

СЗ44,4

К-84

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

2545/1-71



P 13 - 5848

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

В.И. Круглякова , В.М. Мальков , И. Полах,  
Л.В. Слепнева , А.И. Филиппов

СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ  
ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

1971

P13 - 5848

В.И. Круглякова\*, В.М. Мальков\*, И. Полах,  
Л.В. Слепнева\*, А.И. Филиппов

**СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ  
ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ**

---

\* Ленинградский государственный университет

им. А.А. Жданова.

ОБРАЗОВАНИЕ ИСТОРИИ  
ФИЗИКИ ИССЛЕДОВАНИЙ

БИБЛИОТЕКА

## Введение

Одной из целей настоящего исследования является выяснение применимости теории ортотропных оболочек, следующей гипотезам Кирхгофа-Лява, к расчету тороидальных сильфонов из стеклопластика, для которого отношение нормального модуля упругости к модулю сдвига не слишком велико ( $\sim 3+4$ ).

Теорию расчета таких оболочек можно получить из общей теории анизотропных оболочек вращения /1/, как это и сделано в работе /2/ для частного случая ортотропной торообразной оболочки постоянной толщины и с постоянными вдоль меридиана характеристиками материала. Ниже последовательно излагается теория симметричной деформации ортотропных оболочек вращения переменной толщины.

Рассматриваются оболочки вращения, изготовленные из ортотропного материала так, что два главных направления ортотропии совпадают с направлениями соответствующих линий главной кривизны. Характеристики материала ( модули упругости  $E_1, E_2$ , коэффициенты Пуассона  $\nu_{12}, \nu_{21}$  ) могут меняться вдоль меридиана. Предполагается, что для ортотропной оболочки справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява.

### I. Основные соотношения для ортотропной оболочки вращения в случае симметричной деформации.

Для оболочек вращения, отнесенных к обычным криволинейным координатам  $\theta$  и  $\varphi$  на срединной поверхности (рис. I), параметры Ляме равны:

$$A_1 = R_1 ; \quad A_2 = R_2 \sin \theta .$$

Справедливы соотношения Кодацци-Гаусса

$$\frac{dR_2 \sin \theta}{d\theta} = R_1 \cos \theta . \quad (I.1)$$

Уравнения равновесия имеют вид /3/

$$\begin{aligned} \frac{dR_2 \sin \theta T_1}{d\theta} - R_1 \cos \theta T_2 + \frac{dR_2 \sin \theta M_1}{R_1 d\theta} - \cos \theta M_2 - R_1 R_2 \sin \theta q_1 \\ \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{dR_2 \sin \theta M_1}{R_1 d\theta} - \cos \theta M_2 \right) = q_2 \end{aligned} \quad (I.2)$$

Здесь (рис. 1,2)  $T_1$  - меридиональное, а  $T_2$  - окружное усилие  $M_1$  и  $M_2$  - меридиональный и окружной изгибающие моменты,  $q_1$ ,  $q_2$  - составляющие поверхностной нагрузки по меридиану и по нормали к срединной поверхности оболочки. толщины  $h$  :

Для перерезывающей силы имеем

$$N_1 = \frac{1}{R_2 \sin \theta} \left( \frac{dR_2 \sin \theta M_1}{R_1 d\theta} - \cos \theta M_2 \right). \quad (I.3)$$

Радиальное и осевое усилия определяются соотношениями

$$Q_r = T_1 \cos \theta + M_1 \sin \theta, \quad Q_z = -T_1 \sin \theta + M_1 \cos \theta. \quad (I.4)$$

Уравнения неразрывности деформаций:

$$\frac{dR_2 \sin \theta \alpha_2}{d\theta} - R_1 \cos \theta \alpha_1 - \frac{dR_2 \sin \theta \epsilon_2}{R_1 d\theta} + \cos \theta \epsilon_1 = 0 \quad (I.5)$$

$$\frac{\alpha_2}{R_1} + \frac{\alpha_1}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{dR_2 \sin \theta \epsilon_2}{R_1 d\theta} - \cos \theta \epsilon_1 \right) = 0.$$

Обобщенный закон Гука для ортотропной оболочки:

$$M_1 = D_1 (\alpha_1 + \nu_{12} \alpha_2); \quad M_2 = D_2 (\alpha_2 + \nu_{21} \alpha_1) \quad (I.6)$$

$$T_1 = B_1 (\epsilon_1 + \nu_{12} \epsilon_2); \quad T_2 = B_2 (\epsilon_2 + \nu_{21} \epsilon_1),$$

где

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \quad (I.7)$$

$$B_1 = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}; \quad B_2 = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}.$$

При этом выполняется соотношение:

$$E_1 \nu_{12} = E_2 \nu_{21}. \quad (I.8)$$

Компоненты деформации определяются через перемещения по формулам:

$$\epsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{du}{d\theta} + w \right); \quad \epsilon_2 = \frac{1}{R_2 \sin \theta} (u \cos \theta + w \sin \theta) \quad (I.9)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{R_1} \frac{d\varphi}{d\theta}; \quad \alpha_2 = \frac{\cos \theta}{R_2 \sin \theta} \varphi$$

и для угла поворота имеем:

$$\varphi = -\frac{1}{R_1} \left( \frac{dw}{d\theta} - u \right). \quad (I.10)$$

Из (1.9) и из закона Гука следует:

$$M_1 = D_1 \left( \frac{1}{R_1} \frac{d\varphi}{d\theta} + \nu_{12} \frac{\cos \theta}{R_2 \sin \theta} \varphi \right). \quad (I.11)$$

$$M_2 = D_2 \left( \frac{\cos \theta}{R_2 \sin \theta} \varphi + \nu_{21} \frac{1}{R_1} \frac{d\varphi}{d\theta} \right).$$

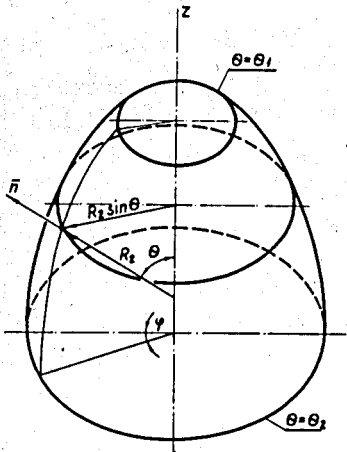


Рис.1. Оболочка вращения

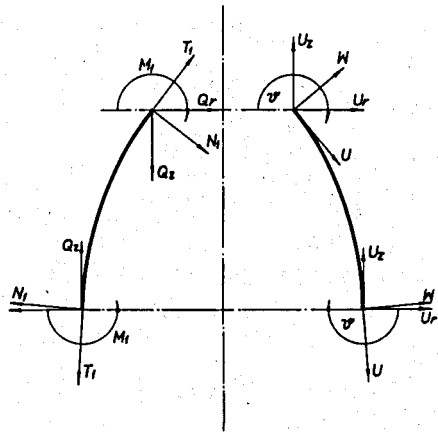


Рис.2. Направление усилий и деформаций

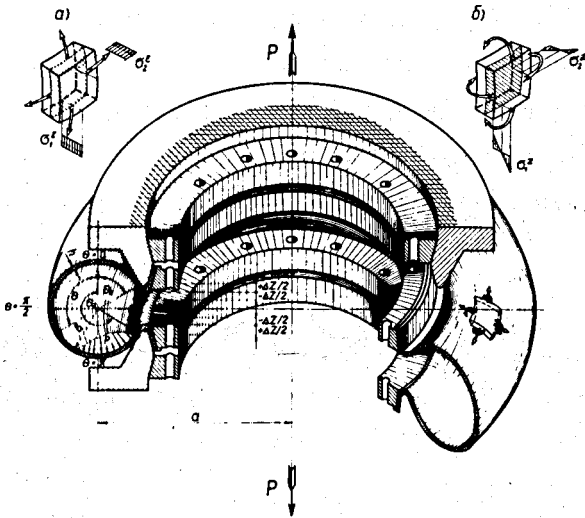


Рис. 3. Сечение торообразной оболочки

## 2. Вывод основных разрешающих уравнений

Введем новую неизвестную функцию  $\chi$  с помощью равенств:

$$T_1 = T_1^* + \frac{\cos\theta}{R_2 \sin\theta} \chi \quad ; \quad T_2 = T_2^* + \frac{1}{R_1} \frac{d\chi}{d\theta} \quad , \quad (2.1)$$

где  $T_1^*$  и  $T_2^*$  должны удовлетворять уравнению:

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{dR_2 \sin\theta T_1^*}{d\theta} - R_2 \cos\theta T_2^* \right) + R_2 \sin\theta T_1^* + R_1 \sin\theta T_2^* - R_1 R_2 \sin\theta q_1 - \frac{d}{d\theta} R_1 R_2 \sin\theta q_1 \quad (2.2)$$

Из соотношений закона Гука и выражений (2.1) получаем:

$$\epsilon_1 = \epsilon_1^* + \frac{1}{E_1 h} \left( \frac{\cos\theta}{R_2 \sin\theta} \chi - \nu_{21} \frac{1}{R_1} \frac{d\chi}{d\theta} \right) \quad (2.4)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_2^* + \frac{1}{E_2 h} \left( \frac{1}{R_1} \frac{d\chi}{d\theta} - \nu_{12} \frac{\cos\theta}{R_2 \sin\theta} \chi \right) ,$$

где

$$\epsilon_1^* = \frac{1}{E_1 h} (T_1^* - \nu_{21} T_2^*) \quad ; \quad \epsilon_2^* = \frac{1}{E_2 h} (T_2^* - \nu_{12} T_1^*) \quad (2.5)$$

Если из уравнений (I.2) исключить моменты, а из уравнений (I.5) компоненты тангенциальной деформации ( $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ) и в подученные таким образом уравнения подставить выражения (I.9) и (2.1), то они удовлетворяются тождественно. Следовательно, для определения функций  $\vartheta$  и  $\chi$  нужно использовать одно уравнение системы (I.2) и одно уравнение системы (I.5).

Подставим выражения (I.9) и (2.1) в уравнения (I.2)<sub>I</sub> и (I.5)<sub>I</sub>:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} + \frac{R_1}{D_1 R_2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \frac{D_1 R_2 \sin\theta}{R_1} \frac{d\vartheta}{d\theta} + \left( \frac{R_1}{D_1 R_2 \sin\theta} \frac{d\nu_{12} D_1 \cos\theta}{d\theta} - \frac{E_2}{E_1} \frac{R_1^2 \cos^2\theta}{R_2^2 \sin^2\theta} \right) \vartheta - \\ - \frac{R_1^2}{R_2 D_1} \chi = \frac{R_1^2 N_1^*}{D_1} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \chi}{d\theta^2} + \frac{R_1 E_2 h}{R_2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \frac{R_2 \sin\theta}{R_1 E_2 h} \frac{d\chi}{d\theta} - \left( \frac{R_1 E_2 h}{R_2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta} \frac{\nu_{12} \cos\theta}{E_2 h} + \frac{E_2}{E_1} \frac{R_1^2 \cos^2\theta}{R_2^2 \sin^2\theta} \right) \chi + \\ + \frac{R_1^2 E_2 h}{R_2} \vartheta = \frac{R_1 E_2 h}{R_2 \sin\theta} \left( R_1 \cos\theta \epsilon_1^* - \frac{d R_2 \sin\theta \epsilon_2^*}{d\theta} \right) . \end{aligned}$$

Здесь

$$N_1^* = -\frac{1}{R_2 \sin \theta} \left( \frac{dR_2 \sin \theta T_1^*}{d\theta} - R_1 \cos \theta T_2^* + R_1 R_2 \sin \theta q_1 \right). \quad (2.7)$$

В общем случае можно показать, что

$$Q_z = Q_z^* = -T_1^* \sin \theta + N_1^* \cos \theta; \quad Q_r = Q_r^* + \frac{\chi}{R_2 \sin \theta} \quad (2.8)$$

$$(Q_r^* = T_1^* \cos \theta + N_1^* \sin \theta).$$

Обычно усилия  $T_1^*$  и  $T_2^*$  можно принять в виде:

$$T_1^* = \frac{1}{R_2} \frac{P}{2\pi} + \frac{1}{R_2 \sin^2 \theta} \int_{\theta_0}^{\theta} R_1 R_2 \sin \theta q_z d\theta$$

$$T_2^* = R_2 q_n - \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \int_{\theta_0}^{\theta} R_1 R_2 \sin \theta q_z d\theta \quad (2.9)$$

$$N_1^* = -\frac{\cos \theta}{R_2 \sin \theta} \frac{P}{2\pi}; \quad (P = -Q_z(\theta_0) 2\pi R_2(\theta_0) \sin \theta_0),$$

где  $q_z = -q_1 \sin \theta + q_n \cos \theta$ .

$P$ - осевая сила в сечении  $\theta = \theta_0$  (Если оболочка содержит точку  $\theta = 0$ , то необходимо принять  $\theta_0 = 0$ ).

Если при определении  $T_1^*$  и  $T_2^*$  исходить из системы уравнений безмоментной теории, то найдем:

$$T_1^* = \frac{1}{R_2 \sin^2 \theta} \left( \frac{P}{2\pi} + \int_{\theta_0}^{\theta} R_1 R_2 \sin \theta q_z d\theta \right)$$

$$T_2^* = R_2 q_n - \frac{1}{R_1 \sin^2 \theta} \left( \frac{P}{2\pi} + \int_{\theta_0}^{\theta} R_1 R_2 \sin \theta q_z d\theta \right); \quad N^* = 0. \quad (2.10)$$

Как выражения (2.9), так и (2.10) обращают уравнение (2.2) в тождество.

### 3. Решение основных уравнений.

Введем вместо  $\chi$  новую функцию  $Y$  с помощью равенства

$$\chi = Y \sqrt{D_1 E_2 h} = Y c \sqrt{E_1 E_2}, \quad (3.1)$$

где

$$c = \frac{h}{\sqrt{12(1-\nu_1 \nu_2)}}. \quad (3.2)$$

Тогда систему (2.6) можно записать в виде:

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} + \frac{R_1}{D_1 R_2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{D_1 R_2 \sin \theta}{R_1} \frac{d \vartheta}{d\theta} + \left( \frac{R_1}{D_1 R_2 \sin \theta} \frac{d R_1 \epsilon_2 \cos \theta}{d\theta} - \frac{E_2}{E_1} \frac{R_1^2 \cos^2 \theta}{R_2^2 \sin^2 \theta} \right) \vartheta - \frac{R_1^2}{R_2 c} \gamma \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} - \frac{R_1^2}{D_1} N_1^* \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2 \gamma}{d\theta^2} + \frac{R_1}{D_1 R_2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{D_1 R_2 \sin \theta}{R_1} \frac{d \gamma}{d\theta} - \left( \frac{R_1 E_2 h}{R_2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{\mu_2 \cos \theta}{E_2 h} + \frac{E_2}{E_1} \frac{R_1^2 \cos^2 \theta}{R_2^2 \sin^2 \theta} - \frac{1}{\sqrt{D_1 E_2 h}} \frac{d^2 \sqrt{D_1 E_2 h}}{d\theta^2} - \frac{1}{\sqrt{D_1 E_2 h}} \frac{d \sqrt{D_1 E_2 h}}{d\theta} \frac{R_1 E_2 h}{R_2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{R_2 \sin \theta}{R_1 E_2 h} \right) \gamma + \frac{R_1^2}{R_2 c} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \vartheta = \frac{R_1^2}{c R_2 \sin \theta} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} (\cos \theta \epsilon_1^* - \frac{d R_2 \sin \theta \epsilon_2^*}{R_1 d\theta})$$

Считая, что характеристики материала и толщина оболочки — плавные функции  $\theta$ , в уравнениях (3.3) подчеркнутые слагаемые можно опустить в пределах погрешности теории тонких оболочек. Введением комплексной неизвестной функции

$$\tilde{\vartheta} = \vartheta + i \gamma$$

полученные уравнения можно объединить в одно:

$$\frac{d^2 \tilde{\vartheta}}{d\theta^2} + \frac{R_1}{D_1 R_2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \frac{D_1 R_2 \sin \theta}{R_1} \frac{d \tilde{\vartheta}}{d\theta} + \left( -\frac{E_2}{E_1} \frac{R_1^2 \cos^2 \theta}{R_2^2 \sin^2 \theta} + i \frac{R_1^2}{R_2 c} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right) \tilde{\vartheta} - \frac{R_1^2}{D_1} N_1^* + i \frac{R_1^2}{c R_2 \sin \theta} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} (\cos \theta \epsilon_1^* - \frac{d R_2 \sin \theta \epsilon_2^*}{R_1 d\theta}) \quad (3.4)$$

Основные функции  $\vartheta$  и  $\chi$  выражаются через  $\tilde{\vartheta}$  по формулам

$$\vartheta = \operatorname{Re} \tilde{\vartheta}; \quad \chi = hc \sqrt{E_1 E_2} \operatorname{Im} \tilde{\vartheta}. \quad (3.5)$$

При этом ясен физический смысл основных функций:  $\vartheta$  — угол поворота касательной к меридиану оболочки, а функция  $\chi$  связана с радиальным усилием в оболочке по формуле (2.8)<sub>2</sub>.

Уравнение (3.4) относится к хорошо изученному классу уравнений с малым параметром при старшей производной и его решение может быть получено методом асимптотического интегрирования.

Для вычисления напряжений по найденным значениям основных



функций имеем формулы

$$\begin{aligned} \sigma_1^\epsilon &= \frac{T_1}{h} - \frac{T_1^*}{h} + \frac{\cos\theta}{hR_2 \sin\theta} \chi, & \sigma_2^\epsilon &= \frac{T_2}{h} - \frac{T_2^*}{h} + \frac{1}{hR_1} \frac{d\chi}{d\theta} \\ \sigma_1^x &= \frac{6M_1}{h^2} = \frac{E_1 h}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left( \frac{1}{R_1} \frac{d\psi}{d\theta} + \nu_{12} \frac{\cos\theta}{R_2 \sin\theta} \psi \right) \\ \sigma_2^x &= \frac{6M_2}{h^2} = \frac{E_2 h}{2(1-\nu_{12}\nu_{21})} \left( \frac{\cos\theta}{R_2 \sin\theta} \psi + \nu_{21} \frac{1}{R_1} \frac{d\psi}{d\theta} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь  $\sigma_i^\epsilon$ ,  $\sigma_2^\epsilon$  - равномерные по толщине, тангенциальные напряжения,  $\sigma_i^x$ ,  $\sigma_2^x$  - изгибные напряжения.

Радиальное  $u_r$  и осевое  $u_z$  перемещения (рис.2)

$$u_r = U \cos\theta + W \sin\theta, \quad u_z = -U \sin\theta + W \cos\theta \quad (3.7)$$

вычисляются по формулам:

$$u_r = R_2 \sin\theta \epsilon_2; \quad u_z = u_z(\theta_2) - \int_{\theta_2}^{\theta} \left( \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \frac{dR_2 \sin\theta \epsilon_2}{d\theta} + \frac{R_1 \psi}{\cos\theta} \right) d\theta. \quad (3.8)$$

Используя первое уравнение неразрывности (I.5), выражение для осевого перемещения  $u_z$  можно записать иначе

$$u_z = u_z(\theta_2) - \int_{\theta_2}^{\theta} R_1 (\sin\theta \epsilon_1 + \cos\theta \psi) d\theta. \quad (3.9)$$

Координата  $\theta_2$  отвечает второму краю оболочки (рис.1).

#### 4. Ортоотропная торообразная оболочка переменной толщины

Рассмотрим симметричную деформацию ортоотропной торообразной оболочки переменной толщины незамкнутого или замкнутого кругового меридионального сечения, нагруженной равномерным давлением интенсивности  $p$  и внешними осевыми силами величины  $P$ , приложенными к краям оболочки (рис.3). Краям оболочки соответствуют  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$  ( $\theta_1 < \theta_2$ ):

Подставим значения радиусов кривизны для тора

$$R_1 = b, \quad R_2 = a \frac{1 + \alpha \sin\theta}{\sin\theta}, \quad \left( \alpha = \frac{b}{a} \right) \quad (4.1)$$

в основное уравнение (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + \frac{d}{d\theta} \ln D_1 (1 + \alpha \sin\theta) \frac{d\psi}{d\theta} + \left[ -\frac{E_2 \alpha^2 \cos^2\theta}{E_1 (1 + \alpha \sin\theta)^2} + i \frac{\sin\theta}{1 + \alpha \sin\theta} \frac{b^*}{ac} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right] \psi - \\ - \frac{b^*}{D_1} N_1^* + i \frac{b^*}{ac} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{1}{(1 + \alpha \sin\theta)} \left[ \cos\theta \epsilon_1^* - \frac{1}{\alpha} \frac{d(1 + \alpha \sin\theta \epsilon_2^*)}{d\theta} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

При  $\varphi_1 = 0$ ;  $\varphi_2 = P$  выражения (2.10) можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_1^* &= \frac{\alpha \sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{P^0}{2\pi b} + \frac{(\sin \theta - \sin \theta_0)(2 + \alpha \sin \theta + \alpha \sin \theta_0)}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)} \frac{pb}{2} \\ T_2^* &= \frac{\alpha \sin^2 \theta + 2 \sin \theta_0 + \alpha \sin^2 \theta_0}{\alpha \sin^2 \theta} \frac{pb}{2}; N_1^* = -\frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \frac{P^0}{2\pi b} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если тор содержит вершину  $\theta = 0$ , то в формулах (4.3) следует положить  $\theta_0 = 0$  и  $P^0$  при этом является осевой силой в сечении  $\theta = 0$ . Если тор не содержит вершины  $\theta = 0$ , то  $\theta_0 = \theta$ , и  $P^0 = P$ , т.е.  $P$  - осевая сила на краю  $\theta = \theta_1$ .

Опуская в уравнении (4.2) малые члены, получаем

$$\frac{d^2 \tilde{f}}{d\theta^2} + \frac{\alpha}{d\theta} \ln D_1 (1 + \alpha \sin \theta) \frac{d\tilde{f}}{d\theta} + i \frac{b^2}{ac} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{\sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \tilde{f} = -\frac{b^2 \cos \theta}{ac} \frac{P^0}{2\pi E_1 h c} \quad (4.4)$$

В правой части уравнения (4.2) опущены члены, зависящие от давления  $p$ , так как частное решение, отвечающее этим членам, дает малые добавки (порядка  $\frac{ac}{b^2}$ ) к напряжениям, подсчитанным по усилиям (4.3).

Решение однородного уравнения (4.4) находим методом асимптотического интегрирования - методом эталонных уравнений, так же, как это сделано в [4] для изотропного тора постоянной толщины

$$\tilde{f}_0 = \varphi(\theta) [\tilde{C}_1 h_1(-i\lambda\omega) + \tilde{C}_2 h_2(-i\lambda\omega)], \quad (4.5)$$

где  $h_1(-i\lambda\omega)$ ;  $h_2(-i\lambda\omega)$  - модифицированные функции Ханкеля (функции Эйри) [5].

В формуле (4.5) для ортотропного тора переменной толщины и с переменными характеристиками материала введены обозначения

$$\lambda^3 = \frac{b^2}{ac} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \Big|_{\theta=0} \quad (4.6)$$

$$\varphi(\theta) = \sqrt{\frac{D_1(0)}{D_1(1 + \alpha \sin \theta) \omega}} \quad (4.7)$$

$$\lambda \omega = \text{sign } \theta \left[ \frac{3}{2} \int_0^\theta \sqrt{\frac{b^2}{ac} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{\sin \theta}{1 + \alpha \sin \theta}} d\theta \right]^{2/3} \quad (4.8)$$

Если оболочка не содержит  $\theta = 0$ , то в формулах (4.6) и (4.7) вместо  $\theta = 0$  нужно подставить  $\theta = \theta_1$ .

Частное решение уравнения (4.4) будем искать в виде :

$$\tilde{f}^0 = \varphi(\theta) H(\varphi) ; \quad \varphi = -i\lambda\omega . \quad (4.9)$$

После подстановки выражения (4.9) в уравнение (4.4) и отбрасывания малых членов получаем

$$\frac{d^2 H}{d\varphi^2} + \varphi H = g , \quad (4.10)$$

$$\text{где } g = \frac{\lambda\omega \cos\theta}{\varphi(\theta) \sin\theta} \frac{P^0}{2\pi\hbar c\sqrt{E_1 E_2}} . \quad (4.11)$$

Частное решение уравнения (4.10) представим в виде суммы двух

$$H = H_1 + H_2 , \quad (4.12)$$

где  $H_1$  - частное решение уравнения

$$\frac{d^2 H_1}{d\varphi^2} + \varphi H_1 = g(\varphi) - g(0) ,$$

$$\text{а } H_2 \text{ есть частное решение уравнения} \quad (4.13)$$

Можно показать [4], что решение уравнения (4.12) с погрешностью  $\frac{1}{\lambda^2}$ , есть

$$H_1 = \frac{g(\varphi) - g(0)}{\varphi} , \quad (4.14)$$

$$\text{а уравнения (4.13)} \quad H_2 = g(0) e_0(\varphi) . \quad (4.15)$$

Здесь  $e_0(\varphi)$  - обобщенная функция Эйри, подробно рассмотренная С.А.Тумаркиным [6].

Заметим, что если торообразная оболочка не содержит точку  $\theta = 0$ , но край оболочки  $\theta = \theta_0$  весьма близок к нулю, то в формулах (4.12)-(4.15) вместо  $g(0)$  нужно брать  $g(\theta_0)$ . Если торообразная оболочка не содержит точку  $\theta = 0$  и ее края далеки от этой точки, то следует в формулах (4.12)-(4.15) положить  $g(0) = 0$  и определять частное решение  $\tilde{f}^0$  по безмоментной теории [4].

$$\text{Из формулы (4.11) следует } g(0) = \frac{\lambda P^0}{2\pi\hbar c\sqrt{E_1 E_2}}_0$$

и частное решение уравнения (4.4) записывается в виде

$$\tilde{f}^0 = \left[ i \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{\hbar c\sqrt{E_1 E_2}}_0 - i \frac{\varphi(\theta)}{\omega(\theta)} + \lambda\varphi(\theta) e_0(-i\lambda\omega) \right] \frac{P^0}{2\pi\hbar c\sqrt{E_1 E_2}}_0 . \quad (4.16)$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (4.4):

$$\tilde{f} = \varphi(\theta) \left[ \tilde{C}_1 h_1(-i\lambda\omega) + \tilde{C}_2 h_2(-i\lambda\omega) \right] + \left[ i c_1 g \frac{\hbar c\sqrt{E_1 E_2}}_0 - i \frac{\varphi(\theta)}{\omega(\theta)} + \lambda\varphi(\theta) e_0(-i\lambda\omega) \right] \frac{P^0}{2\pi\hbar c\sqrt{E_1 E_2}}_0 . \quad (4.17)$$

Запишем это выражение иначе:

$$\tilde{f} - \tilde{f}^0 = \varphi(\theta) [\tilde{C}_1 h_1(is) + \tilde{C}_2 h_2(is)], \quad (4.18)$$

где  $s = -i\omega(\theta)$ .

Перейдем в (4.18) от постоянных  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$  к новым постоянным

$$\tilde{f} - \tilde{f}^0 = \varphi(\theta) \left[ \frac{\tilde{f}(\theta_1) - \tilde{f}^0(\theta_1)}{\varphi_1} \frac{h_1(is_2) h_2(is) - h_2(is_2) h_1(is)}{h_1(is_2) h_2(is_1) - h_1(is_1) h_2(is_2)} + \right. \\ \left. + \frac{\tilde{f}(\theta_2) - \tilde{f}^0(\theta_2)}{\varphi_2} \frac{h_2(is_1) h_1(is) - h_1(is_1) h_2(is)}{h_1(is_2) h_2(is_1) - h_1(is_1) h_2(is_2)} \right]. \quad (4.19)$$

Здесь

$$\varphi_1 = \varphi(\theta_1), \quad \varphi_2 = \varphi(\theta_2), \quad s_1 = s(\theta_1), \quad s_2 = s(\theta_2).$$

Заметим, что согласно (3.5)

$$\tilde{f} - \tilde{f}^0 = \tilde{f} - \tilde{f}^0 + i \frac{\alpha(1 + \alpha \sin \theta)}{hc \sqrt{E_1 E_2}} (Q_r - Q_r^*), \quad (4.20)$$

где

$$\tilde{f}^0 = i \varphi(\theta) \operatorname{Re} \epsilon_0(is) \frac{P^0}{2\pi (hc \sqrt{E_1 E_2})_0}$$

$$Q_r^0 = Q_r^* + \frac{X^0}{\alpha(1 + \alpha \sin \theta)} \quad (4.21)$$

$$Q_r^* = T_1^* \cos \theta + N_1^* \sin \theta = \frac{pb}{2} \frac{(\sin \theta - \sin \theta_0)(2 + \alpha \sin \theta + \alpha \sin \theta_0)}{\sin \theta (1 + \alpha \sin \theta)} \cos \theta$$

$$X^0 = \frac{P^0}{2\pi} \left[ \operatorname{ctg} \theta - \frac{\varphi(\theta)}{\omega(\theta)} \frac{hc \sqrt{E_1 E_2}}{(hc \sqrt{E_1 E_2})_0} + \alpha \varphi(\theta) \right]_m \epsilon_0(is) \frac{hc \sqrt{E_1 E_2}}{(hc \sqrt{E_1 E_2})_0}.$$

Разделяя в выражении (4.19) вещественные и мнимые части, выпишем окончательные выражения для искоемых функций

$$\tilde{f} - \tilde{f}^0 = \varphi(\theta) \left[ \frac{\tilde{f}(\theta_1) - \tilde{f}^0(\theta_1)}{\varphi_1} \operatorname{Re} \frac{h_2(is)}{h_2(is_1)} - \frac{\alpha(1 + \alpha \sin \theta_1)}{(hc \sqrt{E_1 E_2})_{\theta_1}} \frac{Q_r(\theta_1) - Q_r^0(\theta_1)}{\varphi_1} \right]_m \frac{h_2(is)}{h_2(is_1)} + \\ + \frac{\tilde{f}(\theta_2) - \tilde{f}^0(\theta_2)}{\varphi_2} \operatorname{Re} \frac{h_1(is_1)}{h_1(is_2)} - \frac{\alpha(1 + \alpha \sin \theta_2)}{(hc \sqrt{E_1 E_2})_{\theta_2}} \frac{Q_r(\theta_2) - Q_r^0(\theta_2)}{\varphi_2} \right]_m \frac{h_1(is)}{h_1(is_2)} \quad (4.22)$$

$$\frac{X - X^0}{hc \sqrt{E_1 E_2}} = \varphi(\theta) \left[ \frac{\tilde{f}(\theta_1) - \tilde{f}^0(\theta_1)}{\varphi_1} \right]_m \frac{h_2(is)}{h_2(is_1)} + \frac{\alpha(1 + \alpha \sin \theta_1)}{(hc \sqrt{E_1 E_2})_{\theta_1}} \frac{Q_r(\theta_1) - Q_r^0(\theta_1)}{\varphi_1} \operatorname{Re} \frac{h_2(is)}{h_2(is_1)} + \\ + \frac{\tilde{f}(\theta_2) - \tilde{f}^0(\theta_2)}{\varphi_2} \right]_m \frac{h_1(is)}{h_1(is_2)} + \frac{\alpha(1 + \alpha \sin \theta_2)}{(hc \sqrt{E_1 E_2})_{\theta_2}} \frac{Q_r(\theta_2) - Q_r^0(\theta_2)}{\varphi_2} \operatorname{Re} \frac{h_1(is)}{h_1(is_2)} \quad (4.23)$$

Выражения (4.22) и (4.23) выписаны в предположении, что края оболочки достаточно далеко удалены друг от друга и их взаимное влияние можно не учитывать. При этом для окрестности края  $\theta = \theta_1$  нужно оставить в квадратных скобках справа только первое слагаемое, а для окрестности края  $\theta = \theta_2$  - только второе слагаемое.

По найденным функциям  $v^j$  и  $\chi$  напряжения определяются с помощью формул (3.6).

Для осевого смещения  $u_z$  из (3.9) получаем формулу:

$$u_z(\theta) = u_z(\theta_1) - b \int_{\theta_1}^{\theta} (\sin\theta\epsilon_1 + \cos\theta v^j) d\theta \approx u_z(\theta_2) - b \int_{\theta_2}^{\theta} (\sin\theta\epsilon_2 + \cos\theta v^j) d\theta. \quad (4.24)$$

### 5. Асимптотические формулы

Для оценки максимальных напряжений основного состояния получим асимптотические выражения, аналогичные формулам Кларка для изотропного тора постоянной толщины, нагруженного осевыми силами по краям /4/.

Обозначим 
$$\sigma_r = \frac{P^0}{2r_0 h}. \quad (5.1)$$

Наибольшим напряжением растяжения от усилий основного состояния будет  $\sigma_2^{0\epsilon}$ , причем  $\max \sigma_2^{0\epsilon} = \sigma_2^{0\epsilon}(0)$

$$\frac{\max \sigma_2^{0\epsilon}}{\sigma_r} \approx -\frac{1}{2} \alpha^2 \varphi(0) \omega'(0) \operatorname{Im} c_0'(0) = 0,939 \frac{\alpha^2}{\omega}; \quad (c_0'(is) = \frac{dc_0(is)}{ds}) \quad (5.2)$$

- это первая формула Кларка.

Наибольшим напряжением от моментов основного состояния будет  $\sigma_1^{0\kappa}$

$$\sigma_1^{0\kappa} \approx -\frac{6b}{\alpha h} \frac{1}{\varphi(1 + \alpha \sin\theta)} R_0 c_0(-i\alpha\omega) \sigma_r$$

$$\frac{\max \sigma_1^{0\kappa}(\theta^*)}{\sigma_r} \approx \pm 0,753 \frac{6b}{\alpha h(\theta^*)} \frac{1}{\varphi(\theta^*)(1 + \alpha \sin\theta^*)} \quad (5.3)$$

- вторая формула Кларка.

Здесь  $\theta^*$  определяется с помощью таблиц /7/ из уравнения

$$-\alpha\omega(\theta^*) = \pm 1,225. \quad (5.4)$$

В случае растяжения торообразной оболочки осевыми силами, приложенными к ее краям, можно вывести следующую приближенную формулу для осевого смещения  $u_z$ :

$$u_z(\theta) = u_z(\theta_2) - \frac{\lambda \delta P^0}{2\pi(hc\sqrt{E_1 E_2})_0} \int_{\theta_2}^{\theta} \psi \cos\theta R_c \epsilon_0(-i\lambda\omega) d\theta \quad ; \quad (\psi = \psi(\theta)) \quad (5.5)$$

Расхождение краев сиффона

$$\Delta z = u_z(\theta_1) - u_z(\theta_2)$$

вычисляется по формуле

$$\Delta z = - \frac{\lambda \delta P^0}{2\pi(hc\sqrt{E_1 E_2})_0} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \psi \cos\theta R_c \epsilon_0(-i\lambda\omega) d\theta \quad (5.6)$$

Если край оболочки  $\theta_1 \leq -45^\circ$  и  $\theta_2 \geq 45^\circ$ , то можно приближенно принять  $\int_{\theta_2}^{\theta_1} \psi \cos\theta R_c \epsilon_0(-i\lambda\omega) d\theta \approx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi \cos\theta R_c \epsilon_0(-i\lambda\omega) d\theta = -\frac{\pi}{\lambda}$  и для расхождения краев сиффона получить формулу

$$\Delta z = \frac{\delta P^0}{2(hc\sqrt{E_1 E_2})_0} \quad (5.7)$$

Если край  $\theta = \theta_1$  близок к нулю и  $\theta_2 \geq 45^\circ$ , то

$$\int_{\theta_2}^{\theta_1} \psi \cos\theta R_c \epsilon_0(-i\lambda\omega) d\theta \approx \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \psi \cos\theta R_c \epsilon_0(-i\lambda\omega) d\theta = -\frac{\pi}{2\lambda} \quad \text{и} \quad \Delta z = \frac{\delta P^0}{4(hc\sqrt{E_1 E_2})_0} \quad (5.8)$$

- это третья формула Кларка.

### 6. Ортотропная торообразная оболочка постоянной толщины и с постоянными характеристиками материала

для торообразной оболочки постоянной толщины с характеристиками материала, не изменяющимися вдоль меридиана, приведенные в части 4 формулы несколько упрощаются.

Как и прежде, рассматриваем симметричную деформацию такой оболочки при действии на нее равномерного внутреннего давления  $p$  и осевых растягивающих сил  $P$ , приложенных к краям.

Используем следующие обозначения:

$$c = \frac{h}{\sqrt{2(1-\nu_1\nu_2)}} \quad ; \quad \alpha^3 = \frac{\beta^2}{\alpha c} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \quad ; \quad \omega = \text{sign}\theta \left[ \frac{3}{2} \int_0^{|\theta|} \frac{|\sin\theta|}{1+\alpha\sin\theta} d|\theta| \right]^{2/3} \quad ;$$

$$\varphi(\theta) = \sqrt[4]{\frac{\omega(\theta)}{\sin\theta(1+\alpha\sin\theta)}} \quad ; \quad \varphi'(\theta) = \frac{1}{4} \psi(\theta) \left[ \frac{1}{\omega(\theta)} \sqrt{\frac{\sin\theta}{\omega(\theta)(1+\alpha\sin\theta)}} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\alpha\cos\theta}{1+\alpha\sin\theta} \right] \quad (6.1)$$

$$s = -\lambda\omega(\theta) \quad ; \quad s_1 = -\lambda\omega(\theta_1)$$

$\theta_1$  - координата параллели, отвечающей краю сиффона (рис.3).

С помощью формул (3,6) и (4.22), (4.23) запишем выражения для напряжений в тороидальном сиффоне постоянной толщины и с постоян-

ными вдоль меридиана характеристиками материала. Напряжения основного состояния (от усилий (4.3)) и частного решения уравнения (4.4) определяются равенствами

$$\sigma_1^{\alpha}(\theta) = \frac{p\delta}{2h} \frac{(\sin\theta - \sin\theta_0)[2 + \alpha(\sin\theta + \sin\theta_0)]}{\sin\theta(1 + \alpha\sin\theta)} + \frac{P^0}{2\sqrt{\alpha}h} \left\{ \frac{1}{\sin\theta(1 + \alpha\sin\theta)} + \frac{\varphi(\theta)\cos\theta}{1 + \alpha\sin\theta} \left[ \lambda \int_m \epsilon_0(is) - \frac{1}{\omega(\theta)} \right] \right\}$$

$$\sigma_2^{\alpha}(\theta) = \frac{p\delta}{2h} \frac{\sin^2\theta + \sin^2\theta_0 + \frac{2}{\alpha}\sin\theta_0}{\sin^2\theta} + \frac{P^0}{2\sqrt{\alpha}h} \frac{1}{\alpha} \left[ -\frac{\alpha^2}{\varphi(\theta)(1 + \alpha\sin\theta)} R_e \epsilon_0'(is) + \right. \quad (6.2)$$

$$\left. + \lambda \varphi'(\theta) \int_m \epsilon_0(is) - \frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\varphi'(\theta)}{\omega(\theta)} + \frac{1}{\varphi(\theta)\omega^2(\theta)(1 + \alpha\sin\theta)} \right]$$

$$\sigma_1^{\alpha\alpha}(\theta) = \frac{P^0}{2\sqrt{\alpha}h} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{3\alpha}{\alpha[3(1 - \frac{1}{2}\nu_2)\frac{1}{2}]} \left\{ \lambda \int_m \epsilon_0'(is) + \left[ \varphi'(\theta) + \frac{1}{2}\varphi(\theta) \frac{d\cos\theta}{1 + \alpha\sin\theta} \right] R_e \epsilon_0(is) \right\}$$

$$\sigma_2^{\alpha\alpha}(\theta) = \frac{P^0}{2\sqrt{\alpha}h} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{3\alpha}{\alpha[3(1 - \frac{1}{2}\nu_2)\frac{1}{2}]} \left\{ \lambda \frac{1}{2} \int_m \epsilon_0'(is) + \left[ \frac{1}{2}\varphi'(\theta) + \frac{\varphi(\theta)\alpha\cos\theta}{1 + \alpha\sin\theta} \right] R_e \epsilon_0(is) \right\}$$

Здесь и ниже для удобства использования ЭВМ производные от специальных функций взяты по всему аргументу

$$\epsilon_0^j(is) = \frac{d\epsilon_0(is)}{d(is)}; \quad h_j^j(is) = \frac{dh_j(is)}{d(is)} \quad (j = 1, 2) \quad (6.3)$$

Кроме того, имеем

$$\varphi'(\theta) = \frac{P^0}{2\sqrt{\alpha}hc \sqrt{E_1 E_2}} \lambda \varphi(\theta) R_e \epsilon_0(is) \quad (6.4)$$

$$Q_1^0(\theta) = \frac{p\delta}{2} \frac{(\sin\theta - \sin\theta_0)[2 + \alpha(\sin\theta + \sin\theta_0)]}{\sin\theta(1 + \alpha\sin\theta)} \cos\theta +$$

$$+ \frac{P^0}{2\sqrt{\alpha}} \left\{ \frac{\cos\theta}{\sin\theta(1 + \alpha\sin\theta)} + \frac{\varphi(\theta)}{1 + \alpha\sin\theta} \left[ \lambda \int_m \epsilon_0(is) - \frac{1}{\omega(\theta)} \right] \right\}$$

В формулах (6.2), (6.4) следует положить  $\theta_0 = 0$ , если оболочка содержит вершину  $\theta = 0$ . В противном случае за  $\theta_0$  можно принять координату любой параллели, на которой задано или легко вычисляется значение осевой силы (в частности, можно взять за  $\theta_0$  значение  $\theta$ , соответствующее краю оболочки).

В точке  $\theta = 0$  напряжения основного состояния подсчитываются по формулам:

$$\omega(0) = 0; \quad \varphi(0) = 1; \quad \varphi'(0) = -0.3\alpha \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^{0\epsilon}(0) &= \frac{p\delta}{2h} + \frac{p^0}{2\sqrt{\alpha}h} Q_1 \alpha; & \sigma_2^{0\epsilon}(0) &= \frac{p\delta}{2h} + \frac{p^0}{2\sqrt{\alpha}h} \frac{\alpha^2}{\alpha} Q_2 9389 \\ \sigma_1^{0\kappa}(0) &= \frac{p^0}{2\sqrt{\alpha}h} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{3\alpha \sqrt{1.2879}}{\alpha \sqrt{3(1-\nu_2)\nu_{21}}} (\nu_2 - 0.3)\alpha; & \sigma_2^{0\kappa}(0) &= \frac{p^0}{2\sqrt{\alpha}h} \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \frac{3\alpha \sqrt{1.2879}}{\alpha \sqrt{3(1-\nu_2)\nu_{21}}} (1 - 0.3\nu_{21})\alpha \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$Q_r^0(0) = p\delta + \frac{p^0}{2\sqrt{\alpha}} Q_1 \alpha \quad (6.7)$$

Если края оболочки достаточно удалены друг от друга, их взаимным влиянием можно пренебречь. В этом случае формулы для напряжений краевого эффекта вблизи края  $\theta = \theta_1$  имеют следующий вид:

$$\sigma_1^{KE}(\theta) = \frac{c\sqrt{E_1 E_2} [\psi'(\theta_1) - \psi''(\theta_1)]}{\alpha} \frac{\varphi(\theta) \cos \theta}{\varphi(\theta_1)(1 + \alpha \sin \theta)} \Big|_m \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} + \frac{Q_r(\theta) - Q_r^0(\theta)}{h} \frac{\varphi(\theta) \cos \theta (1 + \alpha \sin \theta)}{\varphi(\theta_1)(1 + \alpha \sin \theta)} R_e \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{KE}(\theta) &= \frac{c\sqrt{E_1 E_2} [\psi'(\theta_1) - \psi''(\theta_1)]}{\alpha} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\varphi(\theta)} \left\{ \frac{1}{\varphi(\theta)(1 + \alpha \sin \theta)} R_e \frac{h_2'(\xi)}{h_2(\xi)} \frac{\varphi'(\theta)}{\alpha} \Big|_m \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} \right\} + \\ &+ \frac{Q_r(\theta) - Q_r^0(\theta)}{h} \frac{1}{\alpha} \frac{(1 + \alpha \sin \theta)}{\varphi(\theta)} \left\{ \frac{1}{\varphi(\theta)(1 + \alpha \sin \theta)} \Big|_m \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} + \frac{\varphi'(\theta)}{\alpha} R_e \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^{K\kappa}(\theta) &= \frac{c\sqrt{E_1 E_2} [\psi'(\theta_1) - \psi''(\theta_1)]}{\alpha} \frac{3\alpha \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}}{\alpha \sqrt{3(1-\nu_2)\nu_{21}}} \frac{1}{\varphi(\theta)} \left\{ \frac{1}{\varphi(\theta)(1 + \alpha \sin \theta)} \Big|_m \frac{h_2'(\xi)}{h_2(\xi_1)} + \right. \\ &+ \frac{1}{\alpha} \left[ \varphi'(\theta) + \nu_2 \varphi(\theta) \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] R_e \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} \Big\} + \frac{Q_r(\theta) - Q_r^0(\theta)}{h} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \frac{3\alpha}{\alpha \sqrt{3(1-\nu_2)\nu_{21}}} \\ &\frac{1 + \alpha \sin \theta}{\varphi(\theta)} \left\{ \frac{1}{\varphi(\theta)(1 + \alpha \sin \theta)} R_e \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} - \frac{1}{\alpha} \left[ \varphi'(\theta) + \nu_2 \varphi(\theta) \frac{\alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] \Big|_m \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} \right\} \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^{K\kappa}(\theta) &= \frac{c\sqrt{E_1 E_2} [\psi'(\theta_1) - \psi''(\theta_1)]}{\alpha} \frac{3\alpha \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}}{\alpha \sqrt{3(1-\nu_2)\nu_{21}}} \frac{1}{\varphi(\theta)} \left\{ \frac{\nu_{21}}{\varphi(\theta)(1 + \alpha \sin \theta)} \Big|_m \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} + \right. \\ &+ \frac{1}{\alpha} \left[ \nu_{21} \varphi'(\theta) + \frac{\varphi(\theta) \alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] R_e \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} \Big\} + \frac{Q_r(\theta) - Q_r^0(\theta)}{h} \frac{3\alpha \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}}{\alpha \sqrt{3(1-\nu_2)\nu_{21}}} \\ &\frac{1 + \alpha \sin \theta}{\varphi(\theta)} \left\{ \frac{\nu_{21}}{\varphi(\theta)(1 + \alpha \sin \theta)} R_e \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} - \frac{1}{\alpha} \left[ \nu_{21} \varphi'(\theta) + \frac{\varphi(\theta) \alpha \cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \right] \Big|_m \frac{h_2(\xi)}{h_2(\xi_1)} \right\}. \end{aligned}$$



Входящие в формулы (6.8), (6.9) отношения функций Эйри и их производных записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{h_2(is)}{h_2(is_1)} &= \frac{\operatorname{Re} h_2(is) \operatorname{Re} h_2(is_1) + \operatorname{Im} h_2(is) \operatorname{Im} h_2(is_1)}{[\operatorname{Re} h_2(is_1)]^2 + [\operatorname{Im} h_2(is_1)]^2} \\ \operatorname{Im} \frac{h_2(is)}{h_2(is_1)} &= \frac{\operatorname{Im} h_2(is) \operatorname{Re} h_2(is_1) - \operatorname{Re} h_2(is) \operatorname{Im} h_2(is_1)}{[\operatorname{Re} h_2(is_1)]^2 + [\operatorname{Im} h_2(is_1)]^2} \\ \operatorname{Re} \frac{h_2'(is)}{h_2'(is_1)} &= \frac{\operatorname{Re} h_2'(is) \operatorname{Re} h_2'(is_1) + \operatorname{Im} h_2'(is) \operatorname{Im} h_2'(is_1)}{[\operatorname{Re} h_2'(is_1)]^2 + [\operatorname{Im} h_2'(is_1)]^2} \\ \operatorname{Im} \frac{h_2'(is)}{h_2'(is_1)} &= \frac{\operatorname{Im} h_2'(is) \operatorname{Re} h_2'(is_1) - \operatorname{Re} h_2'(is) \operatorname{Im} h_2'(is_1)}{[\operatorname{Re} h_2'(is_1)]^2 + [\operatorname{Im} h_2'(is_1)]^2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Расхождение краев сильфона

$$\Delta z = 2 \left[ U_z(\theta_1) - U_z\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

вычисляется по формуле (4.24). Если край  $\theta_1$  сильфона близок к  $-90^\circ$ , влияние краевого эффекта вблизи этого края можно не учитывать. Тогда получим следующее выражение для расхождения краев при

$$\Delta z = -\frac{p\theta^2}{2} \frac{\alpha \pi}{E_1 h} + \sigma_r \frac{2\pi \alpha \theta}{c\sqrt{E_1 E_2}}, \quad (6.11)$$

где

$$\sigma_r = \frac{p^0}{2\pi \alpha h}. \quad (6.12)$$

Приведенные формулы позволяют определить напряженно-деформированное состояние в торообразной ортотропной оболочке. Входящие в (6.8), (6.9) произвольные постоянные  $\frac{Q_r(\theta_1) - Q_r^0(\theta_1)}{h}$  и  $\frac{c\sqrt{E_1 E_2} [\mathcal{J}'(\theta_1) - \mathcal{J}'(\theta_1)]}{a}$  находятся на граничных условиях задачи. В частности, условия жесткого края при  $\theta = \theta_1$  записываются

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'(\theta_1) &= 0 \\ \sigma_2^e(\theta_1) - r_{12} \sigma_1^e(\theta_1) &= 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Для случая расчета изотропного тора следует принять  $E_1 = E_2 = E$  и  $r_{12} = r_{21} = \nu$  и расчетные формулы (6.2÷6.11) можно привести к виду формул работы [8].

В заключении авторы выражают признательность Е.М.Мельничук, Л.М.Кузнецовой и Э.Я.Шафрановой за помощь при оформлении работы.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Справочник. "Прочность. Устойчивость. Колебания" под общей ред. И.А.Биргера и Я.Г.Пановко, Машиностроение, М., т.2, 1968.
2. Ю.Д.Бессарабов, М.А.Рудис. О симметричной деформации ортотропной тороидальной оболочки. Труды IV Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин, Ереван, 1964.
3. В.В.Новожилов. Теория тонких оболочек, Судпромгиз, Л., 1962.
4. К.Ф.Черных, В.А.Шамина. Расчет торообразных оболочек. Сб. "Исследов. по упругости и пластичн.", Изд-во ЛГУ, вып.2, 1963.
5. Clark R.A. On the theory of thin elastic toroidal shells. *J. Math. and Phys.*, 29, 1950.
6. С.А.Тумаркин. Асимптотическое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с переходной точкой и его приложение к расчету торообразных оболочек и лопастей. *ПММ*, т.23, вып.5, 1959.
7. Л.Н.Осипова, С.А.Тумаркин. Таблицы для расчета торообразных оболочек. Москва, ВЦ АН СССР, 1963.
8. И.Полах, А.И.Филиппов, В.А.Шамина. Прочностные характеристики металлических торообразных сильфонов. Сообщение ОИЯИ I3-5393, Дубна, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 июня 1971 года.