СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р13 - 6078

Л.М. Сороко

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ МУЛЬТИПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ РЕГИСТРАЦИИ ЧАСТИЦ И МЕТОДЫ ОСЛАБЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХИ

1971

P13 - 6078

Л.М. Сороко

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ МУЛЬТИПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ РЕГИСТРАЦИИ ЧАСТИЦ И МЕТОДЫ ОСЛАБЛЕНИЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ПОМЕХИ

§1

В предыдущих работах[1-4] были рассмотрены мультиплексные системы регистрации частиц. Основное назначение этих систем сводится к тому, чтобы: а) ослабить эффект шумов счётчика[1], б) уменьшить равномерный фон в зале[2], наконец, в) погасить вклад многочастичных каналов при наблюдении бинарных реакций с помощью телескопа из двух мультиплексных сцинтилляционных счётчиков[4]. В этих работах шла речь о различных сторонних возмущениях, которые воздействуют на систему регистрации частиц, затрудняя проведение достоверных измерений. Эти возмущения носят характер непредсказуемой случайной помехи.

Влияние помехи n на искомую функцию f, описывающую исследуемый процесс, в общем виде можно выразить оператором V, так что функция s, непосредственно измеряемая экспериментатором, равна

$$s = V(f,n). \tag{1}$$

Если V является оператором суммирования, то

$$s = f + n_a \tag{2}$$

и помеха n_a называется <u>аддитивной</u>. Мультиплексные системы регистрации частиц, представленные в работах[1,2,4], ослабляют аддитивную помеху. Если же оператор V имеет вид

$$s = f \cdot n_m , \tag{3}$$

причём n_m всюду неотрицательно, то помеха n_m называется мультипликативной. Более общим случаем является одновременное воздействие аддитивной и мультипликативной помех. Тогда

$$s = f \cdot n_m + n_a . \tag{4}$$

Природа мультипликативной помехи n_m состоит в том, что параметры канала регистрации частиц подвержены случайным изменениям. Например, коэффициент усиления канала не есть постоянное число, или в канале имеются нелинейные искажения случайной природы, вызванные изменением загрузок. Ниже будут рассмотрены мультипликативные помехи, которые носят чисто случайный, непредсказуемый характер.

В технике связи[5] существуют различные методы борьбы с помехами. Отношение сигнала к шуму улучшается с помощью метода накопления сигнала, с помощью оптимального фильтра и некоторых других приемов. В ядерной физике был успешно применен метод резонансного накопления сигналов[6,7]. Имеются методы, аналогичные методу накопления сигналов, которые позволяют ослабить мультипликативную помеху. Сущность этих методов состоит в том, чтобы вести наблюдения одновременно по нескольким каналам, мультипликативные помехи в которых не связаны взаимно.

Сигналы нескольких каналов используются по-разному. Можно их просто сложить. Это эквивалентно методу накопления в его классической форме. В реальных условиях физик-экспериментатор производит повторные измерения, усредняя результаты нескольких опытов и отбрасывая реализации с сильными выбросами. Последняя операция есть не что иное, как приписывание различным реализациям весовых коэффициентов. Здесь не обходится без интуиции экспериментатора, и, как правило, подобные приёмы невозможно выразить в виде универсальных алгоритмов.

Среди автоматических методов устранения мультипликативной помехи наиболее распространен метод автоматической регулировки усиления. Система автоматической регулировки усиления является корректором мультипликативной помехи. Идеальная система АРУ, действие которой описывается множителем

$$K = \frac{1}{n_m} , \tag{5}$$

где n_m – мультипликативная помеха, позволяет полностью избавиться от мультипликативной помехи. Между тем, кроме мультипликативной помехи, имеется аддитивная помеха (см. (4)). В этом случае исправленный сигнал на выходе

$$z = s \cdot k = \frac{s}{n_m} = f + \frac{n_a}{n_m} (n_m \approx 1) \tag{6}$$

содержит фактически прежнюю аддитивную помеху. Таким образом, в отличие от методов накопления сигнала или наблюдения одновременно по нескольким каналам система автоматической регулировки усиления не меняет соотношения между сигналом и шумом. Можно показать, что наиболее мощным методом ослабления любых видов помех, как аддитивных, так и мультипликативных, является метод <u>мультиплексной</u> регистрации частиц. Что касается аддитивной помехи, то возможность ее ослабления в экспериментах по наблюдению редких распадов была продемонстрирована в предыдущих работах /1-4/. В данной работе показывается, что мультиплексный метод регистрации частиц ослабляет одновременно мультипликативную помеху.

§2

Пусть f – искомая функция, подлежащая измерению, а n_m – мультипликативная помеха (3). В традиционных экспериментах коридор ошибок составляет 1-10%, и основной погрешностью измерения является, как правило, статистическая точность оценки потока частиц, попадающих в детектор. Однако в некоторых опытах приходится измерять малые вариации функции f, составляющие 10^{-3}–10^{-7} от среднего эффекта /6,7/. Здесь положение обратное. Определяющая ошибка эксперимента имеет совсем другую природу, например задается мультипликативной помехой, воздействие которой на экспериментальную установку состоит в том, что эффективность измерений неконтролируемо меняется в пределах, по порядку величины близких к искомому эффекту (10^{-3}–10^{-7}).

Ниже будут рассмотрены два метода ослабления мультипликативной помехи с использованием мультиплексного метода регистрации частиц. Напомним, что сущность мультплексного метода регистрации частиц заключается в следующем. Экспериментатор регистрирует не саму искомую функцию $f(x)$, где x – текущий параметр, например угол вылета частицы, а ее кодово-интегральный образ

$$r(x) = f(x) \circledast g(x) \equiv \sum_{k=0}^{M-1} f(k)\, g(x-k) , \tag{7}$$

равный дискретной свертке искомой функции $f(x)$ с функцией-ядром $g(x)$, где M – степень мультиплексности. О выборе подходящего значения M см. /3/.

Первый из рассматриваемых ниже методов состоит в том, что измерения ведут так, что по одному и тому же каналу регистрации частиц, либо по двум идентичным каналам, либо, наконец, по двум очень близким по параметрам каналам, попеременно стохастически переключаемым для приема сигналов, – производят два независимых измерения. Предметом наблюдения первого измерения является искомая функция $f(x)$, которая сканируется традиционным детектором. Эффективность регистрации всей системы равна n_m , и наблюдаемой величиной является

$$s_1(x) = f(x) \cdot n_m(x) . \tag{8}$$

Второе измерение той же функции $f(x)$ ведут с помощью мультиплексного детектора, который захватывает весь исследуемый интервал свободного параметра x , например угол вылета частицы, и обладает тем же разрешением Δx , что и традиционный детектор. Предметом измерения второго опыта является функция

$$s_2(x) = [\, f(x) \circledast g(x) \,] \cdot n_m(x) . \tag{9}$$

Оба измерения ведут одновременно. Предполагается, что помеха в них является одной и той же. Как будет видно из дальнейшего, эти эксперименты являются линейно независимыми, что позволяет по двум измеренным функциям, $s_1(x)$ и $s_2(x)$, найти как искомую функцию $f(x)$, так и мультипликативную помеху $n_m(x)$.

Рассмотрим случай, когда имеют место малые отклонения. Тогда искомую функцию можно записать в виде

$$f(x) = 1(x) + \Delta f(x) , \tag{10}$$

где

$$[\Delta f(x)]_{\text{средн.}} = 0 , \qquad |\Delta f(x)|_{max} \ll 1 . \tag{11}$$

Аналогично

$$n_m(x) = 1(x) + \Delta n_m(x) , \tag{12}$$

где

$$[\Delta n \ (x)]_{\text{средн.}} = 0 , \qquad |\Delta n \ (x)|_{max} \ll 1 . \tag{13}$$

Тогда (8) и (9) можно записать в виде

$$\begin{aligned} s_1 &= (1 + \Delta n)(1 + \Delta f) = 1 + \Delta f + \Delta n + \Delta f \cdot \Delta n , \\ s_2 &= (1 + \Delta n)[(1 + \Delta f) \circledast g] = (1 + \Delta n)[1 + \Delta f \circledast g] . \end{aligned} \tag{14}$$

Поскольку Δf и Δn – малые величины, то их произведением в (14) можно полностью пренебречь, и тогда система уравнений (14) принимает вид

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + \Delta n + \Delta f , \\ s_2 &= 1 + \Delta n + \Delta f \circledast g . \end{aligned} \tag{15}$$

Разность $s_2 - s_1$ определяется только искомым эффектом Δf, а именно:

$$s - s = \Delta f \circledast g - \Delta f . \tag{16}$$

Если далее первое уравнение в (15) подвергнуть операции свертки с функцией-ядром $g(x)$ и вычесть из него второе уравнение (15), то получим:

$$s_1 \circledast g - s_2 = \Delta n \circledast g - \Delta n . \tag{17}$$

Видно, что уравнения (16) и (17) имеют единую структуру. Запишем их в общем виде так:

$$y_i(x) \circledast g(x) - y_i(x) = h_i(x) \qquad (i = 1,2) , \tag{18}$$

где $h_1 = s_2 - s_1$, $h_2 = s_1 \circledast g - s_2$ – заданные функции, $y_1 = \Delta f$ и $y_2 = \Delta n$ – искомые функции, а $g(x)$ – известное ядро. Уравнение (18) – это уравнение в дискретных свертках. Для того, чтобы его решить, подвергнем левую и правую части уравнения (18) дискретному преобразованию Фурье[3]. Тогда получим:

$$Y_i(\omega) \cdot G(\omega) - Y_i(\omega) = H_i(\omega) , \tag{19}$$

где, например, дискретный фурье-образ функции $h_i(x)$ равен, по определению,

$$H_i(\omega) = \sum_{x=0}^{M-1} h_i(x)\, e^{-i \frac{2\pi}{M} \omega x} \qquad (i = 1,2) . \tag{20}$$

Переменные x и ω пробегают целочисленные значения

$$x = 0,1,\ldots, \quad M-1; \qquad \omega = 0,1,\ldots, \quad M-1 .$$

Уравнение (19) разрешимо относительно $Y_i(\omega)$:

$$Y(\omega) = \frac{H_i(\omega)}{G(\omega)-1} \qquad (i = 1,2) . \tag{21}$$

Вопрос о существовании решения уравнения (19) сводится к анализу нулей знаменателя выражения (21). Как показано в[3], фурье-образ ядра $g(x)$ имеет вид

$$G(\omega) = 1(\omega) + i\, Im\, G(\omega) = 1(\omega) + i\sqrt{M}\,[\, g(\omega) - \delta(\omega)\,] . \tag{22}$$

Поэтому

$$|G(\omega) - 1(\omega)|^2 = M[1(\omega) - \delta(\omega)], \qquad (a)$$

$$|G(\omega)|^2 = (M+1) - M\cdot\delta(\omega), \qquad (b) \qquad (23)$$

$$G + G^* = 2. \qquad (c)$$

Последние соотношения (23) позволяют следующим образом преобразовать уравнение (21):

$$Y_i(\omega) = \frac{H_i(\omega)}{G(\omega)-1} = H_i(\omega)\frac{G^*(\omega)-1}{|G(\omega)-1|^2} = \frac{H_i(\omega)}{M[1(\omega)-\delta(\omega)]}\cdot[G^*(\omega)-1(\omega)]. \qquad (24)$$

$$(i = 1,2)$$

Поскольку, по условию задачи (см. (11),(13)),

$$H_i(0) = M[\Delta h_i]_{\text{средн.}} = 0 \qquad (i = 1,2) \qquad (25)$$

и поскольку решение уравнения (19) ищется с точностью до постоянного слагаемого, то уравнение (24) можно записать в виде

$$Y_i(\omega) = \frac{H_i(\omega)}{M}[G^*(\omega) - 1(\omega)] \qquad (i = 1,2). \qquad (26)$$

Совершая обратное преобразование Фурье, находим окончательно:

$$y_i(x) = \frac{1}{M}[h_i(x) * g(x) - h_i(x)] \qquad (i = 1,2), \qquad (27)$$

где символ $*$ обозначает операцию корреляции

$$h_i(x) * g(x) = \sum_{\xi=0}^{M-1} h_i(\xi)\, g(x+\xi) \qquad (i = 1,2). \qquad (28)$$

Различие между операцией свертки (7) и операцией корреляции (28) здесь имеет существенное значение. Важно подчеркнуть, что решение (27) имеет простой вид только благодаря особым свойствам функции ядра $g(x)$, которая описывает дискретную псевдослучайную последовательность. Как было отмечено в /3/, наиболее существенной характеристикой функции $g(x)$ является ее широкополосная частотная природа, благодаря чему информационные свойства функции $g(x)$ практически эквивалентны свойствам дельта-функции $\delta(x)$.

Так, например, соотношение (23c) в исходном координатном пространстве записывается в виде

$$f(x) \circledast g(x) + f(x) * g(x) = 2 f(x) , \tag{29}$$

где $f(x)$ – произвольная функция. Решения уравнений (16) и (17) запишем в явном виде:

$$\Delta f = \frac{1}{M} [(s_2 - s_1) * g - (s_2 - s_1)] , \tag{30}$$

$$\Delta n = \frac{1}{M} [(s_1 \circledast g - s_2) * g - (s_1 \circledast g - s_2)] = s_1 - 1 - \Delta f . \tag{31}$$

На рис. 1 приведен график случайной мультипликативной помехи Δn. На рис. 2 приведены: функция $s_1(x)$, непосредственно измеряемая традиционной системой наблюдения, и график искомой функции $\Delta f(x)$. На рис. 3 дан график функции $s_2(x) - 1 = \Delta f \circledast g + \Delta n$, измеряемой мультиплексной системой наблюдения, на рис. 4 – график функции $s_2 - s_1 = h_1 = \Delta f \circledast g - \Delta f$. Подвергнув функцию h_1 обработке согласно алгоритму (30), находим искомую функцию Δf. Аналогично, беря измеренные данные в виде функции $h_2(x)$, находят помеху Δn (17), (31).

§3

Предположение о том, что мультипликативная помеха $n_m(x)$ является одной и той же в двух измерениях, (8) и (9), не всегда выполняется на практике. Для того, чтобы найти оптимальную логику наблюдения в условиях, когда помехи $n_m(x)$ в опытах (8) и (9) не равны друг другу, рассмотрим сначала предельный случай, реализуемый в условиях, когда помехи в опытах (8) и (9) полностью независимы друг от друга, но, как в стационарном случайном процессе, обладают равными дисперсиями. В этих условиях уравнения (15) принимают вид

$$s_1' = 1 + \Delta n' + \Delta f ,$$

$$s_2'' = 1 + \Delta n'' + \Delta f \circledast g . \qquad (32)$$

Здесь $\Delta n'$ и $\Delta n''$ – две различные реализации помехи Δn. Если к уравнениям (32) применить алгоритм решения (32), то получим:

$$\frac{1}{M}[(s_2'' - s_1') * g - (s_2'' - s_1')] = \Delta f + \frac{1}{M}[\Delta^2 n * g - \Delta^2 n] , \qquad (33)$$

где

$$\Delta^2 n = \Delta n'' - \Delta n' . \qquad (34)$$

Видно, что искомую функцию Δf точно восстановить нельзя. Вместо этого данные опыта устанавливают только коридор ошибок, внутри которого лежит функция Δf. Определим ширину этого коридора, для чего дисперсию функции $\Delta^2 n$ запишем в виде

$$\sigma^2_{\Delta^2} = \sigma^2_{\Delta'} + \sigma^2_{\Delta''} - 2\,C_{\Delta'\Delta''} . \qquad (35)$$

Здесь $\sigma_{\Delta'}$ и $\sigma_{\Delta''}$ – дисперсии функций $\Delta n'$ и $\Delta n''$, которые по условию равны между собой $(\sigma_{\Delta'} = \sigma_{\Delta''})$, а $C_{\Delta'\Delta''}$–величина, имеющая смысл перекрестной дисперсии функций $\Delta n'$ и $\Delta n''$ или кросс-корреляции и обусловленная недиагональными элементами матрицы ошибок.

Если мультипликативные помехи в опытах (8) и (9) равны друг другу и $\Delta n' = \Delta n''$, то $C_{\Delta'\Delta''} = \sigma_{\Delta'}\sigma_{\Delta''}$, а $\sigma^2_{\Delta^2} = 0$. Ширина коридора ошибок равна нулю.

Если же помехи $\Delta n'$ и $\Delta n''$ представляют собой независимые реализации случайного процесса Δn, то $C_{\Delta'\Delta''} = 0$ и $\sigma_\Delta^2 = \sqrt{2} \cdot \sigma_{\Delta'}$. Наконец, в общем случае соотношение (35) можно записать в виде

$$\sigma^2_{\Delta^2} = \sigma^2_{\Delta'} + \sigma^2_{\Delta''} - 2\sigma_{\Delta'}\,\sigma_{\Delta''}(1-a) . \qquad (36)$$

Коэффициент a характеризует степень независимости между реализациями $\Delta n'$ и $\Delta n''$. Значение $a = 0$ соотвествует тождественному равенству помех $\Delta n'$ и $\Delta n''$. Когда $a = 1$, то помехи $\Delta n'$ и $\Delta n''$ полностью независимы. Соотношение (36) в случае равенства дисперсий запишется в виде

$$\sigma^2_{\Delta^2} = 2a \cdot \sigma^2_{\Delta n} , \tag{37}$$

или окончательно:

$$\sigma^2_{\Delta f}(k) = \frac{2a}{M} \sigma^2_{\Delta n} . \tag{38}$$

Рассмотрим измерения, которые произведены чисто мультиплексной системой. Предметом наблюдения является функция

$$s_2 = 1 + \Delta n + \Delta f \circledast g . \tag{39}$$

Если к функции s_2 применить обычный алгоритм обработки, которой подвергаются промежуточные данные, измеряемые мультиплексной системой /3/, то получим

$$(s_2 - 1) * g = (M + 1)\Delta f + \Delta n * g . \tag{40}$$

Откуда

$$\Delta f = \frac{1}{M+1}[(s_2 - 1) * g - \Delta n * g] . \tag{41}$$

Коридор ошибок, в котором лежит функция Δf, в этом случае определяется дисперсией

$$\sigma^2_{\Delta f}(M) = \frac{\sigma^2_{\Delta n}}{(M+1)} . \tag{42}$$

Видно, что коридоры ошибок обычного мультиплексного метода (42) и комбинированного метода (38) с использованием как традиционной системы наблюдения, так и мультиплексной системы, существенно отличаются друг от друга. Отношение дисперсий этих двух методов равно

$$\kappa = \frac{\sigma^2_{\Delta f}\text{комб.}}{\sigma^2_{\Delta f}\text{мульт.}} = 2a\frac{M+1}{M} . \tag{43}$$

Если $\frac{M}{2(M+1)} < a < 1$, то преимущество имеет чисто мультиплексная система. Если же $0 < a < \frac{M}{2(M+1)}$, то предпочтение следует отдать комбинированному методу. Напомним, что чем меньше a, тем сильнее корреляции между помехами $\Delta n'$ и $\Delta n''$.

Случай $a = 1$ был промоделирован. На рис. 5 приведен окончательный результат измерений чисто мультиплексной системой. Дисперсия равна $\sigma(M) = 8.9 \cdot 10^{-3}$. На рис. 6 дан результат измерений комбинированной системой. Дисперсия $\sigma(k) = 12.2 \cdot 10^{-3}$. Видно, что ширина коридора ошибок в чисто мультиплексной системе в 1,38 раза меньше, чем в комбинированной системе. Из (43) следует, что ожидаемое отношение ширин коридоров ошибок равно $\kappa^{теор.} = 1.45$.

На рис. 7 показан эффект ослабления мультиплексной помехи. Кривая 1 – исходная помеха $\Delta n(x)$. Кривая 2 – ослабленная помеха.

Дисперсия, определяющая ширину коридора ошибок, уменьшается с $13{,}4 \cdot 10^{-3}$ до $3 \cdot 10^{-3}$, т.е. в 4,48 раза. Функция Δf на этом рисунке принята равной нулю. На рис. 8 показан пример ослабления помехи $n(x)$, имеющей детерминистский характер, когда эффективность регистрации линейно спадает во времени. Кривая 1 – исходная помеха $n(x)$. Кривая 2 – ослабленная помеха. Коридор ошибок уменьшился в 4,43 раза. Для случайного процесса ожидаемый коэффициент уменьшения ошибок равен $4{,}47 = \sqrt{20}$.

Приведенные моделирующие расчёты наглядно демонстрируют потенциальные возможности методов ослабления мультипликативных помех с использованием мультиплексных систем регистрации частиц. Указан параметр, который позволяет сделать выбор оптимального метода регистрации.

В заключение автор выражает благодарность Т.А. Стриж за помощь в работе.

Литература

1. Л.М. Сороко. Сцинтилляционный счетчик с использованием преобразования Адамара. Сообщение ОИЯИ, Р13-5696, Дубна, 1971.
2. Л.М. Сороко. Мультиплексная мишень. Сообщение ОИЯИ, Р13-5699, Дубна, 1971.
3. Л.М. Сороко. Псевдошумовые последовательности и применение их для мультиплексных систем регистрации частиц. Сообщение ОИЯИ, Р13-5722, Дубна, 1971.
4. Л.М. Сороко. Информационные свойства телескопа из мультиплексных сцинтилляционных счетчиков частиц. Сообщение ОИЯИ, Р13-5896, Дубна, 1971.
5. А.А. Харкевич. Борьба с помехами. Наука, М., 1965.
6. В.М. Лобашов и др. Письма в ЖЭТФ, 3, 76 (1966); 3, 268 (1966); 5, 73 (1967).
7. В.М. Лобашов. ЯФ, 2, 957 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 октября 1971 года.

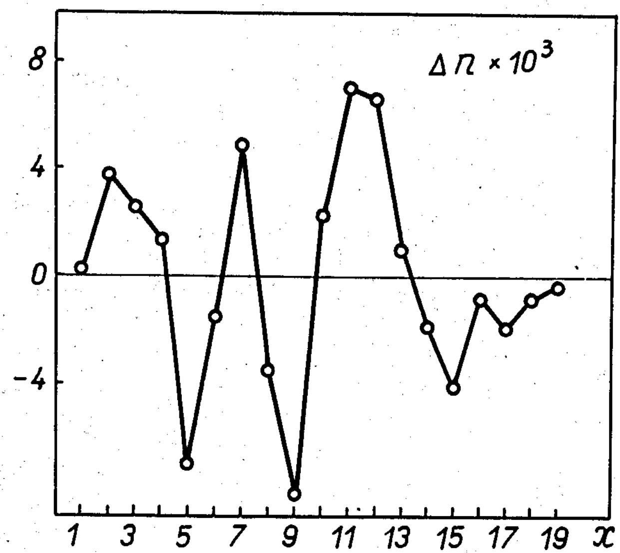


Рис. 1. График случайной мультипликативной помехи $\Delta n(x)$, которая воздействует на измерительную аппаратуру.

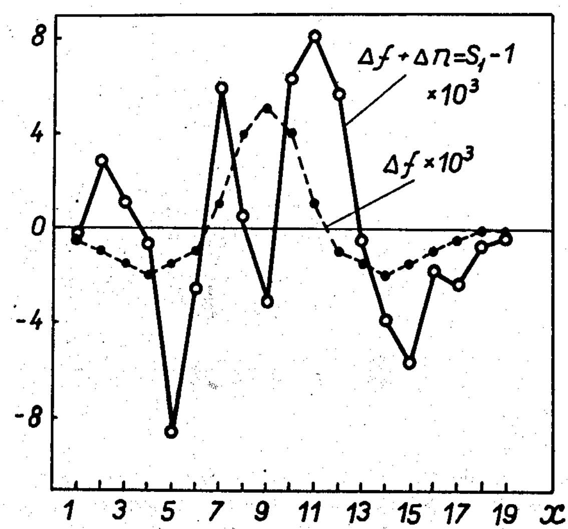
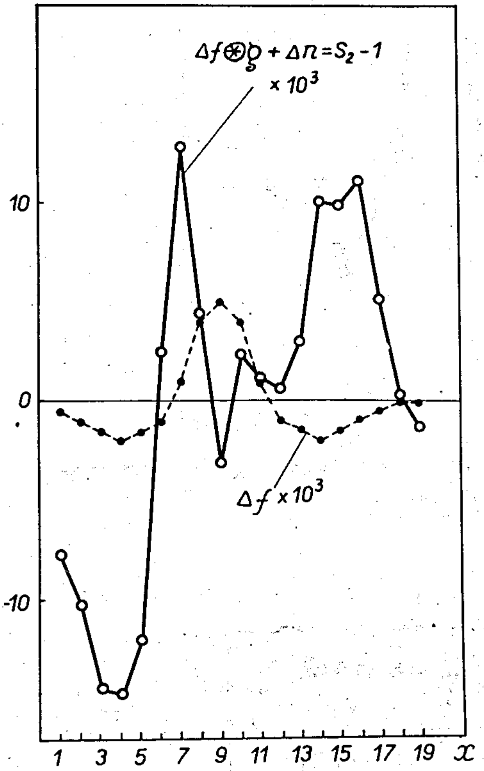


Рис. 2. Графики величины $s_T(x)$, измерямой обычной системой наблюдения, и искомой функции $\Delta f(x)$.

Рис. 3. Графики величины $s_2(x)$, измеряемой мультиплексной системой наблюдения, и искомой функции $\Delta f(x)$.



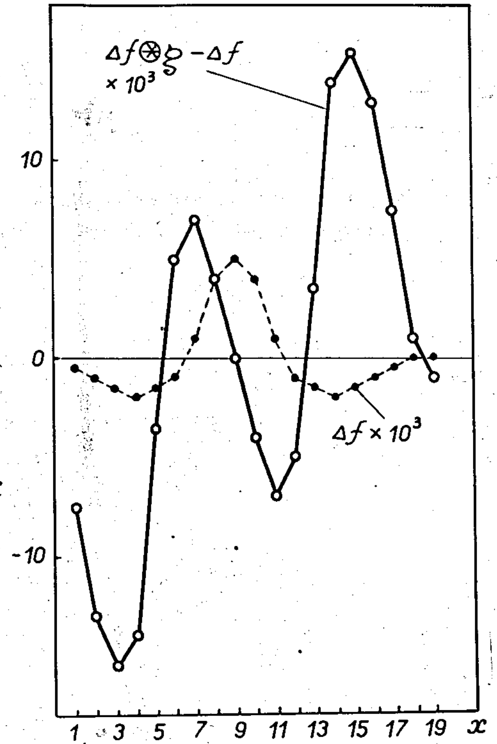


Рис. 4. График функции $h_1(x) = s_2(x) - s_1(x)$, полученной совместными измерениями комплексной системой, которая состоит из обычной системы наблюдения ($s_1(x)$) и мультиплексной системы наблюдения ($s_2(x)$). Пунктиром показана искомая функция $\Delta f(x)$.

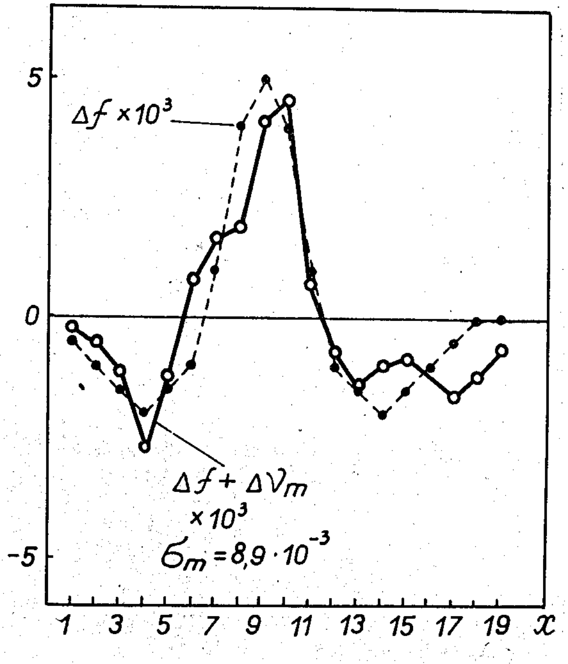


Рис. 5. Окончательный результат измерений, $\Delta f + \Delta \nu_m$, полученный с помощью чисто мультиплексной системы. Пунктир – искомая функция $\Delta f(x)$. Дисперсия равна $\sigma(M) = 8{,}9.10^{-3}$.

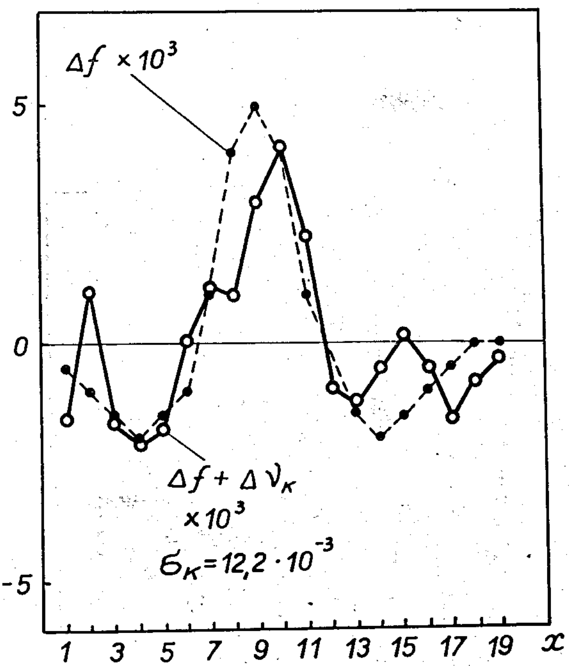


Рис. 6. Окончательный результат измерений, $\Delta f + \Delta \nu_k$, полученный с помощью комбинированной системы наблюдения. Пунктир – искомая функция $\Delta f(x)$. Дисперсия равна $\sigma(k) = 12,2.10^{-3}$. Обе реализации мультипликативной помехи являются взаимно некоррелированными $(a = 1)$. Чисто мультипликативная система наблюдения обладает преимуществом над комбинированной системой, если $\frac{M}{2(M+1)} < a < 1$. В противном случае, если $0 < a < \frac{M}{2(M+1)}$, комбинированная система наблюдения дает более узкий коридор ошибок.

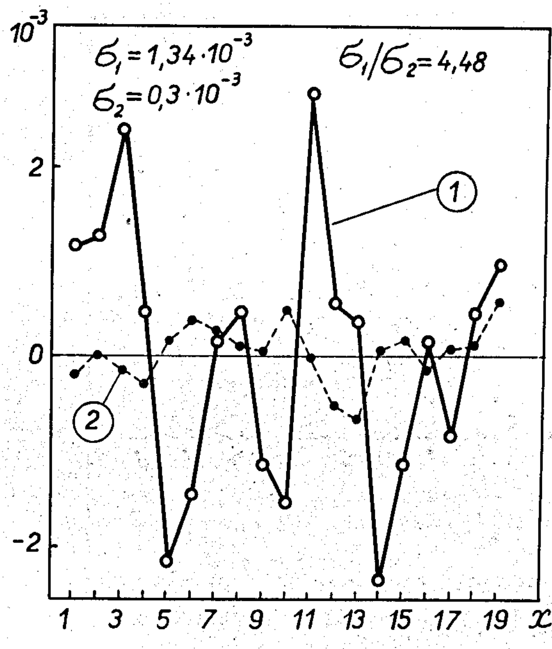


Рис. 7. Эффект ослабления случайной мультипликативной помехи для частного случая $\Delta f(x) = 0$. Кривая 1 – исходная помеха $\Delta n(x)$. Кривая 2 – ослабленная помеха. Отношение $\sigma_{\text{исх.}}/\sigma_{\text{ослаб.}} = 4{,}48$ вместо $\sqrt{20} = 4{,}47$.

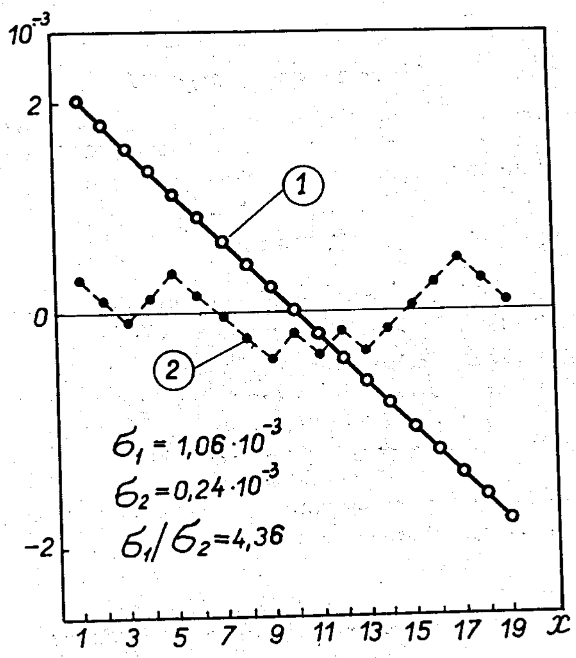


Рис. 8. Эффект ослабления мультипликативной помехи детерминистского характера. Кривая 1 – исходная помеха $\Delta n(x)$. Кривая 2 – ослабленная помеха. Отношение $\sigma_{исх.}/\sigma_{ослаб.} = 4{,}36$, вместо $\sqrt{M} = \sqrt{20} = 4{,}47$.