 3, 4 и 5.

В таблицах 1, 2 и на рис. 3б показана зависимость отношения шум/сигнал от количества интегрируемых звеньев при одно-, дву- и трехкратном дифференцировании сигнала. Отношение шум/сигнал ухудшается с увеличением кратности дифференцирования. При однократном дифференцировании количество  $RC$  интегрирующих звеньев можно выбрать в пределах 3 + 6, при двукратном 2 + 4 и при трехкратном дифференцировании – 1 + 3.

Разрешающее время (см. таблицы 1, 2 и рис. 3в) ухудшается с увеличением количества дифференцирующих звеньев из-за уменьшения амплитуд формируемых импульсов. В случае однократного дифференцирования для количества интегрирующих звеньев можно выбрать  $n = 4$ , при двукратном –  $n = 2$  и при трехкратном –  $n = 2$  или 3.

Влияние фронтов входных импульсов на амплитуды выходных импульсов увеличивается с увеличением кратности дифференцирования (см. рис. 4 и 5).



## Выводы

Отношение шум/сигнал и разрешающее время схемы с трехкратным дифференцированием хуже, чем в схемах с  $m = 1$  и  $m = 2$ . Преимущество этой схемы имеется только при работе в условиях больших перегрузок<sup>/1/</sup>.

Наличие двух переходов через нуль дает принципиальную возможность создания устройства с точной временной привязкой<sup>/1/</sup>, а появление первого максимума раньше чем в формирователях с однократным и двукратным дифференцированием (см. таблицы 1,2) дает возможность разработки устройств амплитудного анализа импульсов с предварительным отбором поступающей спектрометрической информации.

### Приложение 1

Квадрат модуля комплексного коэффициента передачи формирующей системы при одинаковых константах дифференцирования и интегрирования равен:

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{\omega^6}{\tau^{2n}(\omega^2 + 1/\tau^2)^{n+3}}.$$

Для квадрата шумового напряжения получим:

$$\begin{aligned} \overline{U_{ш}^2} &= \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 (\overline{U_{\text{посл}}^2} + \overline{U_{\text{пар}}^2}) d\omega = \frac{1}{2\pi\tau^{2n}} \int_0^{\infty} \frac{\omega^6 (A + \frac{B}{\omega^2}) d\omega}{(\omega^2 + 1/\tau^2)^{n+3}} = \\ &= \frac{A}{2\pi\tau} \int_0^{\infty} \frac{\omega^6 \tau^6 d\omega\tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^{n+3}} + \frac{B\tau}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega^4 \tau^4 d\omega\tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^{n+3}} = \\ &= \frac{A}{2\pi\tau} \left[ \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^n} - 3 \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^{n+1}} + 3 \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^{n+2}} - \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^{n+3}} \right] + \\ &+ \frac{B\tau}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^{n+1}} - 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^{n+2}} + \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^{n+3}} \right] = \\ &= \frac{A}{2\pi\tau} (J_n - 3J_{n+1} + 3J_{n+2} - J_{n+3}) + \frac{B\tau}{2\pi} (J_{n+1} - 2J_{n+2} + J_{n+3}). \end{aligned}$$

Представим  $J_{n+1}$ ,  $J_{n+2}$ ,  $J_{n+3}$  посредством  $J_n$ :

$$J_{n+1} = J_n \frac{2n-1}{2n}; \quad J_{n+2} = J_n \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}; \quad J_{n+3} = J_n \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}{2n(2n+2)(2n+4)}.$$

После подстановки в формулу для  $\overline{U_{ш}^2}$  получим:

$$\overline{U_{ш}^2} = J_n \frac{3}{16 \cdot \pi \cdot n(n+1)(n+2)} \left[ 5 \frac{A}{\tau} + B\tau(2n-1) \right].$$

Решим интеграл  $J_n$ :

$$J_n = \int_0^{\infty} \frac{d\omega \tau}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^n} = \pi j \operatorname{Res} \left[ \frac{1}{(\omega^2 \tau^2 + 1)^n} \right] = \frac{\pi(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n-1}}.$$

Для  $\overline{U_{ш}^2}$  получим:

$$\overline{U_{ш}^2} = \frac{3(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 2^{2n+1} n(n+1)(n+2)} \left[ 5 \frac{A}{\tau} + B\tau(2n-1) \right].$$

Для нахождения минимума  $\overline{U_{ш}^2}$  приравняем нулю производную выражения в скобках и определяем  $\tau_{opt}$ :

$$\tau_{opt} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{\frac{A}{B}},$$

что дает для минимума шумового напряжения

$$\sqrt{\overline{U_{ш}^2}} = \frac{\sqrt{0,75(2n-2)!} \sqrt{5(2n-1)}}{(n-1)! 2^n \sqrt{n(n+1)(n+2)}} \sqrt[4]{AB}.$$

Оптимальное отношение шум/сигнал будет иметь вид:

$$\frac{N}{S} = \frac{\sqrt{\overline{U_{ш}^2}}}{U_{M1}} = \frac{e^{n+2-2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})} \sqrt{0,75(2n-2)!} n(n+1) \sqrt{5(2n-1)}}{\sqrt{n+2} 2^{n+2} [n+2-2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})]^n [-0,25 + \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})]} \sqrt[4]{A \cdot B}.$$

## Приложение 2

Разрешающее время при  $m = 3$  определяется формулой:

$$t_{\text{разр}} = \frac{|\int_0^{t_{01}} U(t) dt| + |\int_{t_{01}}^{t_{02}} U(t) dt| + |\int_{t_{02}}^{\infty} U(t) dt|}{|U_{M1}|}.$$

Представим неопределенный интеграл  $\int U(t) dt$  как сумму неопределенных интегралов:

$$\int U(t) dt = \frac{1}{r^{n+2}(n+2)!} [J_{n+2} - 2r(n+2)J_{n+1} + r^2(n+1)(n+2)J_n].$$

Представим  $J_{n+1}$  и  $J_{n+2}$  посредством  $J_n$  :

$$J_{n+1} = J_n r(n+1) - r t^{n+1} e^{-\frac{t}{r}} -$$

$$J_{n+2} = J_n r^2(n+1)(n+2) - r t^{n+1} e^{-\frac{t}{r}} [t + r(n+2)].$$

Для неопределенного интеграла получим:

$$\int U(t) dt = \frac{r t^{n+1} e^{-\frac{t}{r}}}{(n+2)! r^{n+1}} [n+2 - \frac{t}{r}].$$

Для суммы определенных интегралов, если положить  $r = r_{op} t$ , имеем:

$$= \frac{\sqrt{20(n+2)} e^{-(n+2)} [e^{\sqrt{n+2}} (n+2 - \sqrt{n+2})^{n+1} + e^{-\sqrt{n+2}} (n+2 + \sqrt{n+2})^{n+1}]}{\sqrt{2n-1} (n+2)!} \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

Тогда для разрешающего времени будем иметь:

$$t_{\text{разр}} = \frac{e^{-2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})} [e^{\sqrt{n+2}} (n+2 - \sqrt{n+2})^{n+1} + e^{-\sqrt{n+2}} (n+2 + \sqrt{n+2})^{n+1}]}{\sqrt{0,8}^{(n+2)(2n-1)} [n+2 - 2\sqrt{n+2} \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})]^n [-0,25 + \sin(30^\circ + \frac{\phi_0}{3})]} \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

## Приложение 3

Определение зависимости амплитуды выходного напряжения от длительности фронта при  $m = 1$ .

При выводе формулы рассмотрен случай экспоненциального фронта входного импульса. Такая форма фронта получена подачей единичного скачка напряжения на вход интегрирующей цепи с константой времени  $\tau_{\phi}$ , причем время нарастания импульса  $t_{\phi} = 2,2 \tau_{\phi}$ .

Смещение максимума при увеличении  $\tau_{\phi}$  принято линейным, причем границы смещения времени получения максимума ограничены в рамках

$$n \tau \leq t_{M1} \leq (n+1) \tau; \quad 0 \leq \tau_{\phi} \leq \tau.$$

Операторные выражения для выходного напряжения, когда на вход формирующего устройства подано импульсное напряжение с экспоненциальным фронтом, имеет вид:

$$U(p) = \frac{1}{\tau_{\phi} \tau^n} \cdot \frac{1}{(p + \frac{1}{\tau_{\phi}})(p + \frac{1}{\tau})^{n+1}}.$$

Оригинал функции находим, разлагая на элементарные дроби и находя оригиналы отдельных членов суммы:

$$U(t) = (-1)^n \frac{\alpha^{n+1}}{\tau_{\phi} \tau^n} \left[ -e^{-\frac{t}{\tau_{\phi}}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{b=0}^n (-1)^b \frac{1}{b!} \frac{t^b}{\alpha^b} \right],$$

где  $\alpha = \tau \cdot \tau_{\phi} / (\tau - \tau_{\phi})$ .

Если положить в формуле  $\tau_{\phi} = \Psi \cdot \tau$ , и  $\alpha$  заменить его равным, получим:

$$U(t) = (-1)^n \frac{\Psi^n}{(1-\Psi)^{n+1}} \left[ -e^{-\frac{t}{\tau\Psi}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{b=0}^n (-1)^b \frac{1}{b!} \frac{t^b (1-\Psi)^b}{\tau^b \Psi^b} \right].$$

Чтобы получить функцию только  $\Psi$  и  $n$ , положим

$$\frac{t}{\tau} = \frac{t_{M1}}{\tau} = n + \Psi.$$

Получим окончательный вид формулы:

$$U(\Psi, n) = (-1)^n \frac{\Psi^n}{(1-\Psi)^{n+1}} \left[ -e^{-\frac{n+\Psi}{\Psi}} + e^{-\frac{n+\Psi}{1-\Psi}} \sum_{b=0}^n (-1)^b \frac{1}{b!} (n+\Psi)^b \frac{(1-\Psi)^b}{\Psi^b} \right].$$

## Приложение 4

Определение зависимости амплитуды выходного напряжения от длительности фронта при  $m = 2$ .

При рассмотрении этой зависимости для фронта входного импульса соображения аналогичны соображениям, данным в приложении 3. Для времени получения максимума принято:

$$(n+1 - \sqrt{n+1})\tau \leq t_{M1} \leq (n+2 - \sqrt{n+2})\tau; \quad 0 \leq \tau_{\phi} \leq \tau.$$

Операторное выражение для выходного напряжения с экспоненциальным фронтом будет:

$$U(p) = \frac{1}{\tau_{\phi} \tau^n} \cdot \frac{p}{(p + \frac{1}{\tau_{\phi}})(p + \frac{1}{\tau})^{n+2}}.$$

Для оригинала функции получим:

$$U(t) = (-1)^n \frac{a^{n+2}}{\tau_{\phi} \tau^n} \left\{ \frac{1}{\tau_{\phi}} \left[ -e^{-\frac{t}{\tau_{\phi}}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{b=0}^n (-1)^b \frac{1}{b!} \frac{t^b}{a^b} \right] - \frac{(-1)^{-n} t^{n+1}}{(n+1)! \tau a^{n+1}} e^{-\frac{t}{\tau}} \right\}.$$

Если положить в формуле  $\tau_{\phi} = \Psi\tau$  и  $a = \tau \cdot \tau_{\phi} / (\tau - \tau_{\phi})$ , получим:

$$U(t) = (-1)^n \frac{\Psi^n}{(1-\Psi)^{n+2}} \left\{ -e^{-\frac{t}{\Psi\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \sum_{b=0}^n (-1)^b \frac{1}{b!} \frac{t^b (1-\Psi)^b}{\tau^b \Psi^b} \right\} - \frac{(-1)^{-n} t^{n+1} (1-\Psi)^{n+1}}{(n+1)! \tau^{n+1} \Psi^n} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Положим в формуле:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{t_{M1}}{\tau} = n+1+\Psi - \sqrt{n+1+\Psi}.$$

Окончательно получаем:

$$U(\Psi, n) = (-1)^n \frac{\Psi^n}{(1-\Psi)^{n+2}} \left\{ -e^{-\frac{n+1+\Psi-\sqrt{n+1+\Psi}}{\Psi}} + e^{-\frac{n+1+\Psi-\sqrt{n+1+\Psi}}{\tau}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{b=0}^n (-1)^b \frac{1}{b!} \frac{(n+1+\Psi-\sqrt{n+1+\Psi})^b (1-\Psi)^b}{\Psi^b} \right\} - \frac{(n+1+\Psi-\sqrt{n+1+\Psi})^{n+1} (1-\Psi)^{n+1}}{(n+1)! \Psi^n} e^{-\frac{n+1+\Psi-\sqrt{n+1+\Psi}}{\tau}}$$

Приложение 5

Определение зависимости амплитуды выходного напряжения от длительности фронта при  $m = 3$ .

Соображения аналогичны данным в приложении 3. Для времени получения максимума принято:

$$[n + 2 + 2\sqrt{n+2} \cos \frac{2\pi + \phi_0}{3}] \tau \leq t_{M1} \leq [n + 3 + 2\sqrt{n+3} \cos \frac{2\pi + \phi_0}{3}] \tau,$$

где  $0 \leq \tau_\phi \leq \tau$ .

Операторное выражение для входного напряжения с экспоненциальным фронтом будет:

$$U(p) = \frac{1}{\tau_\phi} \frac{p^2}{r^n (p + \frac{1}{\tau_\phi})(p + \frac{1}{r})^{n+1}}.$$

Для оригинала функции, если положим в формуле:

$$\frac{t}{\tau} = \frac{t_{M1}}{\tau} = n + 2 + \Psi + 2\sqrt{n+2+\Psi} \cdot \cos \left( \frac{2\pi + \phi_0}{3} \right); \quad \tau_\phi = \Psi \tau.$$

получим:

$$U(\Psi, n) = (-1)^n \frac{\Psi^n}{(1-\Psi)^{n+1}} \left\{ -e^{-\frac{n+2+\Psi+2\sqrt{n+2+\Psi} \cos \frac{2\pi+\phi_0}{3}}{\Psi}} - e^{-\frac{n+2+\Psi+2\sqrt{n+2+\Psi} \cos \frac{2\pi+\phi_0}{3}}{\Psi}} \right. \\ \times \left[ \sum_{b=0}^n (-1)^b \frac{1}{b!} \frac{(n+2+\Psi+2\sqrt{n+2+\Psi} \cos \frac{2\pi+\phi_0}{3})^b (1-\Psi)^b}{\Psi^b} + \frac{(n+2+2\sqrt{n+2+\Psi} \cos \frac{2\pi+\phi_0}{3})^{n+2} (1-\Psi)^{n+2}}{(-1)^n (n+2)! \Psi^n} \right. \\ \left. \left. - \frac{(2-\Psi)(n+2+\Psi+2\sqrt{n+2+\Psi} \cos \frac{2\pi+\phi_0}{3})^{n+1} (1-\Psi)^{n+1}}{(-1)^n (n+1)!} \right] \right\}.$$

Приложение 6

Определение максимума отношения шум/сигнал для случая  $m = 2$ .

Квадрат модуля комплексного коэффициента передачи формирующей системы при одинаковых константах дифференцирования и интегрирования будет:

$$|K(j\omega)|^2 = \frac{\omega^4}{\tau^{2n}(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2})^{n+2}}$$

Для квадрата шумового напряжения получим:

$$\begin{aligned} \overline{U_{ш}^2} &= \int_0^{\infty} |K(j\omega)|^2 (U_{посл}^2 + U_{пар}^2) d\omega = \frac{1}{2\pi\tau^{2n}} \int_0^{\infty} \frac{\omega^4 (A + \frac{B}{\omega^2}) d\omega}{(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2})^{n+2}} = \\ &= \frac{A}{2\pi\tau} \left[ \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2\tau^2 + 1)^n} - 2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2\tau^2 + 1)^{n+1}} + \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2\tau^2 + 1)^{n+2}} \right] + \frac{B\tau}{2\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2\tau^2 + 1)^{n+1}} - \right. \\ &\left. - \int_0^{\infty} \frac{d\omega\tau}{(\omega^2\tau^2 + 1)^{n+2}} \right] = \frac{A}{2\pi\tau} (J_{n-2} - 2J_{n+1} + J_{n+2}) + \frac{B\tau}{2\pi} (J_{n+1} - J_{n+2}). \end{aligned}$$

Представим  $J_{n+1}$  и  $J_{n+2}$  посредством  $J_n$

$$J_{n+1} = J_n \frac{2n-1}{2n}; \quad J_{n+2} = J_n \frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}$$

После подстановки в формулы получим:

$$\overline{U_{ш}^2} = J_n \frac{1}{8\pi n(n+1)} \left[ 3\frac{A}{\tau} + B\tau(2n-1) \right].$$

Решение интеграла  $J_n$  найдем в приложении 1, после чего для  $\overline{U_{ш}^2}$  получим:

$$\overline{U_{ш}^2} = \frac{(2n-2)!}{[(n-1)!]^2 \cdot 2^{2n+2}(n+1)n} \left[ 3\frac{A}{\tau} + B\tau(2n-1) \right].$$

Находим условие получения минимума  $\overline{U_{ш}^2}$ :

$$\tau_{opt} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2n-1}} \sqrt{\frac{A}{B}}$$

При этом для минимума шумового напряжения получим:

$$\overline{U_{ш}^2} = \frac{(2n-2)! \sqrt{3(2n-1)}}{[(n-1)!]^2 \cdot 2^{2n+1}(n+1) \cdot n} \sqrt{AB}$$

Оптимальное отношение шум/сигнал имеет вид:

$$\frac{N}{S} = \frac{e^{n+1-\sqrt{n+1}}}{2^n(n+1-\sqrt{n+1})^n} \sqrt{n(2n-2)! \sqrt{0,75(2n-1)} \sqrt{AB}}$$

## Приложение 7

Разрешающее время при  $m = 2$  определим формулой:

$$t_{\text{разр}} = \frac{|\int_0^t U(t) dt| + |\int_t^\infty U(t) dt|}{|U_{M1}|}$$

Представим неопределенный интеграл  $\int U(t) dt$  как сумму неопределенных интегралов:

$$\int U(t) dt = \frac{1}{r^{n+1}(n+1)!} [(n+1)r J_n - J_{n+1}]$$

Представим  $J_{n+1}$  посредством  $J_n$  (приложение 2) и для неопределенного интеграла получим:

$$\int U(t) dt = \frac{r}{(n+1)!} \cdot \frac{t^{n+1}}{r^{n+1}} e^{-\frac{t}{r}}$$

Для суммы определенных интегралов, если положить  $r = r_{opt}$ , имеем:

$$= \frac{\sqrt{12} (n+1)^n e^{-(n+1)}}{\sqrt{2n-1} \cdot n!} \sqrt{\frac{A}{B}}$$

Тогда для разрешающего времени будем иметь:

$$t_{\text{разр}} = \frac{\sqrt{12} (n+1) (n+1)^n e^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{2n-1} (n+1 - \sqrt{n+1})^n} \sqrt{\frac{A}{B}}$$

### Литература

1. E. Fairstein. IEEE Trans. Nucl. Ns-13 (Feb. 1966) p. 596.
2. А.М. Зубарева, Г.Г. Субботина. Сообщение ОИЯИ 13-4458 (1969).
3. I. E. Sluifers. International Symposium on Nuclear Electronics, Versailles (sept. 1968), vol. 1, p. 78-1.
4. E. Fairstein and J. Nahn. Nucleonics, 23 (1965) 50.
5. E. Fairstein and J. Nahn. Nucleonics, 24 (1966) 54.

Рукопись поступила в издательский отдел  
7 января 1972 года.