

СЗУУ.1з

3-895

23/11-71

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2880/2-71

P13-5868



В.П. Зрелов, Г. Шулекова, П. Шулек

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

РАСЧЕТ АХРОМАТИЧЕСКИХ ПРИЗМ  
В СЧЕТЧИКАХ ЧЕРЕНКОВА

1971

P13-5868

В.П. Зрелов, Г. Шулекова\*, П. Шулек\*

РАСЧЕТ АХРОМАТИЧЕСКИХ ПРИЗМ  
В СЧЕТЧИКАХ ЧЕРЕНКОВА

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

\* Постоянный адрес: кафедра ядерной физики Университета  
им. Коменского, Братислава (ЧССР).

## Введение

Для улучшения разрешающей способности дифференциальных счетчиков Черенкова, используемых на ускорителях в сотни Гэв, в ряде случаев необходима компенсация дисперсии радиатора с помощью ахроматической системы /1/. Условия ахроматизации излучения в счетчиках Черенкова с помощью преломления и отражения на границе раздела различных сред рассмотрел Франк /2/.

В работе /3/ приведен расчет апохроматического дублета призм в счетчиках Черенкова. Апохроматическая система из двух кольцевых призм позволяет достичь очень хорошей компенсации дисперсии радиатора. Однако ввиду сложности изготовления и высокой стоимости такой системы желательно избежать ее использования. В некоторых случаях может оказаться вполне достаточным применение одной кольцевой призмы с двумя или даже только с одной конической гранью (вторая грань плоская). Параметры такой призмы можно выбрать таким образом, чтобы система была ахроматической.

В настоящей работе рассмотрены способы расчета ахроматических кольцевых призм, которые позволяют вывести излучение Вавилова-Черенкова для двух разных длин волн в одном и том же направлении. В приложениях I и II приведены алгоритмы рассмотренных расчетов, оформленные в виде процедур на языке **ALGOL-60**.

## 1. Призма с двумя коническими гранями

Рассмотрим оптическую призму, через которую проходит излучение Вавилова-Черенкова, возникающее в некотором твердом радиаторе (рис. 1).

Грань радиатора, через которую выходит излучение, предполагается расположенной перпендикулярно оптической оси системы  $OO'$ , совпадающей с направлением движения частицы. Абсолютные показатели преломления элементов системы обозначим следующим образом: радиатора -  $n_1$ , окружающего газа -  $n_2$ , призмы -  $n_3$ .

Расположение преломляющих граней ахроматической призмы будем определять углами  $V_1$  и  $V_2$ . Угол  $V_1$  образован первой преломляющей гранью с оптической осью счетчика, и его отсчет производится от оси, направленной в сторону движения частиц, угол  $V_2$  образован первой и второй преломляющими гранями, и отсчет его производится внутри призмы от первой ко второй грани. Углы падения и преломления отсчитываются относительно соответствующих нормалей падения. Направление луча после выхода из призмы задано углом  $\nu$ , который отсчитывается от оптической оси системы. При этом знак любого угла примем отрицательным, если его отсчет производится по часовой стрелке и положительным - в обратном случае.

Из рис. 1 видно, что

$$\begin{aligned}x &= r - V_1, \\y &= \gamma - V_2.\end{aligned}\tag{1}$$

Если заряженная частица движется со скоростью  $\beta > \frac{1}{n_1}$ , то в радиаторе возникает конус излучения Вавилова-Черенкова с половиной угла  $\theta = \arccos 1/n_1 \beta$ . Из радиатора излучение с определенной длиной волны  $\lambda_0$  выходит под углом

$$r = \arcsin \frac{\sqrt{\beta^2 n_1^2 - 1}}{\beta n_2}.\tag{2}$$

Угол выхода излучения с другой длиной волны отличается от значения  $r$  на величину

$$\Delta r = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 n_2^2 - (\beta^2 n_1^2 - 1)}} \left( \frac{\Delta n_1}{n_1} \frac{\beta^2 n_1^2}{\sqrt{\beta^2 n_1^2 - 1}} - \frac{\Delta n_2}{n_2} \sqrt{\beta^2 n_1^2 - 1} \right), \quad (3)$$

где  $\Delta n_1$  и  $\Delta n_2$  - разности в показателях преломления соответственно радиатора и окружающей среды для одинакового диапазона волн  $\Delta \lambda$ .

Запишем законы преломления на гранях призмы:

$$n_2 \cos x = n_3 \sin \gamma, \quad (4)$$

$$n_3 \sin \gamma = n_2 \cos (x + \gamma - R), \quad (5)$$

где  $R = r + \gamma - \nu$ . В уравнении (5)  $r$  определяется скоростью частицы согласно (2),  $\nu$  - наперед заданное направление лучей после призмы,  $\gamma$  исключается при помощи уравнения (4). В результате в уравнении (5) остаются неизвестными углы  $V_1$  и  $V_2$ , которые могут быть определены из дополнительного уравнения, выражающего условие ахроматизации: одинаковый угол  $\nu$  для двух разных длин волн, т.е.  $\Delta \nu_{\lambda_1, \lambda_2} = 0$ . Тогда из (5) получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta \gamma}{\frac{\Delta n_2}{n_2} - \frac{\Delta n_3}{n_3}}, \quad (6)$$

где

$$\Delta \gamma = \frac{\left( \frac{\Delta n_2}{n_2} - \frac{\Delta n_3}{n_3} \right) \cos (r - V_1) - \sin (r - V_1) \Delta r}{\sqrt{\left( \frac{n_3}{n_2} \right)^2 - \cos^2 x}}, \quad (7)$$

а  $\Delta n_2$  и  $\Delta n_3$  - изменения  $n_2$  и  $n_3$  в диапазоне  $\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ . Из уравнений (4) и (5) можно получить:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos (x - R)}{\frac{n_3}{n_2} + \sin (x - R)}. \quad (8)$$

Сравнивая правые стороны уравнений (6) и (8), получим уравнение для величины  $x$  :

$$\left( \cos x - \frac{\Delta r}{\frac{\Delta n_2}{n_2} - \frac{\Delta n_3}{n_3}} \sin x \right) \left[ \frac{n_3}{n_2} + \sin(x-R) \right] - \sqrt{\left( \frac{n_3}{n_2} \right)^2 - \cos^2 x - \cos(x-R)} = 0. \quad (9)$$

Решая уравнения (10) в промежутке  $-\pi < x < 0$ , определим  $x$ , а подставив его в (8), определим  $y$ . Используя уравнения (1), получим  $V_1$  и  $V_2$ .

Результаты расчетов по формулам (8) и (9) будут правильными при соблюдении следующих условий:

1.  $\frac{\Delta n_2}{n_2} \neq \frac{\Delta n_3}{n_3}$  ;
2.  $|\sin y| < \frac{n_2}{n_3}$  ;
3.  $\sin(V_1 + V_2) > \sin(\nu)$  - если значение углов  $(V_1 + V_2)$  лежит в первой четверти,
4.  $\sin(V_1 + V_2) > -\sin(\nu)$  - если значение углов  $(V_1 + V_2)$  лежит во второй четверти.

Заметим, что приведенные здесь формулы можно применить и к газовым счетчикам при условии  $n_1 = n_2$ .

В приложении I содержится алгоритм нахождения значений углов  $V_1$ ,  $V_2$ , определяющих ахроматическую призму. Алгоритм оформлен в виде процедуры "ACHROMAT" на языке ALGOL - 60, которая была проверена на вычислительной машине CDC 1604A.

## // . Призма с передней гранью, перпендикулярной пучку частиц

Видоизменим выше рассмотренную систему таким образом, чтобы передняя грань призмы была плоской и параллельной выпускной грани радиатора (т.е. перпендикулярной оптической оси системы  $OO'$  - направлению пучка частиц, - рис.2). Ход луча излучения Вавилова-Черенкова в такой системе определен следующими формулами

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n_1},$$

$$n_1 \sin \theta = n_3 \sin \gamma,$$

(10)

$$n_3 \sin (V - \gamma) = n_2 \sin (V - \nu).$$

Это система трех уравнений с четырьмя неизвестными углами:  $\theta$ ,  $\gamma$ ,  $V$ ,  $\nu$ . Условие ахроматизации системы для двух разных длин волн ( $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ )  $\Delta \nu_{\lambda_1, \lambda_2} = 0$  дает еще одно недостающее уравнение, связывающее 4 неизвестных величины:  $\theta$ ,  $\gamma$ ,  $V$  и  $\nu$ . Значения абсолютных показателей преломления  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ , а также скорости частицы  $\beta$  считаем заданными. Таким образом, упрощение оптической системы, т.е. введение плоской передней входной грани ахроматической призмы, перпендикулярной пучку частиц, достигается по сравнению с общей системой ценой утраты возможности заранее задаваться направлением выхода излучения из призмы.

Уравнение, выражающее условие ахроматизации оптической системы, получается дифференцированием последней формулы в системе уравнений (10) и наложением условия  $\Delta \nu = 0$ :

$$\frac{1}{\sin^2 (V - \nu)} = \left[ \left( \frac{\frac{\Delta n_3}{n_3} - \frac{\Delta n_2}{n_2}}{\Delta \gamma} \right)^2 + 1 \right] \left( \frac{n_2}{n_3} \right)^2. \quad (11)$$

Из первых двух формул в системе (10) получается выражение для  $\Delta \gamma$ :

$$\Delta \gamma = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 n_3^2 - (\beta^2 n_1^2 - 1)}} \left( \Delta n_1 \frac{\beta n_1}{\sqrt{\beta^2 n_1^2 - 1}} - \Delta n_3 \frac{\sqrt{\beta^2 n_1^2 - 1}}{\beta n_3} \right). \quad (12)$$

Решая систему (10), можно найти выражение для  $\sin^{-1}(V - \nu)$ . Подставив его в уравнение (11), получим уравнение только с одним неизвестным,  $V$ :

$$(\cos 2V)_{1,2} = \frac{(Q-P)(Q-R) \pm \sqrt{RP(2Q-P)(2Q-R)}}{Q^2}. \quad (13)$$

При этом были введены следующие обозначения:

$$Q = \frac{n_3^2}{2n_2^2}, \quad T = \frac{\Delta n_2}{n_2},$$

$$R = \frac{\beta^2 n_1^2 - 1}{\beta^2 n_2^2}, \quad U = \frac{\Delta n_3}{n_3},$$

$$S = \frac{n_1 \Delta n_1}{n_2^2}, \quad P = \frac{2Q(\Delta \gamma)^2}{(U-T)^2 + (\Delta \gamma)^2}.$$

В результате выражение (12) принимает вид

$$\Delta \gamma = \frac{(S-UR)^2}{(2Q-R)R}. \quad (14)$$

Значения  $\cos 2V$ , вычисленные по формуле (13), будут всегда реальными, если  $\beta^2 n_2^2 > \beta^2 n_1^2 - 1$  (т.е. излучение не испытывает полного внутреннего отражения на выпускной грани радиатора).

Угол выхода излучения из призмы относительно оптической оси системы вычисляется по формуле

$$\nu = V - \arcsin \sqrt{P}. \quad (15)$$

Во избежание полного внутреннего отражения излучения выпускной гранью призмы должно выполняться условие

$$\left( \frac{\Delta n_3}{n_3} - \frac{\Delta n_2}{n_2} \right)^2 > \left[ \left( \frac{n_3}{n_2} \right)^2 - 1 \right] (\Delta \gamma)^2.$$

В приложении II содержится алгоритм нахождения преломляющего угла призмы  $V$  и угла  $\nu$ , определяющего направление излучения после выхода его из призмы. Так же, как и в пункте 1, алгоритм оформлен в виде процедуры "PERACHROM" на языке ALGOL-60, которая проверялась на вычислительной машине CDC-1604A.

#### Литература

1. В.П. Зрелов. Излучение Вавилова-Черенкова и его применение в физике высоких энергий, ч. II, стр. 127, Москва, 1968.
2. И.М. Франк. Успехи физ. наук, 58, вып. 1, 111 (1956).



3. В.П. Зрелов, П. Павлович, П. Шулек. Преприит ОИЯИ, P13-3488, Дубна, 1967.
4. М.И. Агеев, В.П. Алик, Р.М. Галис. Алгоритмы (1-50). Вычислительный центр АН СССР, Москва, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел  
14 июня 1971 года.

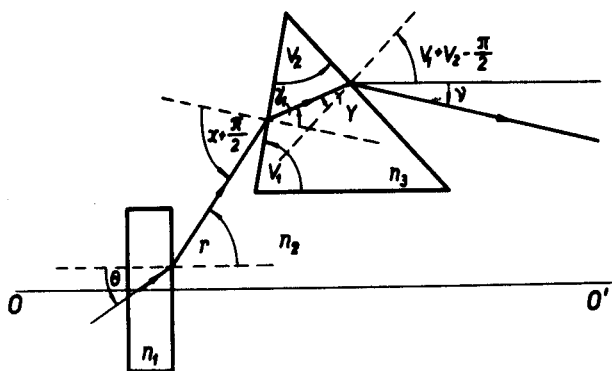


Рис. 1. Схема хода лучей в оптической системе, содержащей призму с двумя коническими поверхностями.

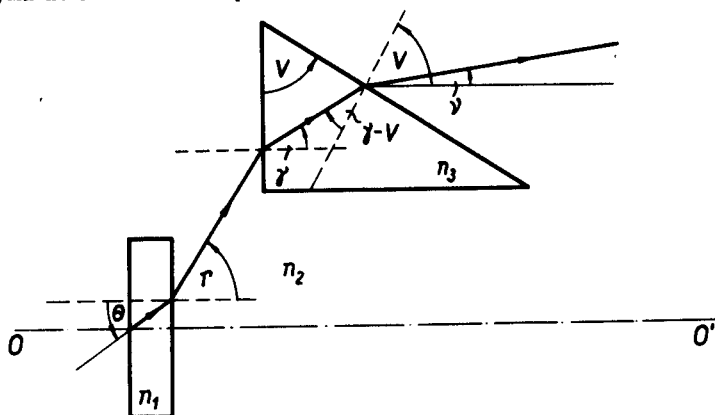


Рис. 2. Схема хода лучей в оптической системе, содержащей призму с плоской гранью, перпендикулярной оси системы  $OO'$  (или направлению пучка частиц).

## Приложение I

### Процедура "achromat"

Процедура "achromat" вычисляет значения массивов  $v$ ,  $s$  и  $h$  на основе результатов главы I настоящей работы. Для нахождения корня уравнения (9) используется метод деления интервала пополам (алгоритм 4а в <sup>14/</sup>) с предварительным разделением промежутка  $(-\pi, 0)$  на 10 участков, причем поиск корней вблизи границ участка опущен. Значения корня  $x$  вычисляются с погрешностью, меньшей чем  $10^{-6}$ . Процедура заканчивает работу, если

1. нет перемены знака на концах всех 10 участков промежутка  $(-\pi, 0)$  - осуществляется выход на метку `onesign` ;
2. в радиаторе или рассчитываемой призме происходит полное внутреннее отражение хотя бы для одной длины волны - выход на метку `totref` ;
3. луч для некоторой из длин волны не падает на призму (соответствующее  $r_i \geq V_i$ ) - выход на метку `nofall` ;
4. не выполнены ограничения I или 3, перечисленные в конце главы I - выход на метку `limit` ;
5. задача решена.

Идентификаторы формальных параметров процедуры :

#### array

	$n$ [1:6]		$s$ [1:4]
$n$ [1]	- $n_1$	$s$ [1]	- $r_{\lambda_1}$
$n$ [2]	- $\Delta n_1$	$s$ [2]	- $r_{\lambda_2}$
$n$ [3]	- $n_2$	$s$ [3]	- $v_{\lambda_1}$
$n$ [4]	- $\Delta n_2$	$s$ [4]	- $v_{\lambda_2}$
$n$ [5]	- $n_3$		
$n$ [6]	- $\Delta n_3$		
			$v$ [1:2]
		$v$ [1]	- $V_1$
		$v$ [2]	- $V_2$
	$h$ [1:5]		
$h$ [1]	- $d\gamma/dr$		
$h$ [2]	- $d\beta/dr$		
$h$ [3]	- $d\beta/dv$		
$h$ [4]	- $\frac{1}{h_1} \frac{\Delta v}{\Delta r}$	( мера ахроматизации системы, причем $\Delta r(\Delta v)$ - разности в значениях угла $r(v)$ для лучей с рассматриваемыми длинами волн);	
$h$ [5]	- $\Delta\beta$	- разность в скорости частицы, соответствующая расходимости $\Delta v$ лучей с рассматриваемыми длинами волн $\lambda_1$ и $\lambda_2$ после призмы.	

real

b -  $\beta$

ni -  $\nu$

Идентификаторы, локализованные в теле процедуры :

array

	m [1:3]	
m [1]	- $n_1$	значения абсолютных показателей преломления для длин волн $\lambda_1, \lambda_2$ .
m [2]	- $n_2$	
m [3]	- $n_3$	

real

pi	- $\pi$	p	-	} границы проме- жутка, содержа- щего корень уравнения $f = 0$ ;
bn1	- $\beta^2 n_1^2$	q	-	
bn2	- $\beta n_2$			
root1	- $\sqrt{\beta^2 n_1^2 - 1}$	f	-	} значения левой стороны в урав- нении (9);
root2	- $\sqrt{\beta^2 n_2^2 - \beta^2 n_1^2 + 1}$	g	-	
dr	- $\frac{\Delta r}{\frac{\Delta n_2}{n_2} - \frac{\Delta n_1}{n_1}}$	x	- x	
dn2	- $\frac{\Delta n_2}{n_2}$	er	- R	
	$\frac{n_2}{n_2}$	g1	- $\gamma_1$	
u	- $\frac{n_2}{n_2}$	y	- Y	
	$\frac{n_2}{n_2}$	r	- r	
sum	- $V_1 + V_2$	o	- $\nu - (V_1 + V_2) + \frac{\pi}{2}$	

real procedure

ar(q) - вычисляет значения угла ar в диапазоне от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ , для которого  $\sin(ar)=q$ .

procedure

rep(p,q) - вычисляет значения угла p в диапазоне от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ , для которого  $\sin(p)=q$ , с выходом на метку totref, если  $q \geq 1$ ;

fun(a) - вычисляет значение "a" левой стороны уравнения (9) и переменной y для текущего значения переменной x с выходом на метку no, если значение "a" на этом месте не определено.

```

procedure achromat(b,ni,n,v,s,h,onesign,totref,nofall,limit);
  value b,ni; real b,ni; array n,v,s,h;
  label onesign,totref,nofall,limit;
begin real pi,bn1,bn2,root1,root2,dr,dn2,q,x,er,g1,r,u,y,p,o,f,
  g,sum; integer i,j; array m [1:3] ;
  real procedure ar(q); value q; real p,q;
    ar:=arctan(q/sqrt(1-q2));
  procedure rep(p,q); value p; real p,q;
    if abs(p) > 1 then go to totref else q:=ar(p);
  procedure fun(a); real a;
    begin real cs;
      cs:=cos(x);
      g1:=ar(cs/u);
      er:=r+g1-ni;
      a:=sqrt(u2-cs2) x cos(x-er)-(u+sin(x-er)) x (cs-dr x
        sin(x));
      if abs(a) < 10-10 then go to fin
    end fun;
  pi:=3.141593;
  u:=n [ 5 ] /n [ 3 ] ;
  bn1:=(b x n [ 1 ] )2; bn2:=b x n [ 3 ] ;
  root1:=sqrt(bn1-1); root2:=sqrt(bn22-bn1+1);
  r:=arctan(root1/root2);
  dr:=(n [ 2 ] x bn1/(n [ 1 ] x root1)-dn2 x root1)/((dn2-n [ 6 ] /
    n [ 5 ] ) x root2);
  p:=-.1; x:=p; fun(f);
  for i:=1 step 1 until 10 do
    begin
      x:=-0.3 x i; fun(g);
      q:=p; p:=x;
      if sign(g)=sign(f) then go to no;
    end

```

```

iter: x:=p/2+q/2; fun(g);
      if sign(g)=sign(f) then q:=x else p:=x;
      if abs(p-q) ≥ 10-6 then go to iter;
fin:  y:=arctan(cos(x-er)/(u+sin(x-er)));
      if abs(sin(y)) ≥ 1/u then go to totref;
      v [ 1 ] :=r-x; v [ 2 ] :=g1-y;
      sum:=v [ 1 ] +v [ 2 ] ;
      if sum>pi/2 then go to con;
      if sin(sum) ≤ sin(n1) then go to limit; go to rip;
con:  if sin(sum) ≤ -sin(n1) then go to limit;
rip:  h [ 1 ] :=sin(x) × cos(y)/(cos(g1) × sin(n1-sum));
      h [ 2 ] :=bn2 × cos(r) × root1 × b;
      h [ 3 ] :=h [ 2 ] /h [ 1 ] ;
      for j:=1,2 do
          begin
              for i:=1,2,3 do m [ i ] :=n [ 2 × i -1 ] +(j-1) × n [ 2 × i ] ;
              rep(sqrt((b × m [ 1 ] )2-1)/(b × m [ 2 ] ),s [ j ] );
              if s [ j ] ≥ v [ 1 ] then go to nofall;
              g1:=ar(m [ 2 ] × cos(s [ j ] -v [ 1 ] )/m [ 3 ] );
              rep(m [ 3 ] × sin(g1-v [ 2 ] )/m [ 2 ] ,o);
              s [ j+2 ] :=sum+o-pi/2
          end j;
      h [ 4 ] :=abs((s [ 4 ] -s [ 3 ] )/(h [ 1 ] × (s [ 2 ] -s [ 1 ] )));
      h [ 5 ] :=(s [ 4 ] -s [ 3 ] ) × h [ 2 ] /h [ 1 ] ;
      go to solved;
no:   end;
      go to onesign;
solved: end achromat;

```

## Приложение II

### Процедура "perachrom"

Процедура "perachrom" вычисляет значения переменной  $v$  и массивов  $s$  и  $h$  на основе формул, рассмотренных в главе II настоящей работы. Процедура заканчивает работу, если

1. происходит полное внутреннее отражение излучения на выпускных гранях радиатора или призмы - выход на метку totref;

2. задача решена.

**Примечание.** Переход на метку по в процедуре "perachrom" защищает работу процедуры от случая  $\cos 2A > 1$ . В этом случае соответствующие значения переменных  $v, s$  и  $h$  полагаются равными нулю.

#### Идентификаторы формальных параметров процедуры

##### array

$n$  [1:6] - как в случае процедуры "achromat",  
 $h$  [1:2, 1:5] - но первые индексы в двумерных массивах  
 $s$  [1:2, 1:4] - показывают, относятся ли значения переменной к призме с углом  $V_1$  или к призме с углом  $V_2$ .

$v$  [1:2]  
 $v$  [1] -  $V_1$   
 $v$  [2] -  $V_2$

##### real

$b$  -  $\beta$

#### Идентификаторы, локализованные в теле процедуры

##### real

$q$	$- Q$				
$r$	$- R$		11	$- \beta^2 n_1^2 - 1$	
$s$	$- S$		12	$- \beta^2 n_2^2 - \beta^2 n_1^2 + 1$	
$t$	$- T$		13	$- \beta^2 n_3^2 - \beta^2 n_1^2 + 1$	
$u$	$- U$		$y$	$- \gamma$	
			$z$	$- \sin(\gamma - V)$	

$$\begin{aligned}
 g & - (\Delta \gamma)^2 \\
 d & - (Q-P)(Q-R) \\
 a & - 2A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p & - \frac{P}{\sqrt{RP(2Q-P)(2Q-R)}} \\
 \text{dis} & - \sqrt{RP(2Q-P)(2Q-R)}
 \end{aligned}$$

array

	<u>x</u> [1:2]	<u>m</u> [1:3]
<u>x</u> [1]	- (cos 2V) <sub>1</sub>	<u>m</u> [1] - (n <sub>1</sub> ) <sub>λi</sub>
<u>x</u> [2]	- (cos 2V) <sub>2</sub>	<u>m</u> [2] - (n <sub>2</sub> ) <sub>λi</sub>
		<u>m</u> [3] - (n <sub>3</sub> ) <sub>λi</sub>

```

procedure perachrom(b,n,v,s,h,totref);
  value b; real b; array n,v,s,h; label totref;
begin real q,r,c,t,u,g,p,d,dis,a,l1,l2,l3,y,z);
  integer i,j,k; array m,l [1:3] ,x [1:2] ;
  q:=((n [5] /n [3] )†2)/2;
  r:=((b x n [1] )†2-1)/(b x n [3] )†2;
  if r>1 then go to totref;
  c:=n [1] x n [2] /n [3] †2;
  t:=n [4] /n [3] ; u:=n [6] /n [5] ;
  g:=((c-u x r)†2)/((2 x q-r) x r);
  p:=2 x q x g/((u-t)†2+g);
  if p>=1 then go to totref;
  d:=(q-p) x (q-r); dis:=sqrt(r x p x (2 x q-p) x (2 x q-r));
  x [1] :=(d+dis)/q†2; x [2] :=(d-dis)/q†2;
  for k:=1,2 do
    begin
      if abs(x [k] )>1 then
        begin for i:=1,2,3,4 do s [k,i] :=0; v [k] :=0;
          for i:=1,2,3,4,5 do h [k,i] :=0; go to no end;
        a:=arctan(sqrt(1-x [k] †2)/x [k] );
        if a<0 then a:=a+3.141593;
        v [k] :=a/2;
    end

```

```

for j:=1,2 do
  begin
    for i:=1,2,3 do m [i] :=n [2×i-1] +(j-1)×n [2×i] ;
      l1:=(b×m [1] )†2-1; l2:=(b×m [2])†2-1;
      l3:=(b×m [3] )†2-1;
      s [k,j] :=arctan(sqrt(l1/l2));
      y:=arctan(sqrt(l1/l3));
      z:=m [3] × sin(y-v [k] )/m [2] ;
      s [k,j+2] :=v [k] +arctan(z/sqrt(1-z†2));
      if j=2 then go to fin;
      h [k,1] :=-cos(s [k,j] )× cos(y-v [k] )/(cos(y)×
        sqrt(1-z†2));
      h [k,2] :=b × sqrt(l1/l2);
      h [k,3] :=h [k,2] /h [k,1] ;
    fin:   end j;
      h [k,4] :=(s [k,4] -s [k,3] )/(h [k,1] × (s [k,2] -s [k,1] ));
      h [k,5] :=(s [k,4] -s [k,2] )× h [k,3] ;
    no:   end k;
  end perachrom;

```