

С 344, 1р

С - 655

Л Я П

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P 13 - 5722

1863/4-71



5722

Л. М. Сороко

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

ПСЕВДОШУМОВЫЕ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ  
И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ  
ДЛЯ МУЛЬТИПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ  
РЕГИСТРАЦИИ ЧАСТИЦ

1971

Сороко Л.М.

P13-5722

Псевдошумовые последовательности и применение их для мультиплексных систем регистрации частиц

Описываются свойства псевдошумовых последовательностей, используемых в мультиплексных системах регистрации частиц. Дается схема получения псевдошумовых последовательностей с помощью матрицы Адамара. Свойства псевдошумовых последовательностей анализируются в терминах дискретного преобразования Фурье.

Сообщения Объединенного института ядерных исследований  
Дубна, 1971

Soroko L.M.

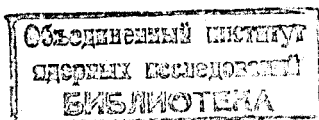
P13-5722

Pseudo-Noise Sequences Applicable to Multiplex  
Systems of Particle Detection

The properties of pseudo-noise sequences used in the multiplex systems of particle detection are presented. The method for the generation of pseudo-noise sequences using the Hadamard matrix is given. The performance of the pseudo-noise sequences are discussed in the terms of the discrete Fourier transform.

The multiplex systems of the particle detection are useful from the economical point of view, if the limit of the equipment is the background error.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.  
Dubna, 1971



P 13 - 5722

Л. М. Сороко

ПСЕВДОШУМОВЫЕ,  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ  
И ПРИМЕНЕНИЕ ИХ  
ДЛЯ МУЛЬТИПЛЕКСНЫХ СИСТЕМ  
РЕГИСТРАЦИИ ЧАСТИЦ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

В предыдущих работах /1,2/ изложены принципы работы мультиплексного сцинтилляционного счётчика и мультиплексной мишени. В основе работы мультиплексного счётчика /1/ лежит метод интегрально-кодowego преобразования углового распределения частиц. Реализация этого метода достигается путем перехода от гомогенного сцинтиллятора к сцинтиллятору, собранному из нескольких элементарных сцинтилляторов. Световые вспышки из каждого элементарного сцинтиллятора попадают только в один из двух световодов, которые примыкают своими рабочими торцами с двух сторон к сцинтиллятору. Закон чередования выхода света из элементарных сцинтилляторов описывается некоторой функцией кодирования  $g(i)$ , которая принимает только два значения: +1 и -1. Существуют определенные значения чисел элементарных сцинтилляторов, а с ними и точек наблюдения, для которых можно построить функции  $g(i)$ , обладающие свойством циклической трансортгоналности. Последнее выражается соотношением

$$g(i) * g(i) \equiv \sum_{k=1}^M g(k) g(i+k) = (M+1) \delta(k) - 1, \quad (1)$$

где  $M$  - число точек наблюдения. Это соотношение является необходимым и достаточным условием того, чтобы кодирование, осуществляемое функцией  $g(i)$ , было обратимым. Иначе говоря, интегрально-кодowego преобразование с ядром  $g(i)$  допускает однозначное восстановление исходной информации.

Теория оптимальных кодов утверждает, что наиболее простая схема кодирования получается тогда, когда ядром, или кодом, преобразования являются так называемые псевдошумовые функции, или псевдошумовые

последовательности. По своим свойствам они очень близки к ортогональным системам.

Можно доказать, что если задана некоторая последовательность  $g(i)$ , такая, что  $g \in (+1, -1)$ , то ее матрица корреляции

$$\rho_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(i) g(i+j), \quad (2)$$

где  $M$  - длина последовательности, полностью определяет информационные свойства последовательности  $g(i)$ . Если  $\rho_{ij} = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера, то последовательности  $g(i)$  и  $g(i+j)$  являются взаимно ортогональными.

Пример. Свойством ортогональности обладает последовательность чисел

$$+1, +1, +1, -1, \quad M=4. \quad (3)$$

Для нее

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [g(i)]^2 = 1, \\ \rho_{1,1+1} &= \frac{1}{4} (-1, +1 +1 -1) = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Наиболее известными и хорошо исследованными псевдослучайными последовательностями являются так называемые  $\bar{m}$ -последовательности, или последовательности максимальной длины регистра сдвига. Последний термин происходит от электронной логической схемы, используемой для построения набора цифр со свойствами этих последовательностей. Длина  $\bar{m}$ -последовательности равна  $M = 2^n - 1$ , где  $n$  - произвольное целое число. Ее матрица корреляции имеет вид

$$\rho(j) = \delta(j) - \frac{1}{M}, \quad (1 \leq j \leq M), \quad (5)$$

где  $j$  – шаг сдвига между  $g(i)$  и  $g(i+j)$  функциями. Последовательности, обладающие такой матрицей корреляции, называются трансортгоналными. Если  $M \gg 1$ , то  $\rho(j) \approx \delta(j)$ , так что при большой длине  $m$ -последовательности они ведут себя, как ортогональные функции.

Из-за благоприятных корреляционных свойств и простоты получения таких последовательностей они нашли широкое применение в системах кодирования.

На рис. 1 показан пример псевдощумовой последовательности  $g(i)$  для  $M = 19$ . Функция  $g(i)$  представлена в  $(2M-1)$  точках, как это требует конструкция мультиплексного сцинтилляционного счётчика/1/ и конфигурация элементов мультиплексной мишени/2/. На рис. 2 приведена матрица корреляции  $\rho(j)$ , представленная без нормирующего множителя в виде корреляции

$$g(i) * g(i-8) \equiv \sum_{i=1}^M g(i)g(i-8) = (M+1)\delta(i-8) - 1. \quad (6)$$

Рис.3 иллюстрирует последовательные операции выработки интегрально-кодированного образа искомого углового распределения частиц  $f(i)$  с помощью составного сцинтиллятора мультиплексного сцинтилляционного счётчика. Индекс  $i$  указывает угловой интервал наблюдения в случае, когда угловое распределение  $f(i)$  регистрируется традиционным сцинтилляционным

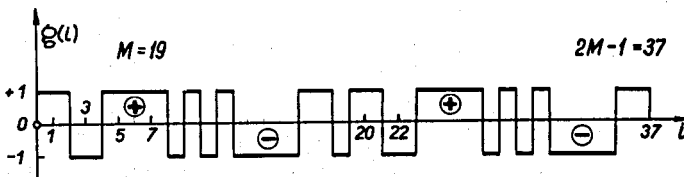


Рис. 1. Пример псевдощумовой последовательности для  $M = 19$ .

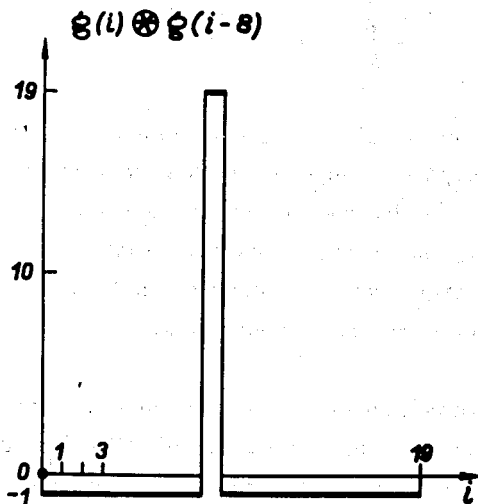


Рис. 2. Пояснение свойства трансортгоналности псевдошумовой последовательности, приведенной на рис. 1.

$g(l)$		*1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1 *1																		
Узел $l$	$f(l)$	Положение составного сцинтиллятора																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28
2	24	-24	24	-24	24	-24	24	-24	24	-24	24	-24	24	-24	24	-24	24	-24	24	-24
3	21	21	-21	21	-21	21	-21	21	-21	21	-21	21	-21	21	-21	21	-21	21	-21	21
4	18	18	18	-18	18	-18	18	-18	18	-18	18	-18	18	-18	18	-18	18	-18	18	-18
5	15	-15	15	-15	15	-15	15	-15	15	-15	15	-15	15	-15	15	-15	15	-15	15	-15
6	12	-12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12
7	10	-10	-10	-10	10	-10	10	-10	10	-10	10	-10	10	-10	10	-10	10	-10	10	-10
8	7	-7	-7	-7	-7	7	-7	7	-7	7	-7	7	-7	7	-7	7	-7	7	-7	7
9	5	5	-5	-5	-5	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5	-5	5	-5
10	3	-3	3	-3	-3	-3	3	-3	3	-3	3	-3	3	-3	3	-3	3	-3	3	-3
11	2	2	-2	2	-2	-2	-2	2	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2
12	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
13	2	2	-2	-2	2	-2	-2	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2	2	-2	2
14	4	4	-4	-4	-4	-4	4	-4	4	-4	4	-4	4	-4	4	-4	4	-4	4	-4
15	9	9	9	9	-9	9	-9	9	-9	9	-9	9	-9	9	-9	9	-9	9	-9	9
16	12	12	12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12	-12	12
17	11	-11	11	11	11	-11	11	-11	11	-11	11	-11	11	-11	11	-11	11	-11	11	-11
18	10	-10	-10	10	10	10	10	-10	10	-10	10	-10	10	-10	10	-10	10	-10	10	-10
19	9	9	-9	-9	9	9	9	9	-9	9	-9	9	-9	9	-9	9	-9	9	-9	9
$\Sigma$	110	125	118	108	119	120	132	135	113	115	99	109	100	90	81	76	87	97	90	
$f \otimes g \cdot \Sigma$	33	78	83	95	84	77	71	68	90	88	104	94	103	113	122	127	116	106	113	
	*17	*47	*33	*13	*35	*49	*81	*67	*23	*27	*5	*6	*3	*23	*41	*57	*29	*9	*23	

$\sum f_i \cdot 203$        $\sum f \otimes g \cdot 203$

Рис. 3. Таблица, поясняющая последовательность работы мультиплексного счётчика с подвижным сцинтиллятором (см. текст).

счётчиком с угловым разрешением и шагом, равными одному угловому элементу. Полученные результаты традиционного счёта представлены на рис. 3 во втором столбце. Предполагая, что данная реализация  $f(i)$  остаётся "замороженной", проводим измерения с помощью мультиплексного счётчика с составным подвижным скинтиллятором. В зависимости от расположения элементарных скинтилляторов в составном скинтилляторе искомая реализация  $f(i)$  будет кодироваться каждый раз по-разному. Знаки перед числами в третьем столбце на рис. 3 показывают, в какие из двух счётчиков пошел импульс света. Знак (+) означает, что свет входит в нижний световод, а знак (-) показывает, что свет идет в верхний световод. Счётчик нижнего фотоумножителя зарегистрирует 110 импульсов, а счётчик верхнего - 93. Биполярный отсчёт составит +17. При втором положении составного скинтиллятора числа импульсов соответственно равны: +125 и -78. Показатель биполярного счётчика равен +47. Каждый раз биполярный счётчик дает значения свертки

$$f(i) * g(i) = \sum_{k=1}^M f(k) g(i+k), \quad (7)$$

которые приведены на рис. 3 в нижней строке.

Для того чтобы получить исходные данные, результаты, полученные с помощью составного скинтиллятора, подвергают декодированию. Эта операция сводится к корреляции полученных данных с функцией  $g(i)$ .

Существует несколько методов построения псевдослучайных последовательностей. Один из них состоит в использовании бинарного регистра сдвига, работающего циклически по определенному алгоритму. Построение алгоритма сводится к нахождению неразложимого примитивного полинома степени  $n$  в поле двоичных чисел (+1, -1). Затем этот полином используют в качестве рекуррентной формулы.

Второй способ построения псевдослучайных последовательностей основан на свойствах матрицы Адамара и кронекеровского алгоритма его построения.

Как известно, матрицей Адамара называется квадратная матрица, элементами которой являются числа +1 и -1. Основное свойство матрицы Адамара состоит в том, что ее строки и столбцы взаимно ортогональны



соответственно. Это свойство записывается в матричной форме так:

$$H H = N I, \quad (8)$$

где  $H$  – матрица Адамара, ранг которой равен  $N$ , а  $I$  – единичная матрица.

Простейшей матрицей Адамара, или геном семейства матриц Адамара, является матрица второго ранга

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм построения матрицы Адамара для  $N = 2^n$ , где  $n$  – целое число, сводится к следующему. Если  $H$  – матрица Адамара, то матрица

$$G = \begin{bmatrix} H & H \\ H & -H \end{bmatrix} \quad (10)$$

также является матрицей Адамара.

Более общий метод построения матриц Адамара выражается следующей теоремой о кронекеровском произведении. Если заданы две квадратные матрицы  $A$  и  $B$ , соответственно рангов  $N$  и  $M$ , то кронекеровским произведением матриц  $A$  и  $B$  называется матрица

$$A \times B = [a_{ij} B]. \quad (11)$$

Если  $A$  и  $B$  – матрицы Адамара, то и кронекеровская матрица  $A \times B$  /11/ также является матрицей Адамара.

Ряды (и столбцы) матрицы Адамара идентифицируют по числу изменений знаков среди элементов в данном ряде. Это число называют секвентой.

Для простейшей матрицы Адамара с  $N = 2$  имеем

Матрица	→	Секвента ряда
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	→	0
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	→	1

(12)

Матрица Адамара  $H_3$  с  $N = 8 = 2^3$  приведена на рис. 4. Матрицы Адамара с  $N = 2$  и  $N = 4$  обведены пунктирными линиями. Каждая матрица Адамара предыдущей степени ( $n-1$ ) является геном для построения матрицы Адамара последующей степени  $n$ . На рис. 4 индекс  $j$  указывает значения секвенты в столбцах, а индекс  $k$  - значение секвенты в строках.

$j =$	0	7	3	4	1	6	2	5	$K =$	•
-------	---	---	---	---	---	---	---	---	-------	---

$H_3 =$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0
	+	-	+	-	+	-	+	-	-	7
	+	+	-	-	+	+	-	-	-	3
	+	-	-	+	+	-	-	-	-	4
	+	+	+	+	-	-	-	-	-	1
	+	-	+	-	-	+	-	+	-	6
	+	+	-	-	-	-	+	+	-	2
	+	-	-	+	-	+	+	-	-	5

Рис. 4. Матрица Адамара  $H_3$  и последовательные матрицы-гены.

Матрицу Адамара можно преобразовать к виду, который изоморфен функциям Уолша, и в таком преобразованном виде ее называют матрицей Уолша. Матрицы Уолша отличаются от матриц Адамара тем, что строки матрицы Уолша расположены в порядке возрастания секвенты (рис. 5).

Строки и столбцы матрицы Адамара (рис. 4) можно подвергнуть перестановкам, пока не появится подматрица  $G$ , строки которой обла-

$J =$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$K =$
$Wal_3(k,j) =$	+	+	+	+	+	+	+	+	$0$
	+	+	+	+	-	-	-	-	$1$
	+	+	-	-	-	-	+	+	$2$
	+	+	-	-	+	+	-	-	$3$
	+	-	-	+	+	-	-	+	$4$
	+	-	-	+	-	+	+	-	$5$
	+	-	+	-	-	+	-	+	$6$
	+	-	+	-	+	-	+	-	$7$

Рис. 5. Матрица Адамара со строками и столбцами, расположенными в порядке возрастания секвенты. Такая матрица изоморфна совокупности из  $N$ -функций Уолша.

дают свойством циклической ортогональности. Матрица  $G$  получается из преобразованной матрицы Адамара  $H_G$  путем вычеркивания элементов, которые стоят в первой строке и первом столбце. На рис. 6 показаны матрица  $H_G$  и матрица  $G$ . Матрица  $G$  полностью задается своей первой строкой. Остальные получаются циклической перестановкой. Вместо свойства ортогональности строка матрицы  $G$  приобретает свойство трансортогональности

$$g(i) * g(i+k) = (M+1) \delta(k) - 1. \quad (13)$$

Таким образом, функция  $g(i)$ , описывающая псевдошумовую последовательность символов  $+1, -1$ , изоморфна строке усеченной матрицы Адамара с переставленными столбцами и строками для достижения циклических свойств.

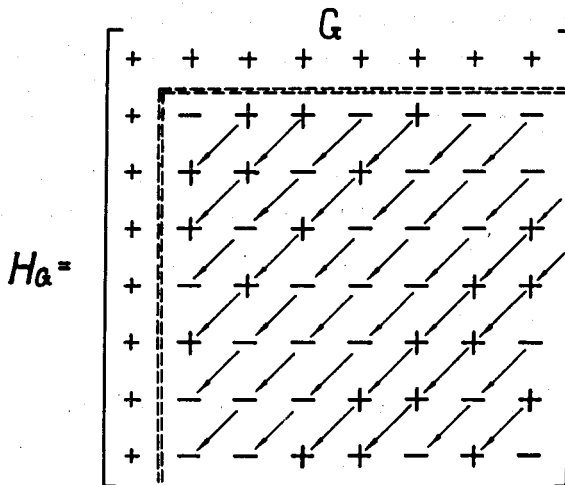


Рис. 6. Матрица Адамара  $H_G$  с подматрицей  $B$ . Последняя обладает свойствами циклической перестановки строк и полностью определяется всего  $(N-1)$  элементами.

Тот факт, что весь массив из  $N^2$  элементов матрицы Адамара  $H$  сводится к массиву из  $(N-1)$  независимых символов в матрице  $G$ , указывает на то, что матрица Адамара, как и многие другие матрицы, обладает избыточностью. Выделение только одних независимых элементов служит основой для сокращения числа вычислительных операций при умножении матриц с помощью электронно-вычислительной машины.

В заключение рассмотрим свойства функции  $g(i)$ , осуществляющей псевдошумовое кодирование исходных данных в мультиплексных системах регистрации частиц, с точки зрения обобщенного линейного фильтра и дискретного преобразования Фурье.

Известно, что инвариантный во времени линейный фильтр можно полностью охарактеризовать одной функцией  $g(i)$ . При этом сигнал на выходе такого фильтра равен свертке сигнала на входе  $f(t)$  с функцией  $g(t)$

$$r(t) = f(t) * g(t) = \int f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau. \quad (14)$$

Если совершить преобразование Фурье над обеими частями равенства (14), то получим

$$R(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega), \quad (15)$$

где  $R(\omega)$ ,  $F(\omega)$  и  $G(\omega)$  – фурье-образы функций  $r(t)$ ,  $f(t)$  и  $g(t)$ , соответственно.

Например,

$$G(\omega) = \int g(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (16)$$

Если функции  $f(t)$ ,  $g(t)$  и  $r(t)$  заданы в дискретной последовательности точек  $i$ , где  $1 \leq i \leq M$ , то вместо обычного преобразования Фурье вводят дискретное преобразование Фурье.

Например, для функции  $g(i)$  дискретное преобразование Фурье имеет вид

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^M e^{-i \frac{2\pi}{M} \omega k} g(k) \quad (1 \leq \omega \leq M). \quad (17)$$

На рис. 7 приведена псевдошумовая последовательность  $g(i)$  для случая  $M = 19$  и абсолютное значение дискретного фурье-образа

$$|G(\omega)| = \sqrt{|Re G(\omega)|^2 + |Im G(\omega)|^2}, \quad (18)$$

где

$$Re G(\omega) = \sum_{k=1}^M \cos \frac{2\pi}{M} \omega k \cdot g(k) \quad (1 \leq \omega \leq M), \quad (19)$$

$$Im G(\omega) = \sum_{k=1}^M \sin \frac{2\pi}{M} \omega k \cdot g(k) \quad (1 \leq \omega \leq M). \quad (20)$$

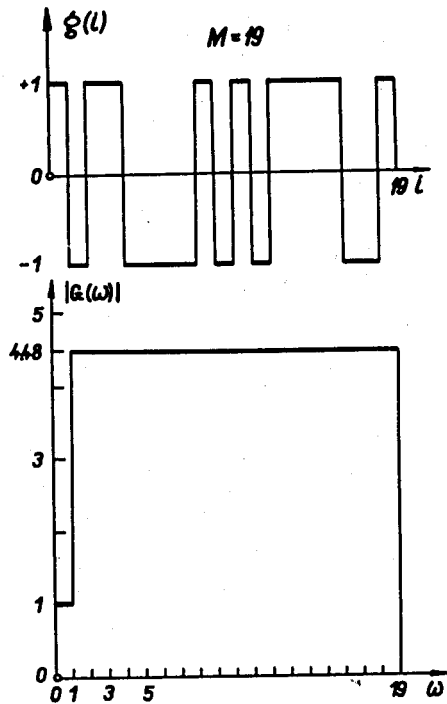


Рис. 7. Дискретный фурье-образ функции  $g(i)$ . Приведены функция  $g(i)$  и абсолютные значения фурье-образа  $G(\omega)$ . Видно, что частотная характеристика обладает свойствами идеального линейного фильтра за исключением нулевой частоты  $\omega = 1$ .

На рис. 8 даны дискретные функции  $\operatorname{Re} G(\omega)$  и  $\operatorname{Im} G(\omega)$ . Из рис. 7 видно, что эффективный линейный фильтр, выполняющий функцию кодирования с помощью псевдошумовой последовательности  $g(i)$ , обладает свойствами идеального линейного фильтра с равномерной частотной характеристикой. Действительно (см. рис. 7),  $|G(\omega)|$  не зависит от частоты  $\omega$  во всем диапазоне частот от  $\omega = 2$  до  $\omega = 19$ . Исключение составляет "нулевая частота", соответствующая значению  $\omega = 1$ . Иначе говоря, фильтр  $g(i)$  передает без искажения все частоты за исключением только нулевой частоты. А из рис. 8 видно, что это происходит вследствие того, что

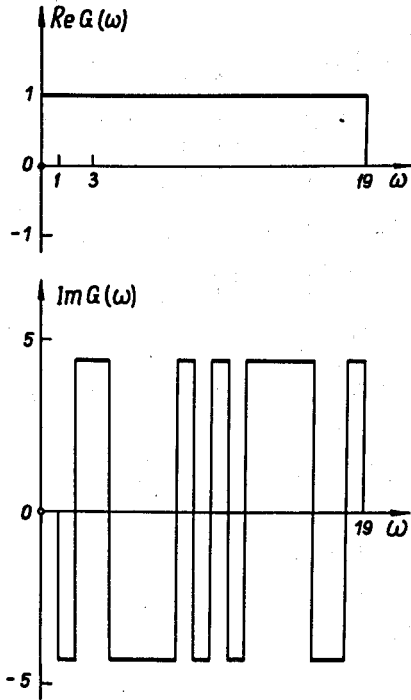


Рис. 8. Действительная и мнимая части дискретного фурье-образа функции  $g(i)$ .

при нулевой частоте теряется информация о мнимой части дискретного фурье-образа  $Im G(\omega)$ . Этот дефект линейного фильтра  $g(i)$  легко устраним. Действительно, нулевая частота отвечает информации о среднем значении исходной функции  $f(i)$ , которую можно найти следующим образом: достаточно воспользоваться соотношением

$$\sum_1 f(i) * g(i) * g(i) = (M+1) \sum_1 f(i) = (M+1) F(1). \quad (21)$$

А поскольку всегда

$$|G(1)| = 1, \quad (22)$$

то

$$|R(1)| = |F(1)| \cdot |G(1)| = |F(1)| = F(1). \quad (23)$$

Поэтому окончательный результат после стадии восстановления имеет вид

$$f_{\text{восст.}}(i) = \frac{1}{M+1} [(f * g) * g + \sum_1 f * g * g]. \quad (24)$$

В заключение автор выражает благодарность Т.А. Стриж за помощь в работе.

#### Л и т е р а т у р а

1. Л.М. Сороко. Сцинтилляционный счётчик с использованием преобразования Адамара. Сообщение ОИЯИ, Р13-5696, Дубна, 1971.
2. Л.М. Сороко. Мультиплексная мишень. Сообщение ОИЯИ, Р13-5699, Дубна, 1971.
3. Цифровые методы в космической связи. Под ред. С. Голомба, "Связь", Москва, 1969.
4. У. Питерсон. Коды, исправляющие ошибки. "МИР", Москва, 1964.
5. J.A. Decker, Jr. Experimental Hadamard-Transform Spectrometry in 1970 Proc. Symp. and Workshop on Application of Walsh Functions. Ed. C.A. Bass, p.p. 101-105, 1970.
6. L.R. Welch. Walsh Functions and Hadamard Matrices, *ibid.*, p.p. 163-165.

Рукопись поступила в издательский отдел  
30 марта 1971 года.