

СЗУУ, 12

Т-484

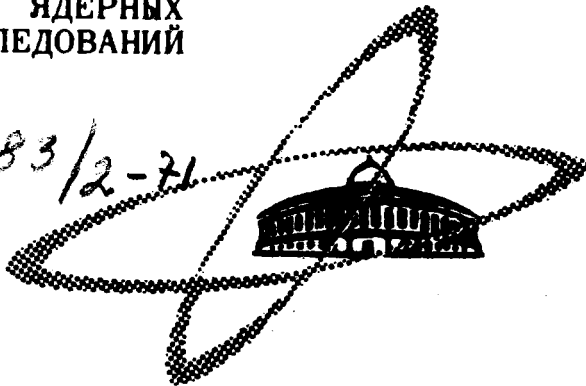
15/VI-71

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P 13-6037

3883/2-71



Л.Г.Ткачев, В.Д. Шестаков

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

ДИНАМИКА ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА
В ВОДОРОДНЫХ ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ

1971

Р 13-6037

Л.Г.Ткачев, В.Д. Шестаков

ДИНАМИКА ПАРОВОГО ПУЗЫРЬКА
В ВОДОРОДНЫХ ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

S U M M A R Y

Theoretical considerations of vapour bubble dynamics in a hydrogen bubble chamber are given. The system of equations takes into account the heat and mass exchange between a bubble and liquid. The vapour in the bubble is described with the real gas equation of state. Computer solutions are in agreement with the corresponding experiment. A set of temperature distributions in the surrounding liquid during the cycle of bubble chamber is presented. The important role of the temperature distribution formed during the bubble growth is shown for the correct description of the bubble collapse. Some predictions are made for the bubble behaviour in fast-cycling chambers.

The results of numerical calculations for the bubble growth and collapse in the static pressure of the bubble chamber are discussed. The stability of self-similar solutions describing bubble growth is proved. Conditions for self-excitation oscillations in the bubble collapse take place. These natural frequency pulsations lead to the lifetime increasing. In this connection the possibility of the existence of stable bubbles pulsating in the overpressed liquid is considered using both analytical and numerical methods. It is shown that the assumption of the existence of such bubbles leads to a contradiction in the system of equations.

Практические потребности развития техники пузырьковых камер приводят к необходимости рассмотрения динамики парового пузырька в жидкости. Рассмотрению этой термо- и гидродинамической задачи посвящено значительное число теоретических^{/1-6/} и экспериментальных^{/7-8/} работ. Ввиду сложности проблемы не удается получить точного аналитического решения системы уравнений, описывающих поведение пузырька. В данной работе численными методами исследуется рост и коллапс парового пузырька в водородной пузырьковой камере с учетом выпрямленной тепловой диффузии^{/9-12/}.

1. Ограничимся рассмотрением поведения сферического парового пузырька в несжимаемой жидкости. Температурное поле вокруг пузырька предполагается изотропным. Пузырек считается однородным. Пар находится в термодинамическом равновесии с поверхностным слоем жидкости, что означает

$$P'(t) = P(R, t) + 2\sigma/R, \quad T'(t) = T(R, t), \quad (1)$$

где R - радиус пузырька, t - время, σ - поверхностное натяжение жидкости, P' , T' и P , T - давление и температура пара и жидкости соответственно.

Уравнения, определяющие поведение пузырька, следуют из законов сохранения импульса, массы и энергии. Уравнение непрерывности в несжимаемой жидкости

$$\dot{r} r^2 = U_R R^2 \quad (2)$$

позволяет выразить закон сохранения импульса при ее движении в виде

$$R \dot{U}_R + 2U_R \dot{R} - \frac{1}{2} U_R^2 = \frac{P' - \frac{2\sigma}{R} - P_\infty}{\rho}, \quad (3)$$

где r - координата точки в жидкости, \dot{r} и U_R - скорости в точках r и R соответственно, ρ - плотность и P_∞ - давление в жидкости. Скорости \dot{R} и U_R связаны соотношением, следующим из условия сохранения массы при испарении (конденсации)

$$\dot{R} = \frac{U_R \rho + \frac{R}{3} \frac{dP'}{dt}}{\rho - \rho'}, \quad (4)$$

где ρ' - плотность пара. Зависимость $P'(t)$ определяется из условия сохранения энергии при испарении (конденсации)/12/

$$\frac{dP'}{dt} = \frac{3}{R} \cdot \frac{k \frac{\partial T}{\partial R} - \rho' L \dot{R} + T' \frac{\partial \sigma}{\partial T'} \frac{2\dot{R}}{R}}{L \frac{d\rho'}{dP'} + C_s \rho' \frac{dT'}{dP'}}, \quad (5)$$

где k - теплопроводность жидкости, L - теплота парообразования, C_s - теплоемкость пара вдоль кривой фазового равновесия $\partial T / \partial R \equiv \partial T(r, t) / \partial r |_{r=R}$. Производные $d\sigma / dT'$, $d\rho' / dP'$ и dT' / dP' вычисляются вдоль кривой фазового равновесия.

Известно, что равновесное давление пара при фиксированной температуре зависит от радиуса пузырька/13/

$$P' = P_s + \frac{2\sigma / R}{1 - \rho / \rho'}, \quad (6)$$

где P_s - равновесное давление в случае плоской поверхности раздела фаз, связанное с равновесной температурой зависимостью $T_s = f(P_s)$ - уравнение кривой фазового равновесия (формула (6) справедлива при $2\sigma / R \ll P_s$). Поэтому давление и температура насыщенного пара в пузырьке связаны соотношением

$$T'(P') = f\left(P' - \frac{2\sigma / R}{1 - \rho / \rho'}\right). \quad (7)$$

Аналогичные соотношения используются при вычислении всех теплофизических величин на кривой фазового равновесия. Так как поведение пузырька зависит от градиента температуры $\partial T / \partial R$, необходимо рассмотреть уравнение теплопроводности в жидкости

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{U_R R^2}{r^2} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (8)$$

где D — температуропроводность жидкости. Совокупность уравнений (2)–(5) и (8) с соответствующими начальными и граничными условиями образует замкнутую систему.

2. Рассмотрим рост и коллапс асимптотических паровых пузырьков, когда в уравнениях (3) и (5) несущественны члены, обусловленные поверхностным натяжением. Предполагается, что давление в жидкости постоянно. При этом условии влияние инерции жидкости на динамику пузырька пренебрежимо мало^{1–5}, так что уравнение (3) вырождается в равенство $P' = P_\infty$. Изменение радиуса пузырька определяется тепловым потоком через его поверхность и описывается уравнениями

$$k \frac{\partial T}{\partial R} = \rho' L \dot{R} \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{R} R^2}{r^2} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (10)$$

представляющими собой частный случай уравнений (5) и (8). Известно⁵, что уравнения (9) и (10) с дополнительными условиями

$$T(R, t) = T', \quad T(r = \infty, t) = T_\infty, \quad T(r, t=0) = T_\infty, \quad (11)$$

$$T_\infty - T' > 0, \quad R(0) = 0 \quad (12)$$

имеют автомодельное решение, описывающее рост парового пузырька

$$R(t) = A \sqrt{2Dt} \quad (13)$$

$$T(\nu) = T_{\infty} + (T' - T_{\infty}) \left[1 - \frac{A^2}{\sqrt{\pi} A_0} \int_{\nu}^1 \exp[A^2 \Phi(x)] dx \right], \quad (14)$$

где

$$A_0 = (T_{\infty} - T') k / (L \rho' D)$$

$$\Phi(x) = (x-1) [1+x - 2x^2(1-\rho'/\rho)] / 2x^2, \quad (15)$$

$$\nu = R/r,$$

T_{∞} — температура жидкости на бесконечности, а параметр A_1 вычисляется из граничного условия $T(0) = T_{\infty}$.

При рассмотрении коллапса пузырька соотношения

$$T_{\infty} - T' < 0, \quad R(0) = R_0 > 0, \quad (12')$$

соответствующие (12), приводят к тому, что начальные и граничные условия противоречат предположению автомодельности. Автомодельные решения, полученные в работах^{3-4/}, также описывают только рост пузырька. Техника последовательных приближений^{1/} также неприменима в случае коллапса, т.к. тепловой слой в жидкости, прилегающей к пузырьку, оказывается не мал^{5/}. Тем не менее распространено мнение, что процессы роста и коллапса парового пузырька в асимптотической области подчиняются одинаковым законам^{2,4/}, т.е. изменение радиуса захлопывающегося пузырька удовлетворяет соотношению

$$R^2 = R_0^2 - A^2 D t, \quad (16)$$

где A — безразмерная постоянная. В^{6/} указывается, что асимптотический пузырек должен захлопываться как релеевская полость^{14/}

$$t = R_0 \left(\frac{\rho}{6(P_{\infty} - P')} \right)^{1/2} \int_{(R/R_0)^3}^1 \frac{x^{-1/6} dx}{(1-x)^{1/2}}, \quad (17)$$

т.е. динамика коллапса, вопреки предыдущим утверждениям, определяется уравнением (3), причем $P_{\infty} - P' = \text{const}$.

В связи с этим представляется интересным получение численных решений уравнений (2)–(5), (8). В случае коллапса пузырька по характеру решений можно судить о механизме захлопывания: определяется ли он термодинамическими факторами, т.е. соотношениями (9), (10) и (16), либо механическими факторами, т.е. уравнением (3) и равенством (17), или же, наконец, имеется некая третья возможность.

На рис. 1 приведены результаты численного решения уравнений, описывающие поведение пузырька в жидком водороде. Если давление насыщенного пара P_s больше давления в жидкости P_∞ , то кривая рис. 1 соответствует росту пузырька, в противном случае – коллапсу. Начальное распределение температуры в жидкости выбиралось либо в соответствии с формулой (14) автомодельного решения (сплошные кривые), либо однородным (пунктирные кривые). Начальный радиус выбирался равным 5×10^{-4} см или 1×10^{-3} см.

Кривая роста соответствует результату автомодельного решения (13). Возмущения автомодельного решения, связанные с пульсациями пузырька на собственной частоте, быстро затухают. Из этого следует, что автомодельные решения, описывающие рост пузырька, являются устойчивыми.

Рассматривая коллапс, прежде всего убеждаемся, что как и в случае роста, давление внутри пузырька практически не отличается от давления в жидкости. Поэтому наиболее существенны при описании этого процесса уравнения (9) и (10). При неоднородном начальном температурном распределении времена жизни пузырьков пропорциональны R_0^2 . Такой же результат получается из формулы (16), хотя детальное изменение радиуса пузырька во времени иное. Видно также, что при данном давлении однородному начальному распределению соответствует меньшее время жизни пузырька.

3. В отличие от случая, рассмотренного выше, в пузырьковых камерах рост и коллапс происходят при изменяющемся давлении. Представляет интерес сравнить результаты соответствующих измерений^{/8/} с расчетами. Решая уравнения (2)–(5) и (8), приходим к выводу, что инерциальные факторы мало влияют на поведение асимптотического пузырька, т.е. уравнение (2) можно заменить равенством $P' = P_\infty(t)$, и уравнение (5) превращается в

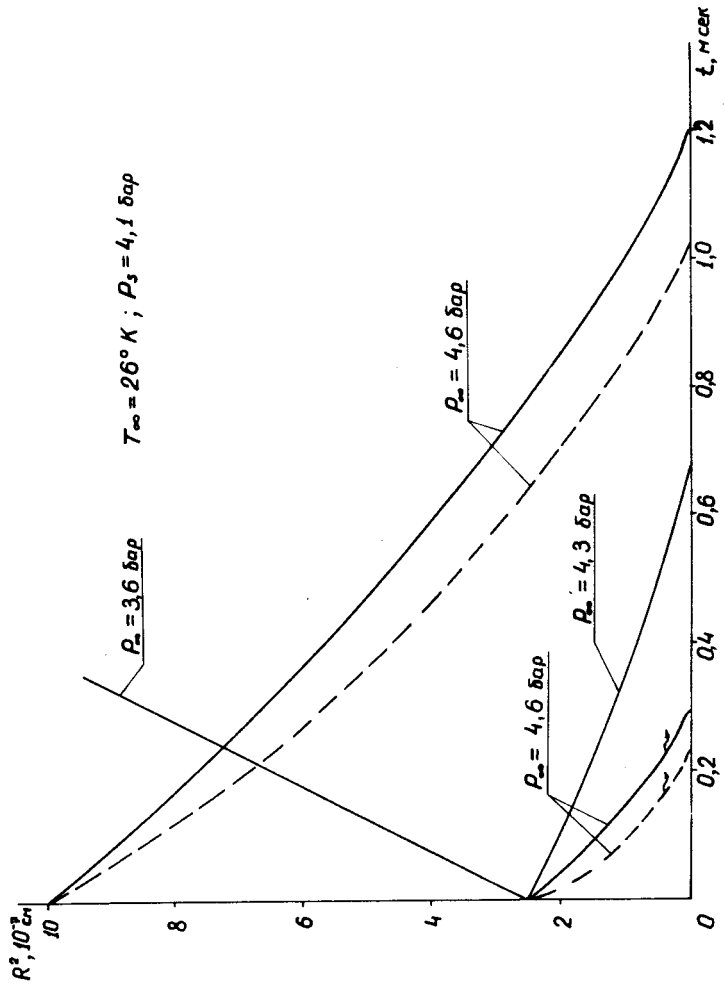


Рис. 1

$$L \frac{dM}{dt} + C_s M \frac{dT'}{dt} = 4 \pi R^2 k \frac{\partial T}{\partial R}, \quad f \quad (18)$$

частным случаем которого является уравнение (9), где M – масса пара в пузырьке. Из различия уравнений (9) и (18) следует, что при рассмотрении поведения пузырька в условиях переменного давления не имеет смысла учитывать зависимость параметра A в формуле (13) от времени. На рис. 2-4 приведены зависимости $R(t)$ и $R_{\infty}(t)$, соответствующие экспериментальным результатам/8/. На основании имеющихся данных об условиях измерений кривая $P_{\infty}(t)$ аппроксимировалась следующим образом

$$P_{\infty}(t) = \begin{cases} P_{min} + at^2, & 0 < t < t^* \\ P_{max} - b(t - t_{max})^2, & t^* < t < t_{max} \\ P_{max}, & t_{max} < t, \end{cases} \quad (19)$$

где P_{min} – минимальное давление в пузырьковой камере, при котором происходит образование зародышевых пузырьков заряженными частицами, P_{max} – максимальное давление, при котором происходит коллапс пузырька и которое достигается в момент времени t_{max} . Параметры a, b и t^* вычислялись из условия непрерывности функции $P_{\infty}(t)$ и ее первой производной, при этом принималось во внимание условие $P(t_s) = P_s$, где t_s – известный момент времени.

Как видно из рис. 2-4, теоретические кривые удовлетворительно описывают рост и коллапс пузырька. Существовавшее ранее разногласие/8/ между наблюдаемой и теоретически предсказуемой скоростью коллапса пузырька объясняется, по-видимому, тем, что на захлопывание пузырька влияет вид температурного распределения, которое сформировалось при росте пузырька в перегретой жидкости. Из рис. 5 видно, что в течение длительного времени после t_{max} характер температурного распределения существенно отличается от обычно используемого при расче-

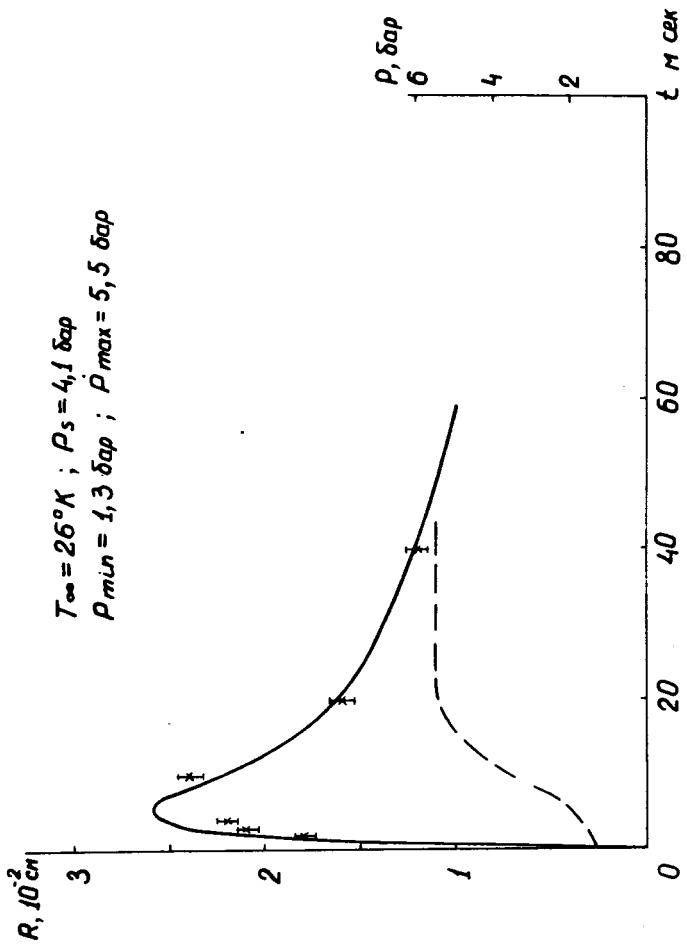


Рис. 2

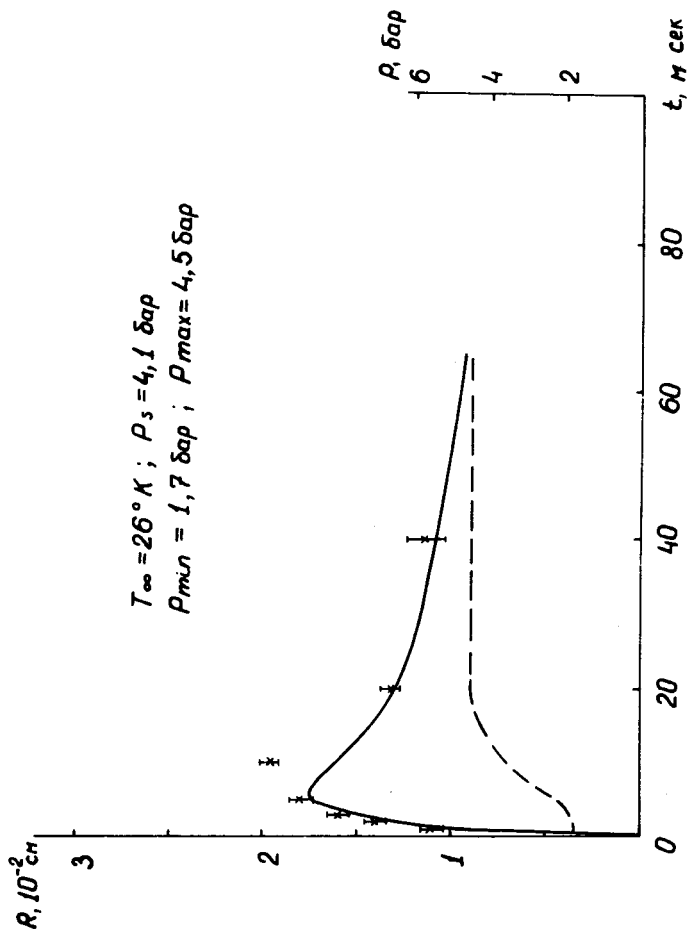


Рис. 3

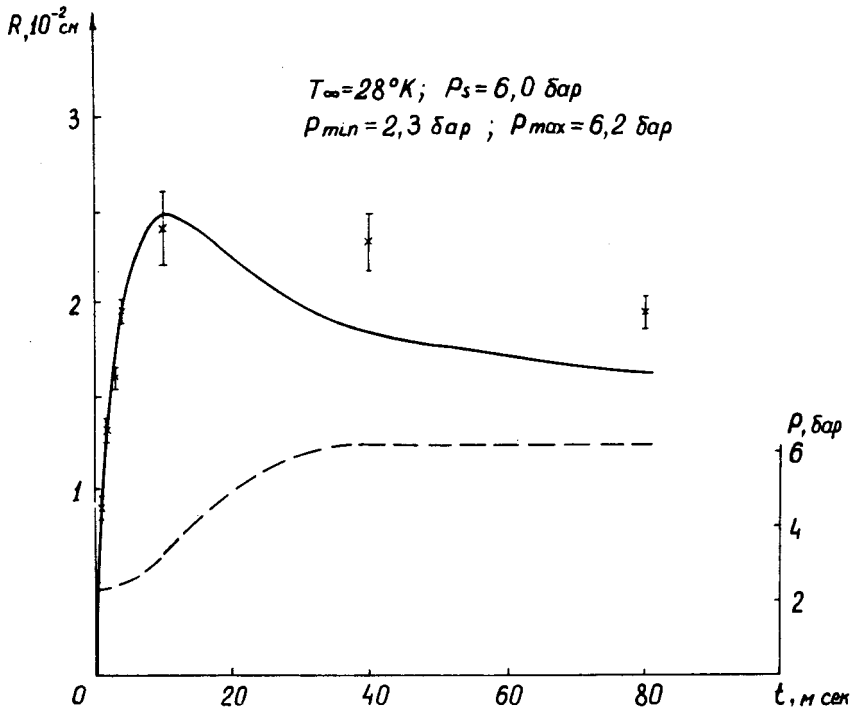


Рис. 4

тах. Скорость коллапса пузырька, соответствующая асимптотическому температурному распределению, существенно меньше, чем в момент времени t_{max} . Наблюдаемое различие в расчетном и реальном поведении пузырька связано, по-видимому, с тем, что формулы (14) и (19) лишь приближенно соответствуют фактическому начальному температурному распределению и изменению давления в жидкости. Не учитывалось также всплывание пузырька.

4. Рассмотрим поведение парового пузырька при изменяющемся давлении в жидкости применительно к резонансным пузырьковым камерам/15/. Характерные частоты для таких камер составляют десятки герц, причем их основной параметр – цикличность – в значительной мере определяется динамикой роста и коллапса пузырька.

На рис. 6 приведены зависимости $R(t)$ для частот 100, 50 и 25 гц, рассчитанные в предположении, что давление в жидкости изменяется по закону $P_{\infty} = P_0 - P_1 \sin \omega t$ и что пузырек образуется при минимальном давлении, когда фаза равна $\pi/2$. Видно, что при фиксированной амплитуде переменного давления P_1 минимальный радиус пузырька, т.е. в конце стадии коллапса, растет по мере уменьшения частоты. Аналогичным образом ведет себя и максимальный радиус пузырька. Чтобы пузырек достигал видимых размеров и успевал захлопываться до начала следующего цикла, достаточно увеличить статическое давление и амплитуду переменного давления.

5. Исследуя динамику парового пузырька в ультразвуковом поле, можно убедиться, что в полупериоде сжатия, когда $P_{\infty} > P_s$, возникают пульсации на собственной частоте, которые затухают в полупериоде растяжения, когда $P_{\infty} < P_s$ /11/. Причину самовозбуждения собственных пульсаций (автоколебаний) можно понять в терминах выпрямленной и статической тепловой диффузии/11-12/. Дело в том, что выпрямленная тепловая диффузия всегда направлена из жидкости в пузырек, т.е. навстречу статической диффузии в случае $P_{\infty} > P_s$. Поэтому при определенных условиях монотонное изменение радиуса пузырька становится неустойчивым и возникают автоколебания.

Поведение пузырька при наличии таких колебаний существенным образом зависит от инерции жидкости, поэтому необходимо рассматривать

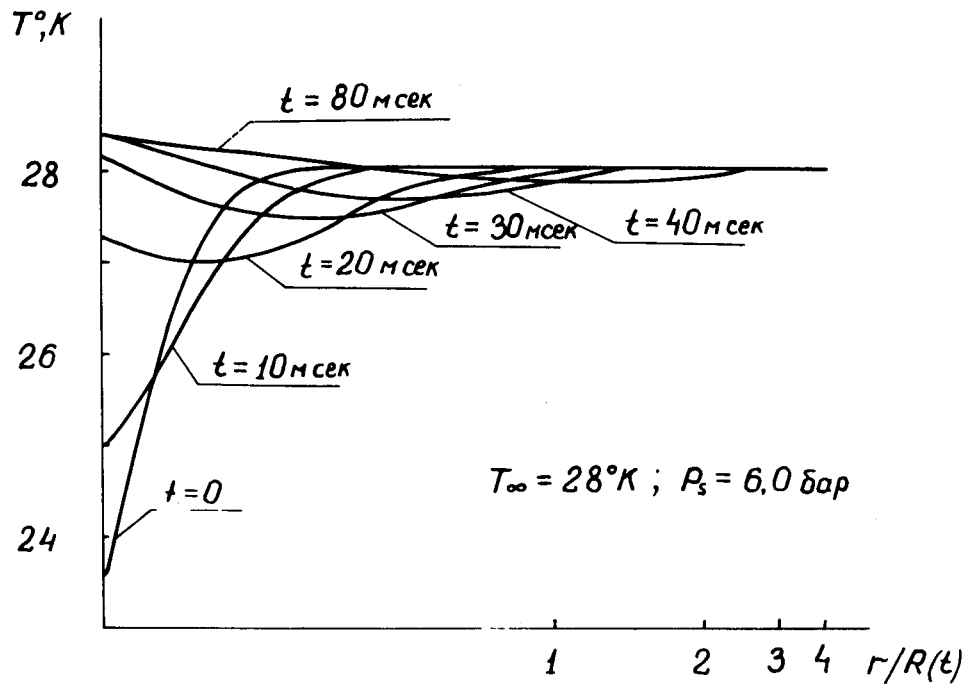


Рис. 5. Температурные распределения в жидкости $T(r, t)$ в разные моменты времени, соответствующие поведению пузырька, представленному на рис. 4.

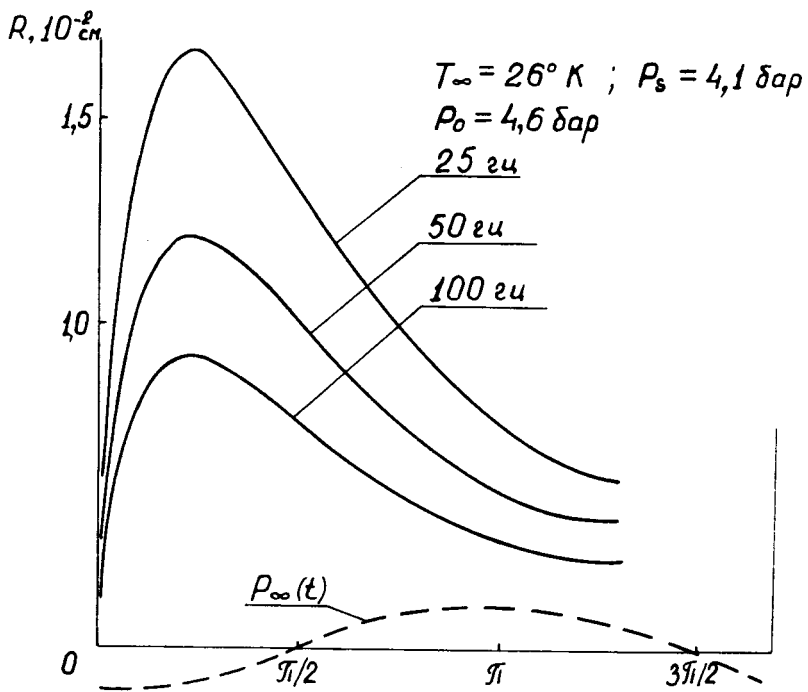


Рис. 6.

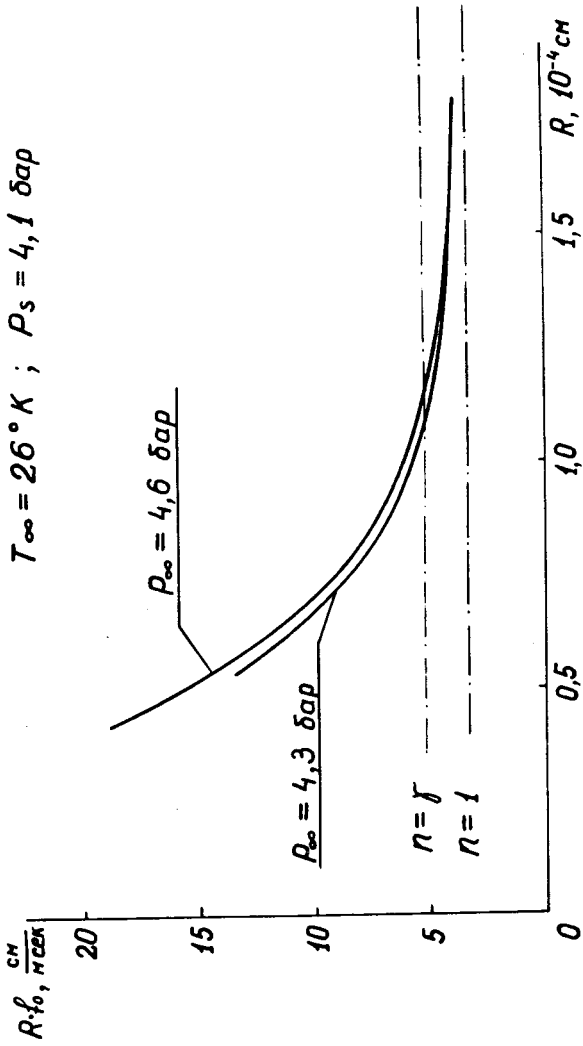


Рис. 7.

всю совокупность уравнений (2)–(5) и (8).¹ Анализируя численные решения, можно видеть, что возбужденные каким-либо образом собственные пульсации пузырька затухают, если его радиус достаточно велик. По мере уменьшения пузырька относительная роль выпрямленной диффузии возрастает, так как она обусловлена кривизной поверхности пузырька, поэтому в ходе коллапса возникают благоприятные условия для развития устойчивых автоколебаний, амплитуда которых мала.

На рис. 1 стрелками указаны значения радиуса пузырька, при которых происходит самовозбуждение автоколебаний. На рис. 7 видно, что при учете тепло- и массообмена с окружающей жидкостью значения собственных частот отличаются от соответствующих значений определяемых формулой (6)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R} \left(n \frac{3P_\infty}{\rho} \right)^{1/2}, \quad (20)$$

где n – постоянная, равная отношению теплоемкостей пара $\gamma = C_p/C_v$ при адиабатических пульсациях пузырька и равная 1 при изотермических пульсациях. Отклонение тем больше, чем меньше пузырек и, следовательно, чем существеннее относительная роль тепло- и массообмена через его поверхность по сравнению с объемными факторами.

В связи с тем, что в случае $P_\infty > P_s$ возбуждаются автоколебания, приводящие к выпрямленной диффузии из жидкости в пузырек, время жизни такого пузырька увеличивается. Возникает вопрос, не существуют ли такие значения термодинамических параметров P_∞ и T_∞ , при которых время жизни пузырька становится бесконечно большим из-за того, что статическая и выпрямленная диффузия уравновешивают друг друга. Поверхностное натяжение σ увеличивает давление и температуру пара, вследствие чего усиливается статическая тепловая диффузия, поэтому стабильные пузырьки следует искать прежде всего в окрестности критической точки, где σ мало. Из приведенных на рис. 8 кривых нельзя заключить, что такие пузырьки существуют. Если бы при $P_\infty > P_s$ было возможно существование стабильных пузырьков, средний радиус которых $\bar{R}_\infty > R_0$, то начальный пузырек должен был бы увеличиваться в результате выпрямленной диффузии, стремясь к устойчивому состоянию. Напротив, сравнивая кривые

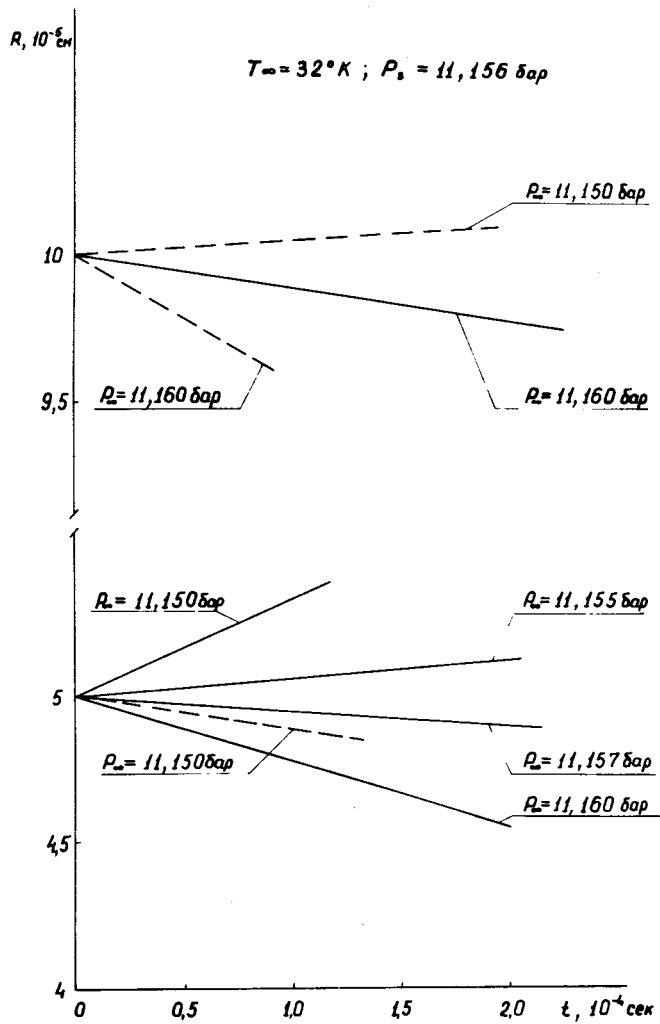


Рис. 8. Усредненная по собственным пульсациям зависимость радиуса пузырька от времени. Пунктирные кривые соответствуют реальным значениям σ , сплошные – идеализированному случаю, когда $\sigma \equiv 0$.

для $R_0 = 1 \cdot 10^{-4}$ см и $R_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ см, видим, что чем меньше радиус пузырька, тем быстрее он захлопывается при $P_\infty > P_s$ или тем быстрее он растет при $P_\infty < P_s$.

Полученные данные не исключают существования стабильных пузырьков, если область стабильности достаточно узка: $0 < P_\infty - P_s < 0,01$ бар или имеется ограничение на величину $|R_0 - \bar{R}_\infty|$. Допускает ли исходная система уравнений в принципе существование стабильных пузырьков, совершающих автоколебания? Предположим, что такие пузырьки существуют, т.е.

$$R(t) = \bar{R}_\infty (1 + \delta \sin \omega_0 t), \quad (21)$$

где δ и ω_0 - амплитуда и частота собственных пульсаций. Из численных расчетов следует, что $\delta \ll 1$. При этом отдельные члены в уравнениях можно разложить в ряд по степеням малого параметра δ . Рассмотрим уравнения, получающиеся в нулевом и первом приближениях. Зависимость $P'(t)$ ищем в виде

$$P'(t) = \bar{P}' [1 + \delta \Phi(\omega_0 t)], \quad (22)$$

где \bar{P}' - не зависящее от времени среднее значение давления пара в пузырьке. Из уравнений (3), (4) следует, что

$$\bar{P}' - P_\infty = 2\sigma / \bar{R}_\infty, \quad (23)$$

$$\Phi(\omega_0 t) = \frac{A}{\bar{P}'} \sin \omega_0 t, \quad (24)$$

$$U_R = - (A + 2\sigma / \bar{R}_\infty) \delta \cos \omega_0 t / (\rho \bar{R}_\infty \omega_0), \quad (25)$$

где

$$A = \frac{\rho - \rho' + 2\sigma / (\bar{R}_\infty^3 \omega_0^2)}{\frac{1}{3} d\rho' / dP' - 1 / (\bar{R}_\infty^2 \omega_0^2)}. \quad (26)$$

Подставляя (21), (22) и (23) в уравнение (5), получаем

$$\frac{\partial T}{\partial R} = \delta \omega_0 \bar{R}_\infty B \cos \omega_0 t, \quad (27)$$

где параметр B не зависит от времени. В уравнении теплопроводности (8), выбирая в качестве независимых переменных $\nu = \frac{R}{r}$ и $\tau = \omega_0 t$, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \nu(1 - \alpha \nu^3) \delta \cos \tau \frac{\partial T}{\partial \nu} = \nu^4 \beta (1 - 2 \delta \sin \tau) \frac{\partial^2 T}{\partial \nu^2}, \quad (28)$$

где

$$\alpha = -(A + 2\sigma / \bar{R}_\infty) / (\rho \bar{R}_\infty^2 \omega_0^2), \quad \beta = \frac{D}{\bar{R}_\infty^2 \omega_0}.$$

Решение этого уравнения естественно искать также в виде ряда

$$T(\nu, \tau) = T_0(\nu, \tau) + \delta T_1(\nu, \tau). \quad (29)$$

Граничные условия также следует разложить в ряд. При этом уравнение (28) распадается на систему двух уравнений с соответствующими граничными условиями

$$\frac{\partial T_0}{\partial \tau} = \beta \nu^4 \frac{\partial^2 T_0}{\partial \nu^2} \quad (30)$$

$$T_0(\nu = 1, \tau) = T'(P'), \quad T_0(\nu = 0, \tau) = T_\infty$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \nu(1 - \alpha \nu^3) \cos \tau \frac{\partial T_0}{\partial \nu} = \nu^4 \beta \left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial \nu^2} - 2 \sin \tau \frac{\partial^2 T_0}{\partial \nu^2} \right]$$

$$T_1(\nu = 1, \tau) = \frac{\partial T'(P')}{dP'} A \sin \tau, \quad T_1(\nu = 0, \tau) = 0. \quad (31)$$

Удовлетворяющее граничным условиям асимптотическое решение уравнения (30) имеет вид

$$T_0(\nu, r) = T_\infty + [T'(\overline{P'}) - T_\infty]\nu. \quad f \quad (32)$$

Отсюда следует, что

$$\left. \frac{\partial T_0(\nu, r)}{\partial \nu} \right|_{\nu=1} = T'(\overline{P'}) - T_\infty. \quad (33)$$

Разлагая левую часть уравнения (27) по степеням δ , получаем

$$\left. \frac{\partial T_0(\nu, r)}{\partial \nu} \right|_{\nu=1} = 0. \quad (34)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (33) и (34) исключают друг друга.

Действительно, из соотношений (7) и (23) получаем

$$T'(\overline{P'}) = T'(P_\infty + \frac{2\sigma}{R_\infty}) = f(P_\infty + \frac{2\sigma}{R_\infty} \cdot \frac{\rho}{\rho - \rho'}), \quad (35)$$

поэтому

$$T'(\overline{P'}) - T_\infty = \frac{df(P_s)}{dP} (P_\infty - P_s + \frac{2\sigma}{R_\infty} \cdot \frac{\rho}{\rho - \rho'}) > 0. \quad (36)$$

Неравенство следует из условия $P_\infty > P_s$. Этот вывод не изменится и в идеализированном случае, когда поверхностное натяжение жидкости считается равным нулю.

Несовместимость равенств (33) и (34) означает, что в рамках данного подхода предположение о существовании в объеме жидкости стабильных пузырьков, пульсирующих на собственной частоте, не оправдано.

В заключение авторы благодарят В.А. Жукова, Г.И. Селиванова и А.И. Филиппова за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. M.S. Plesset, S.A. Zwick. Journ.Appl.Phys., 23, 95 (1952); 25, 493 (1954); Journ.Math.Phys., 32, 308, (1955).
2. P.S. Epstein, M.S. Plesset. Journ.Chem.Phys., 18, 1505 (1950).

3. L.E. Scriven. Chem,Eng.Sci., 10, 1 (1959).
4. G. Birkhoff, R.S. Margulies, W.A. Horning. Phys.Fluids, 1, 201(1958).
5. Л.Г. Ткачев. Препринт ОИЯИ, P13-3726, Дубна, 1968.
6. Г. Флинн. Физическая акустика (под редакцией У. Мезона), 1Б, М, 1967.
7. P. Dergarabedian. Journ.Appl.Mech., 75, 537 (1953).
8. G Harigel, G. Horlitz, S. Wolff. Preprint DESY 67/14 (1967).
9. D.Y. Hsieh, M.S. Plesset, JASA, 33, 206 (1961).
10. A. Eller, H.G. Flinn. JASA, 37, 493 (1965).
11. В.А. Акуличев, В.Н. Алексеев, В.Н. Наугольных, Л.Г. Ткачев, В.Д. Шестаков. Сообщение ОИЯИ, P13-5327, Дубна, 1970.
12. Л.Г. Ткачев, В.Д. Шестаков. Препринт ОИЯИ, P13-6751, Дубна, 1971.
13. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Статистическая физика. М., 1964.
14. L. Reyjeigh. Phyl.Magazine, 34, 94 (1917).
15. H. Barney, A. Rogers and S.J.St. Loront. Nucl.Instr. & Meth., 74, 345 (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел
17 сентября 1971 года.