

Н-41
6/IX-68
ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P13 - 4014



Б.С.Неганов

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

О ПОЛУЧЕНИИ СВЕРХНИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
ПУТЕМ РАСТВОРЕНИЯ He^3 В He^4

1968

Введение

Попытки систематического рассмотрения процесса растворения He^3 в He^4 были предприняты уже в ряде работ ^{/1,2,3/} путем приложения к раствору модели слабо взаимодействующего газа Ферми, развитой в работах Бардина и др. ^{/4/} и Эбнера ^{/5/}. Введение этой модели оказалось необходимым для объяснения большой растворимости He^3 в He^4 при стремлении температуры раствора к 0°K , предсказанной ранее в работе ^{/6/} и подтвержденной экспериментально в работе ^{/7/}, что и стимулировало большой теоретический и практический интерес к этой проблеме. Последний был подкреплен в сильной степени первыми удачными опытами ^{/8,9/} по применению процесса растворения для достижения сверхнизких температур, предложенного в 1962 году Лондоном, Кларком и Мендозой ^{/10/}. При этом они исходили из менее благоприятной ситуации, вытекающей из принятой в то время модели раствора как идеального газа, равновесная плотность которого предполагалась изменяющейся пропорционально $T^{3/2}$ из-за конденсации газа. Такая модель достаточно хорошо подтверждается прямыми измерениями теплоемкости растворов и его равновесных концентраций, выполненными к тому времени до температур около $0,4^\circ\text{K}$. Природа, к счастью, оказалась намного щедрее и богаче, чем эти простые представления, предоставив возможность создать новый, более мощный способ получения сверхнизких температур по сравнению с разработанным ранее методом адиабатического размагничивания. Основным преимуществом этого метода является возможность создания стационарного режима охлаждения при температурах порядка $0,01^\circ\text{K}$ и ниже с существенно большей холодо-

производительности и более простыми средствами, чем это можно было надеяться достигнуть разработкой циклических магнитных установок, аналогичных установке Даунта. Вторым, не менее важным, преимуществом является возможность эффективного охлаждения любых веществ, помещаемых непосредственно в сверхтекучий раствор, обладающий при этих температурах сравнительно высокой теплопроводностью. Кроме того, достижение равновесной температуры облегчается из-за диффузии He^3 в растворе, что эквивалентно дополнительному охлаждению тела газовым потоком, имеющим температуру раствора. Эти преимущества в сочетании с простотой метода дают основание считать, что растворение He^3 в He^4 станет основным способом получения сверхнизких температур в ближайшие годы.

Актуальной проблемой в настоящее время является вопрос оптимизации установок, работающих на растворении, решение которого позволит приблизиться к предельной температуре, доступной для данного метода. Используя метод разового растворения, Вилчес и Уитли ^{/11/} и Пешков ^{/12/} уже получили, правда, на короткое время, температуры порядка нескольких миллиградусов Кельвина. В стационарном режиме группа Уитли достигла температуры $10 \text{ m}^0 \text{ K}$ при скорости растворения около $1,6 \cdot 10^{-5}$ моль/сек. В Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ в настоящее время действует установка, в которой в непрерывном режиме удается поддерживать температуру $\approx 8 \text{ m}^0 \text{ K}$ при скорости растворения около 10^{-4} моль/сек. Однако дальнейшее продвижение в область более низких температур сопряжено с большими трудностями, в основном из-за отсутствия полного набора экспериментальных данных о свойствах раствора. Теоретические же предсказания имеют пока небольшую точность и не являются в достаточной мере самосогласованными. Поэтому предстоит еще большая экспериментальная и теоретическая работа в этой области.

Целью данной работы является попытка произвести количественный анализ некоторых процессов, имеющих место при растворении He^3 в He^4 в холодильных установках этого типа, в надежде, что это может помочь в какой-то степени оптимизировать эти устройства. В связи с тем, что такие установки для получения температур до $0,1^0 \text{ K}$ весьма просты и не критичны к выбору их геометрических параметров, здесь будут рас-

смагиваться процессы только при более низких температурах, при которых невозможно сконструировать установки со значительным запасом по всем параметрам, и в связи с чем вопрос их оптимизации становится важным. Здесь не будут рассматриваться теоретические вопросы, которые достаточно подробно изложены в упомянутых выше работах Уитли ^{/1/} и Рейдбаа ^{/2/}, за исключением некоторых элементарных сведений, необходимых для вхождения в курс дела. Как будет видно ниже, для практического применения достаточно знание только основных экспериментальных величин, таких как предельная концентрация раствора, вязкость, теплопроводность, тепловое сопротивление на границе раздела металл-жидкость и, главным образом, теплоемкость, которая по существу "знает" все, что можно знать о взаимодействии атомов He^3 в растворе как друг с другом, так и со сверхтекучей фазой He^4 . В связи с этим, желая в какой-то степени восстановить равновесие в мире терминов, "нарушенное" Уитли его "пристрастием" к химическому потенциалу и энтальпии и "пренебрежительным" отношением к энтропии, постараемся здесь обойтись без первых, считая их менее определенными и более изменчивыми, чем энтропия, имеющая, благодаря Нернсту, твердую точку опоры в нуле.

Теоретическая модель раствора как вырожденного ферми-дираковского газа будет использоваться здесь только для более наглядного описания процесса растворения и анализа теплового эффекта при дросселировании раствора. Согласно этой модели, рассматриваемый ниже метод получения низких температур является, по существу, дальнейшим развитием "классического" метода, основанного на испарении жидкостей, и заключающемся в том, что с целью получения более низких температур необходимо уменьшение скрытой теплоты испарения и соответствующее увеличение упругости пара достигается путем испарения жидкости в две стадии: сначала в "вакуум" He^4 с реализацией некоторой малой доли полной теплоты испарения, а затем, при более высокой температуре, He^3 переходит из промежуточного вспомогательного "вакуума" He^4 в физический вакуум с реализацией остальной части полной теплоты испарения He^3 .

Со времени осуществления первых удачных попыток ^{/8,9/} создания рассматриваемых здесь установок появилось уже много работ на эту тему, неполный список которых приведен в конце данной статьи (работы, отмеченные звездочкой). Полезные практические советы можно найти в пре-

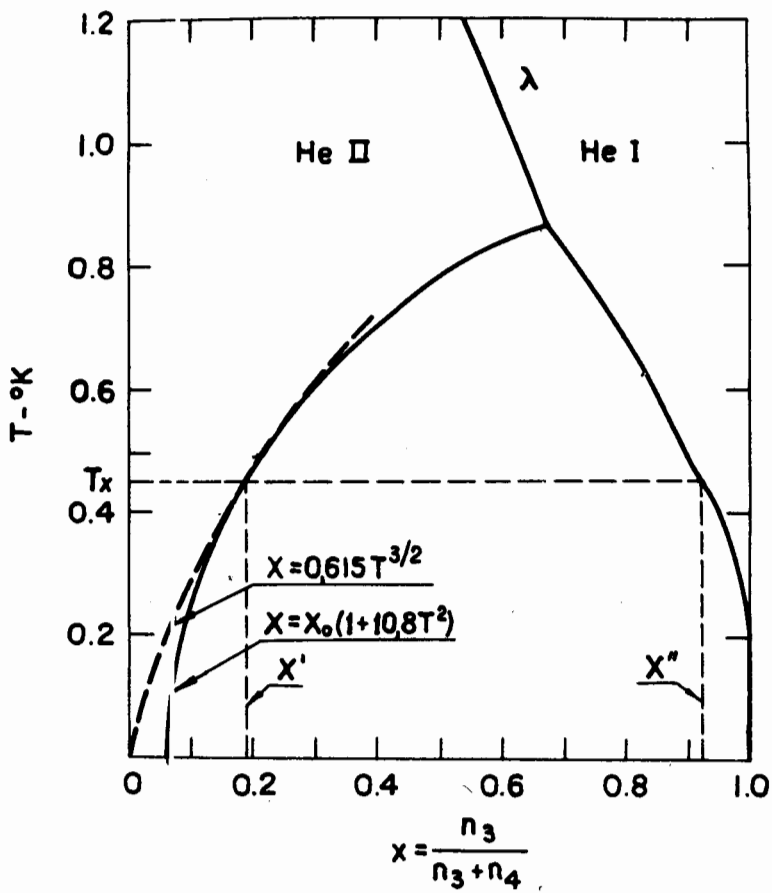


Рис.1. Фазовая диаграмма растворов.

восходно написанной работе Уитли и др. /3/, где, в частности, до мельчайших подробностей дано описание их опыта работы с рефрижераторами на растворении.

Теоретическая модель и принцип действия

Как известно, жидкие растворы He^3 в He^4 при температурах ниже $0,86^\circ\text{K}$ испытывают расслоение на две фазы /13/, отличающиеся концентрациями растворенного в них He^3 и, соответственно, плотностью. При равновесии фаз эти концентрации больше не являются произвольными параметрами, а суть однозначные функции температуры, совпадающие в точке появления фаз. Соответствующая этим функциям кривая, являющаяся фазовой диаграммой раствора, показана на рис.1, где по оси ординат отложена температура, а по оси абсцисс – концентрация He^3 в фазах, определяемая как

$$x = \frac{n_3}{n_3 + n_4},$$

где n_3 и n_4 – число частиц He^3 и He^4 в единице объема, соответственно. Из этой диаграммы можно определить значения концентраций растворов x' и x'' при соприкосновении фаз в зависимости от их температуры T_x .

Было установлено, что верхняя фаза, богатая He^3 , не обладает сверхтекучестью, по крайней мере, до температуры порядка $0,003^\circ\text{K}$, в то время как нижняя фаза всегда сверхтекуча. Однако это свойство относится только к He^4 , находящемуся в фазе, и означает, что его макродвижения в растворе со скоростью, меньше определенной, не приводят к увлечению атомов He^3 . Аналогично атомы He^3 не замечают движения He^4 , рассеиваясь лишь на его тепловых возбуждениях и испытывая столкновения друг с другом. С понижением температуры плотность тепловых возбуждений He^4 уменьшается пропорционально T^3 , так что при $T < 0,6^\circ\text{K}$ ими уже можно пренебречь. В этой области температур длина свободного пробега атомов He^3 определяется только их концентрацией. В связи с тем, что теплоемкость He^4 , определяемая плотностью возбуждений, в этой области температур тоже пренебрежимо

мала, термодинамические свойства раствора в нижней фазе оказываются близки свойствам идеального газа, и Померанчук^{/14/} был, по-видимому, первым, кто успешно применил такую модель для описания слабых растворов He^3 в He^4 еще до установления фазового расслоения раствора.

Наиболее интересной особенностью, вытекающей из фазовой диаграммы раствора, показанной на рис.1, является то, что когда концентрация He^4 в легкой фазе, равная $(1-X)$, с понижением температуры стремится к нулю и фаза вырождается практически в чистый He^3 , концентрация He^3 в тяжелой фазе изменяется не пропорционально $T^{3/2}$, как ожидалось ранее, а ниже $0,4^{\circ}K$ начинает отступать от закона $T^{3/2}$, переходя в зависимость

$$x' = x_0 (1 + 10,8 T^2),$$

где x_0 -растворимость при $T=0$, равная $0,064 + 0,05$ ^{/15/}. Прежнюю экстраполяцию растворимости He^3 $x = 0,6 T^{3/2}$ в область более низких температур, показанную на рис.1 пунктирной линией, можно теперь условно назвать "идеальной", т.к. она ограничивает область растворов, лежащих по левую сторону от этой кривой, описание которых возможно в рамках модели идеального газа. Отступление от идеальной растворимости при стремлении температуры к нулю означает, что фазовый объем, приходящийся на частицу в импульсном пространстве, начинает сокращаться, и поэтому влияние статистики газа, несущественное в области $T \geq 0,4^{\circ}K$, должно становиться все более определяющим по мере отступления от закона $T^{3/2}$ в сторону большего содержания He^3 в растворе. Действительно, в области, где растворимость близка к идеальной, теплоемкость насыщенных растворов соответствует теплоемкости идеального газа и равна $3/2 R$ на моль растворенного He^3 . В области более низких температур теплоемкость начинает уменьшаться в соответствии с поведением теплоемкости ферми-дираковского газа, уравнением состояния которого является

$$PV = RT \left(1 + \frac{\pi^{3/2}}{4} \frac{n_0 \hbar^3}{(mkT)^{3/2}} \right), \quad (1)$$

где n_0 - число частиц в единице объема, равное $n_0 = \frac{n_4}{1-x} \approx x n_4$,

при $x \ll 1$, V - объем моля газа, k - постоянная Больцмана, m - масса частиц и \hbar - постоянная Планка.

Из формулы (1), в частности, следует, что если концентрация изменяется пропорционально $T^{3/2}$, степень вырождения газа не меняется, и, если параметр вырождения

$$\frac{\pi^{3/2}}{4} \frac{n_0 \hbar^3}{(mkT)^{3/2}} \ll 1,$$

то применима статистика Больцмана. Формула (1), однако, справедлива только при $T > T_v$, где T_v - температура вырождения газа

$$T_v = \frac{\hbar^2 n_0^{2/3}}{km}$$

Поскольку концентрация He^3 в растворе при $T \leq 0,1^\circ\text{K}$ практически не меняется, оставаясь конечной при $T = 0$, такой раствор может быть описан только моделью вырожденного газа Ферми, внутренняя энергия которого, если пренебречь взаимодействием атомов He^3 между собой, равна

$$U = \frac{3}{5} N W_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{W_F} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где $W_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n_0)^{2/3}$ - энергия Ферми.

Дифференцируя уравнение (2) по температуре, получим выражение для теплоемкости газа при постоянном объеме

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\pi^2}{2} R \frac{kT}{W_F} = \alpha T, \quad (3)$$

где $\alpha = \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{m R k}{\hbar^2 n_0^{2/3}}$; R - газовая постоянная.

где n_0 - число частиц в единице объема, равное $n_0 = \frac{n_4}{1-x} \approx x n_4$

при $x \ll 1$, V - объем моля газа, k - постоянная Больцмана, m - масса частиц и \hbar - постоянная Планка.

Из формулы (1), в частности, следует, что если концентрация изменяется пропорционально $T^{3/2}$, степень вырождения газа не меняется, и, если параметр вырождения

$$\frac{\pi^{3/2}}{4} \frac{n_0 \hbar^3}{(mkT)^{3/2}} \ll 1,$$

то применима статистика Больцмана. Формула (1), однако, справедлива только при $T > T_v$, где T_v - температура вырождения газа

$$T_v = \frac{\hbar^2 n_0^{2/3}}{km}$$

Поскольку концентрация He^3 в растворе при $T \leq 0,1^\circ K$ практически не меняется, оставаясь конечной при $T = 0$, такой раствор может быть описан только моделью вырожденного газа Ферми, внутренняя энергия которого, если пренебречь взаимодействием атомов He^3 между собой, равна

$$U = \frac{3}{5} N W_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{W_F} \right)^2 \right], \quad (2)$$

где $W_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n_0)^{2/3}$ - энергия Ферми.

Дифференцируя уравнение (2) по температуре, получим выражение для теплоемкости газа при постоянном объеме

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\pi^2}{2} R \frac{kT}{W_F} = \alpha T, \quad (3)$$

где $\alpha = \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{m R k}{\hbar^2 n_0^{2/3}}$; R - газовая постоянная.

Так как атомы He^3 в растворе не являются свободными частицами в буквальном смысле слова, а находятся в некотором усредненном поле, создаваемом атомами He^4 , согласно с экспериментальным значением теплоемкости получается, если вместо массы свободной частицы в формулу (3) подставить значение $m^* = 2,5 m$, называемое эффективной массой квазичастиц He^3 в растворе. Очевидно, величина m^* при изменении концентрации раствора может испытывать некоторые вариации в зависимости от изменения среднего потенциала, создаваемого атомами He^4 , и из-за изменения потенциала взаимодействия между атомами He^3 при изменении среднего расстояния между ними. Из измерений теплоемкости растворов с концентрациями 1,3 и 5%, произведенных Андерсоном и др.^{/16/}, следует, что эффективная масса уменьшается примерно на 3% с уменьшением концентрации раствора от 5 до 1,3% и в соответствии с потенциалом, введенным Бардиным и др., должна иметь значение $2,34 m$ при нулевой концентрации раствора. Предполагая неизменным потенциал, создаваемый атомами He^4 , и используя экспериментальные данные о растворимости He^3 , можно найти пользуясь теорией Бардина и др.^{/4/}, разность энергий связи отдельной квазичастицы He^3 в He^4 и в чистом He^3 , которая оказывается равной, по расчетам Уитли, 2 дж/моль , а по расчетам Рейдба, с использованием потенциала Эбнера^{/5/} — $2,1 \text{ дж/моль}$, из условия равновесия фаз. При отсутствии такого взаимодействия между атомами He^3 в растворе из того же условия следует, что разность этих энергий должна была бы равняться энергии квазичастиц на поверхности Ферми с массой $2,34 m$ при предельной концентрации 6,4%, т.е.

$$E = N W_F = \frac{\hbar^2}{2 m^*} \left(3 \pi^2 \frac{x n_0}{1-x} \right)^{2/3} N = 3,4 \text{ дж/моль.}$$

Разница этих энергий — $1,4 \text{ дж/моль}$ — и есть, по-видимому, средняя потенциальная энергия взаимодействия квазичастиц He^3 в растворе, которая может быть проверена путем измерения осмотического давления He^3 в растворе, на величине которого она должна проявляться прямым образом. Если эта величина обусловлена изменением взаимодействия квазичастиц со сверхтекучей фазой, то она, естественно, не вызовет заметно-

го изменения осмотического давления, влияя лишь на величину эффективной массы квазичастиц в растворе. Осмотическое давление He^3 в растворе есть давление ферми-газа, уравнение состояния которого можно получить, воспользовавшись общей формулой, справедливой для любого газа

$$PV = \frac{2}{3} U,$$

где U - внутренняя энергия газа. Подставляя значение внутренней энергии идеального ферми-газа, получим известную формулу

$$P = \frac{2}{5} n_0 W_F \left[1 + \frac{5}{12} \pi^2 \left(\frac{kT}{W_F} \right)^2 \right], \quad (4)$$

которая, в отличие от уравнения (1), правильно отражает зависимость давления от числа частиц в единице объема при температурах ниже температуры вырождения газа. Применяя уравнение (4) к раствору при $m^* = 2,5m$, получим осмотическое давление примесей He^3 в растворе при $T=0$, равное 21,5 мм Hg и, например, при $T = 0,1^\circ\text{K}$ 22,1 мм Hg. Если же учесть взаимодействие атомов He^3 , это давление, согласно расчетам Уитли, равно 10,6 мм Hg, а по расчетам Рейдбая - 12,2 мм Hg при $T=0$, и возрастает с температурой примерно на ту же величину, что и по формуле (4).

Таким образом, в этой области температур тепловой вклад в давление сравнительно мал, и все давление обусловлено, главным образом, нулевым давлением ферми-газа, сильно зависящим от взаимодействия квазичастиц между собой. Это давление и имеет решающее значение в практическом использовании растворения для получения сверхнизких температур.

Таким образом, конечная растворимость He^3 в He^4 при $T=0$ не является чем-то удивительным, а есть простое следствие существования разности химических потенциалов отдельного атома He^3 в жидком He^3 и жидком He^4 , равенство которых априори нигде не следует. Если бы химический потенциал, т.е. энергия связи атома He^3 , например, в чистом He^4 , оказался меньше по абсолютной величине, чем в чистом He^3 , растворимость была бы нулевой при конечной температуре.

В обратном случае при соприкосновении жидкого He^3 с чистым He^4 , равновесие в системе может быть восстановлено только за счет перехода определенного числа атомов He^3 в He^4 до тех пор, пока химический потенциал в растворе не уменьшится за счет увеличения кинетической энергии квазичастиц на поверхности Ферми до его значения в чистом He^3 . При этом слабое взаимодействие между квазичастицами He^3 , увеличивающее химический потенциал, приводит к некоторому дополнительному возрастанию равновесной концентрации раствора.

Процессе растворения He^3 является фазовым переходом первого рода, сопровождающимся поглощением приведенного тепла q/T , равного разности энтропий двух фаз, находящихся в тепловом равновесии, т.е. для скрытой теплоты перехода справедливо равенство

$$q = T \Delta S = T \int_0^T \frac{C'_p}{T} dT - T \int_0^T \frac{C''_p}{T} dT,$$

где C'_p и C''_p — теплоемкости при постоянном давлении раствора и He^3 , соответственно.

Так как теплоемкость He^3 , являющегося ферми-жидкостью, есть также линейная функция температуры

$$C'_p = \beta T, \quad \beta = 25 \text{ дж/моль} \cdot \text{град}^2 / 16/$$

а теплоемкость раствора C''_p , как будет показано ниже, при $T \leq 0,1^\circ\text{K}$ близка к C'_v , для теплоты перехода q получим простое выражение

$$q = (\alpha - \beta) T^2.$$

На основании уравнения Клапейрона-Клаузиуса можно теперь найти зависимость упругости "пара" He^3 в "вакууме" He^4 от температуры, которая должна быть близка получаемой по формуле (4).

Уравнение Клайперона-Клаузиуса можно записать в виде

$$-\frac{dp}{dt} = \frac{q}{T(V_1 - V_2)} = \frac{(\alpha - \beta) T}{V_1 - V_2}, \quad (5)$$

где V_1 и V_2 - молярные объемы пара и жидкой фазы, соответственно, которые можно считать при низких температурах постоянными. Интегрируя уравнение (5), получим

$$P_T = \frac{(\alpha - \beta) T^2}{2(V_1 - V_2)} + P_0,$$

где P_0 - давление при нулевой температуре. Молярные объемы с достаточной точностью определяются уравнением [2]

$$V_{1/2} = (27,6/x + 7,6 + 1,65 x^2) \text{ см}^3/\text{моль}.$$

Подставляя в формулу для P_T значение $V_1 = 430 \text{ см}^3/\text{моль}$, $V_2 = 37 \text{ см}^3/\text{моль}$, $\alpha = 107 \text{ дж/моль} \cdot \text{град}^2$ и $\beta = 25 \text{ дж/моль} \cdot \text{град}^2$, получим

$$P_T = \frac{\alpha T^2}{2,4 V_1} + P_0.$$

Тепловой член в этом выражении только на 20% больше того, который следует из уравнения (4). Для сравнения его можно переписать в виде

$$P_T = \frac{\alpha T^2}{3 V_1} + P_0,$$

и, следовательно, уравнением состояния идеального газа (4) можно пользоваться для оценок в первом приближении.

Таким образом, согласно физической модели раствора, процесс растворения He^3 является испарением ферми-жидкости с превращением ее в ферми-газ, находящийся в "вакууме" He^4 , которым он, по существу, является при $T < 0,1^\circ \text{K}$ в силу бозевского характера энергетического спектра возбуждений. Особенностью этого процесса, отличающего его от испарения, например, той же жидкости в обычный физический вакуум, является только то, что теплота перехода есть квадратичная функция температуры из-за конечной растворимости He^3 при $T=0$, благодаря чему равновесная упругость пара, роль которой играет осмотическое давление He^3 в растворе, имеет конечное значение при $T=0$. Но так как в методе получения низких температур, основанном на испарении незамерзающих жидкостей, решающее значение имеет только величина

упругости пара при соответствующих температурах, уменьшающаяся у любой жидкости по экспоненциальному закону, что и определяет практический предел достижения тех или иных температур, ясно, что в данном случае такого предела нет, и поэтому в принципе могут быть получены любые температуры. Необходимым и достаточным условием для этого является только соответствующая степень тепловой изоляции ванны "испарения" и поддержание в тракте удаления "паров" He^3 соответствующего давления, как и в обычном методе, основанном на испарении жидкостей. Поскольку это давление, как было выяснено выше, слабо зависит от температуры и достаточно велико при сколь угодно низких температурах, поддержание его на соответствующем уровне не представляет какой-либо трудности, если вторичное испарение He^3 уже в обычный вакуум производится в другой ванне при температуре порядка $0,6^{\circ}K$, соединенной с первой длинной трубкой требуемого сечения. Более сложный вопрос заключается в достижении требуемой изоляции ванны первичного испарения от ванны вторичного испарения при обеспечении определенной пропускной способности соединительной трубки, в которой через столб 4He происходит диффузия He^3 из первой ванны во вторую. Задача также значительно упрощается из-за достаточно большого холодозапаса диффундирующего потока He^3 , который способен поглощать тепло, поступающее с теплового конца соединительной трубки. Однако из-за возрастания вязкости и теплопроводности раствора с понижением температуры возникают серьезные трудности, определяющие предельную температуру раствора, к более детальному рассмотрению которых мы вернемся позже.

Рассмотрим теперь вопрос о времени поддержания сверхнизких температур.

Установка разового действия

В установках простейшего типа, т.е. без возвращения He^3 обратно в ванну растворения, осуществленных Уитли и др. /3/ и в более простом варианте Пешковым /12/, на первый взгляд кажется, что самые низкие температуры не могут поддерживаться в течение значительного времени из-за сравнительно большого в любой момент времени тепло-

запаса остающегося в ванне растворения He^3 по отношению к теплоте перехода, поскольку обе величины уменьшаются пропорционально T^2 . Поэтому стационарного режима может вообще не существовать, т.е. в момент, когда достигается минимальная температура, количественно He^3 в ванне растворения может оказаться равным нулю.

Действительно, учитывая, что теплосодержание He^3 , находящегося в ванне растворения, равно

$$H = \frac{1}{2} \beta T^2 Q(t),$$

где $Q(t)$ - количество молей He^3 , дифференциальным уравнением теплового баланса является

$$\left(\frac{1}{2} \beta T^2 \frac{\partial Q}{\partial t} + \beta T Q \frac{\partial T}{\partial t} - \delta \right) = (\alpha - \beta) T^2 \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad (6)$$

где первые два члена - полная производная по времени от теплосодержания H , δ - тепло, подводимое к ванне растворения от любых источников, которое для простоты мы будем считать постоянным, а последний член - тепло, поглощаемое в единицу времени из-за растворения He^3 .

Предполагая, что растворение происходит с постоянной скоростью Z , можно произвести замену переменной $Q = Q_0 - Zt$, где Q_0 - начальное количество He^3 . Тогда получим простое уравнение с разделенными переменными

$$\int_0^t \frac{dt}{\beta(Q_0 - Zt)} = - \int_{T_0}^T \frac{T dT}{(\alpha - \frac{3}{2}\beta) Z T^2 - \delta},$$

интегрируя которое в указанных пределах, получим

$$\frac{Q_0 - Zt}{Q_0} = \left[\frac{(\alpha - \frac{3}{2}\beta) Z T^2 - \delta}{(\alpha - \frac{3}{2}\beta) Z T_0^2 - \delta} \right]^{\frac{\beta}{2\alpha - 3\beta}}. \quad (7)$$

Анализируя решение (7), видим, что минимальная температура

$$T_{\min} = \sqrt{\frac{\delta}{Z(\alpha - \frac{3}{2}\beta)}}$$

достигается действительно в момент времени $t = Q_0 / Z$, т.е., когда запас He^3 в ванне растворения равен нулю, и тем ниже, чем быстрее производится испарение He^3 . Неожиданным, на первый взгляд, является то, что достигаемая температура T_{\min} не зависит ни от начального количества Q_0 , ни от его температуры T_0 . Поэтому в принципе нет необходимости, например, стремиться выбирать начальное значение T максимально низким.

Однако для времени $t(T)$, в течение которого могут поддерживаться температуры ниже T , из формулы (7) получается выражение

$$t(T) = \frac{Q_0}{Z} \left[\frac{T^2 - T_{\min}^2}{T_0^2 - T_{\min}^2} \right]^{\frac{\beta}{2\alpha - 3\beta}} \quad (8)$$

и, если, например, $T_0/T_{\min} = 4$, то, принимая $\alpha/\beta = 4,3$, при $T = 2 T_{\min}$, это время будет равно 0,75, а при $T = 1,4 T_{\min}$ — 0,62 от полного времени цикла, в то время как при $T_0/T_{\min} = 10$ оно равно 0,54 и 0,44 при тех же температурах, соответственно.

Таким образом видим, что, хотя стационарный режим при $\delta = \text{const}$ отсутствует, растворение значительной массы He^3 должно происходить при температурах, близких к T_{\min} . При выключении внешней тепловой нагрузки δ , очевидно, автоматически возникает стационарный режим, так как оставшееся гелло неизбежно будет возрастать с понижением температуры из-за резкого возрастания трения диффундирующего потока He^3 о стенки трубки. Поэтому должен существовать также оптимальный режим скорости удаления He^3 , зависящий от геометрических параметров установки, который может быть в принципе найден путем решения уравнения (6) численными методами при задании величины δ как функции температуры и скорости откачки.

Следует заметить, что полученные выводы верны только при отсутствии заметного градиента температуры He^3 в ванне растворения, так как предполагалось, что температура He^3 в любой момент времени равна его температуре на границе расслоения раствора. В противном случае значительная часть He^3 будет испарена, прежде чем температура его приблизится к T_{\min} .

Основным недостатком установки разового действия является все же необходимость конденсации и предварительного охлаждения большого количества He^3 , возрастающего пропорционально длительности эксперимента и требуемой холодопроизводительности установки $\delta \sim Z$. Однако диффундирующий поток He^3 имеет достаточно большой холодозапас и способен не только поглощать тепло, поступающее с теплового конца соединительной трубки, но и охлаждать обратный поток He^3 практически до температуры раствора, позволяя сделать процесс растворения стационарным. В этом случае ни холодопроизводительность, ни длительность работы установки больше не зависят от используемого количества He^3 , определяемого только геометрическими параметрами устройства, что, безусловно, в сильной степени расширяет экспериментальные возможности при использовании установок такого типа, к более детальному рассмотрению которых мы и перейдем.

Установки непрерывного действия

Принципиальная схема установки, работающей по замкнутому циклу растворения He^3 , приведена на рис.2. Установка состоит из ванны испарения А, противоточного теплообменника В и ванны растворения С. Находящийся в верхней части ванны С He^3 непрерывно растворяется со скоростью Z на границе разделения фаз D, переходя в раствор, заполняющий остальную часть ванны С, один из каналов теплообменника В и некоторую часть ванны А, если на пути между ваннами А и С существует некоторый малый, по сравнению с P , перепад осмотического давления ΔP . С той же скоростью должно происходить удаление паров He^3 из ванны А с помощью внешнего насоса и возвращение в ванну С через другой канал теплообменника В.

Скорость откачки паров He^3 определяется производительностью насоса и давлением паров He^3 над уровнем жидкости в ванне А, которое однозначно определяется концентрацией и температурой раствора в ванне. Последний параметр может быть произвольно задан с помощью нагревателя, расположенного в ванне А, что и позволяет регулировать

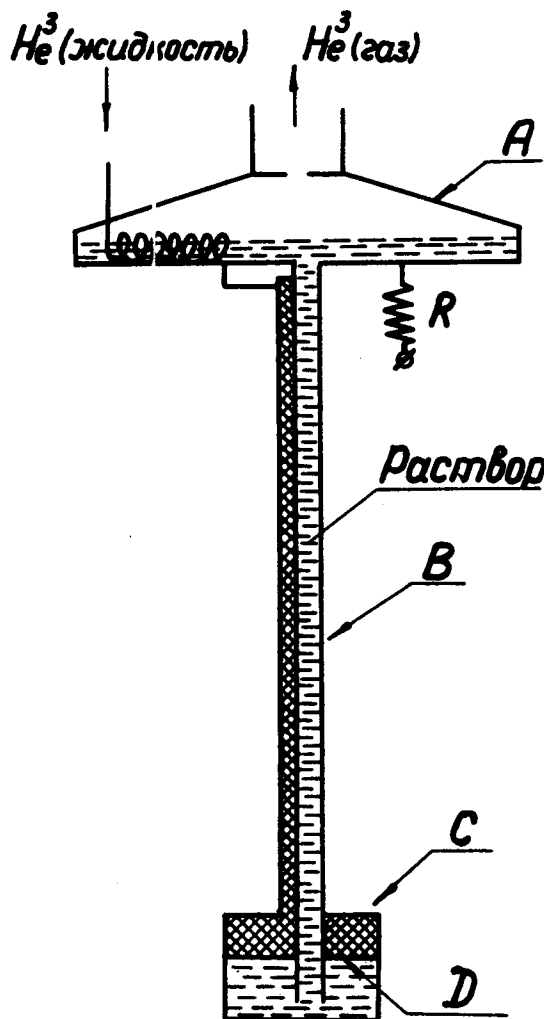


Рис.2. Принципиальная схема ступени растворения.

через скорость откачки скорость растворения и связанную с ней холодопроизводительность установки в пределах, определяемых конструкцией криостата и производительностью используемого насоса.

Решающее значение для работы установки такого типа имеет величина равновесной концентрации He^3 в теплой части раствора, определяемая величиной осмотического давления, действующего в системе, и температурой раствора. В первом приближении осмотическое давление всюду постоянно и, как мы видели, очень слабо зависит от температуры в ванне растворения. Диффузионный поток, двигаясь вдоль теплообменника, испытывает некоторую потерю давления, как из-за трения о стенки каналов, так и от действия фонтанного давления, препятствующего диффузии, которое существенным становится только вблизи ванны испарения. Для нормальной работы установки потери осмотического давления на преодоление сил трения должны быть невелики, если приняты меры против гравитационной неустойчивости раствора. Потери же из-за фонтанного давления резко возрастают только в области температур больше $0,7^{\circ}K$, где энтропия He^4 испытывает резкий подъем из-за появления возбуждений ротонного типа. Поэтому разумно ограничивать температуру ванны испарения областью $(0,6 \pm 0,7)^{\circ}K$, где фонтанное давление изменяется от $0,2$ до $0,51$ мм Hg. Равновесная концентрация раствора с повышенном его температуры должна уменьшаться, чтобы осмотическое давление оставалось всюду постоянным, и может быть найдена в любой точке, если в ней известна температура из уравнения состояния ферми-газа (1), а при $T > 0,2^{\circ}K$ просто из уравнения состояния идеального газа, подстановкой в него осмотического давления He^3 в растворе. Найдя затем отношение молярных объемов He^4 и He^3 в растворе, получим, например, при $T = 0,6^{\circ}K$

$$x = \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_4 P_{осм.}}{RT} \approx 0,008 .$$

При увеличении температуры ванны испарения с помощью нагревателя концентрация раствора в ней хотя и уменьшается линейно с температурой, упругость пара He^3 над ним, несмотря на уменьшающееся действие в такой же степени закона Рауля, все же возрастает в силу проявления

закона Клайперона-Клаузиуса, согласно которому упругость пара изменяется в первом приближении по экспоненциальному закону

$$P \approx e^{-q/kT},$$

где q — теплота испарения жидкости. Благодаря этому имеется возможность простой регулировки скорости удаления He^3 из раствора и, соответственно, скорости его растворения в нижней ванне. Так как теплота испарения He^3 из раствора, по крайней мере, меньше теплоты испарения чистого He^3 , которая, в свою очередь, примерно в 2,3 раза ниже, чем у чистого He^4 , концентрация He^3 в паровой фазе при $T = 0,8^\circ K$ оказывается близкой 100% и упругость паров He^3 — около 0,006 мм Hg. Это позволяет использовать для удаления паров He^3 из ванны испарения обычные диффузионные бустерные насосы, обладающие при таком давлении максимальной скоростью откачки.

Таким образом, сравнительно высокая концентрация раствора в ванне испарения, обусловленная высоким осмотическим давлением, действующим в системе, приводит к тому, что не возникает серьезной проблемы с разделением изотопов, и позволяет замкнуть цикл в пределах одной и той же установки без оборудования "фабрики" по разделению изотопов. Некоторая неприятность возникает только из-за сверхтекучей пленки He^4 , испаряющейся на теплом участке тракта откачки, которую следует ограничивать диафрагмой, обладающей сравнимым с трактом откачки сопротивлением. Однако могут быть использованы и другие приемы, такие как отсасывание He^4 с помощью сверхтекучего фильтра из отстойника, расположенного, например, между секциями теплообменника при температуре около $0,2^\circ K$, обратно в ванну испарения, или путем "замыкания" пленки самой на себя в узкой щели переконденсацией ее на холодной поверхности подводом тепла к теплой стенке ст нагревателя, используемого так или иначе для испарения He^3 из верхней ванны во время работы установки.

Рефрижератор, работающий в непрерывном режиме по схеме, изображенной на рис.2, является устройством с сильной положительной обратной связью. Действительно, чем ниже температура поступающего в ванну растворения He^3 , тем ниже температура раствора в ней, что, в свою

очередь, приводит к дальнейшему понижению температуры, до которой успевает охладиться поток He^3 и т.д., пока не наступает равновесие, определяемое, в конечном итоге, только величиной и качеством используемого теплообменника. Охлаждение потока He^3 в принципе возможно до температуры раствора, т.к. тепло, которое раствор способен поглотить, нагреваясь до температуры поступающего He^3 , в несколько раз превышает теплосодержание циркулирующего He^3 . Серьезной проблемы не существует при охлаждении потока He^3 до температуры порядка $0,1^\circ\text{K}$, обеспечивающей получение температуры раствора около $0,03^\circ\text{K}$, поэтому применимы теплообменники любой конструкции. Однако при дальнейшем повышении температуры возникают трудности, резко возрастающие по мере продвижения вперед. В связи с этим главной задачей, которую следует решать, является оптимизация теплообменника, от решения которой зависит предельная температура, достигаемая в установках этого типа.

Единственно надежный и приемлемый путь понижения предельной температуры, достигаемой в стационарном режиме, заключается, по-видимому, в резком увеличении рабочей поверхности теплообменника за счет сведения к минимуму расхода He^3 на единицу поверхности.

Обменник, наиболее полно удовлетворяющий этим условиям, был предложен и использован в работах Уитли и др. /3/. Он изготавливается путем спекания блоков из медного порошка, соединяемых затем последовательно при сохранении взаимной тепловой изоляции. Обменник такого типа можно назвать ступенчатым или секционным, в отличие от используемого обычно непрерывного, в котором градиент температуры является непрерывной функцией.

Теплообменники, спеченные из порошка, имея неупорядоченную систему каналов, оказывают еще довольно большое сопротивление потоку, если зерна порошка имеют размеры даже порядка десятков микрон. Поэтому для применения в области температур существенно ниже $0,01^\circ\text{K}$ требуется их модификация. В нашей лаборатории была предпринята попытка изготовить аналогичный теплообменник со значительно большей поверхностью с упорядоченной структурой каналов путем спекания блоков, набранных из тонкой профилированной фольги /17/. Таким способом могут быть изготовлены из медной фольги толщиной 15 мк бруски, имеющие

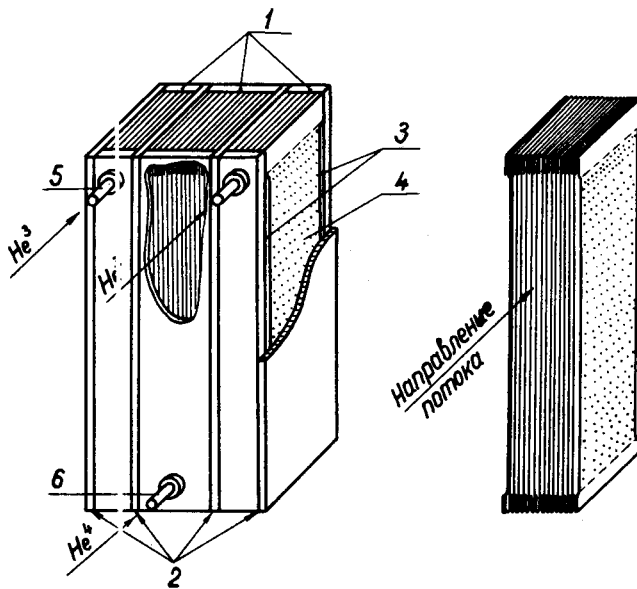


Рис.3. Конструкция отдельной секции теплообменника, изготовленного из медной фольги методом диффузионной сварки в вакууме.

продольные каналы размерами порядка 10×200 мк, что позволяет еще существеннее снизить расход He^3 на единицу поверхности и уменьшить сопротивление, оказываемое потоку, за счет разработки специальной коллекторной системы, позволяющей менять сопротивление блоков в широких пределах. Используя такую систему, авторам /17/ удалось получить в стационарном режиме температуру $\approx 8 \text{ m}^{\circ} \text{K}$ при скорости циркуляции He^3 , равной 10^{-4} моль/сек. Однако теплообменники такого типа будут, по-видимому, обладать существенными недостатками как из-за сложности их изготовления, так и из-за сложности коммуникаций, приводящих к возрастанию эффективного расхода жидкого He^3 на единицу поверхности. Поэтому наиболее перспективной является разработка типа теплообменника, являющегося непрерывным и обладающим теми же параметрами, с которыми можно изготовить секционный теплообменник. Нет сомнения, что такие теплообменники могут быть изготовлены, и можно ожидать, что они займут прочное место в ближайшие годы в технике получения сверхнизких температур, а пока их нет, займемся выяснением их преимуществ и еще более простыми вопросами.

Холодопроизводительность в стационарном процессе

Процесс равновесного растворения, протекающий в стационарном режиме, является изотермическим обратимым процессом, совершающимся при постоянном давлении, поэтому легко может быть найдено выражение для температуры процесса через температуру непрерывно поступающего потока концентрированной фазы He^3 . Тот факт, что температура поступающего в ванну растворения He^3 намного отличается от температуры образующегося в процессе растворения раствора, не мешает рассматривать процесс как изотермический, ибо из-за отсутствия теплового сопротивления на границе разделения фаз переход атомов из верхней фазы в нижнюю происходит при вполне определенной температуре T_0 . В зависимости от теплопроводности верхней фазы, в ней существует определенный градиент температуры, и практически все тепло, вносимое в ванну растворения потоком He^3 , подводится к границе расслоения и поглощается при растворении.

Выделим мысленно некоторую малую область камеры растворения, расположенную по обе стороны границы расслоения, к которой подводится поток тепла q при температуре T_0 , так что приведенный поток тепла в данном случае есть просто

$$\frac{q}{T_0} = \frac{Z}{T_0} \int_{T_0}^{T_1} C''_p dT + \frac{\epsilon_k}{T_0},$$

где ϵ_k — поток кинетической энергии, поступающей в ванну с потоком He^3 , которым можно пренебречь, T_1 — температура поступающего потока He^3 , Z — величина потока He^3 , выраженная в моль/сек, и C''_p — молярная теплоемкость He^3 .

Поглощаемый приведенный поток тепла должен рождать поток энтропии на границе поглощения тепла, который равен разности потоков на выходе и входе выделенного контура, т.к. энтропия самого контура в силу условия стационарности не меняется во времени (граница неподвижна).

Таким образом,

$$\Delta \dot{S} = \dot{S}_1 - \dot{S}_2 = Z \int_0^{T_0} \frac{C'_p}{T} dT - Z \int_0^{T_0} \frac{C''_p}{T} dT = \frac{Z}{T_0} \int_{T_0}^{T_1} C''_p dT.$$

Подставляя $C'_p = \alpha T$ и $C''_p = \beta T$, получим

$$T_0^2 (\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \beta (T_1^2 - T_0^2)$$

и

$$T_0 = T_1 \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha - \beta}}.$$

Если к ванне растворения дополнительно подводится стационарный поток тепла q_0 , не связанный с потоком He^3 , температура раствора будет меняться, как

$$T_q = \sqrt{T_0^2 + \frac{q_0}{Z(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}} \quad (9)$$

пока температура T_q не сравняется с T_1 , т.е. при

$$T_q \leq T_0 \sqrt{\frac{2\alpha - \beta}{\beta}}.$$

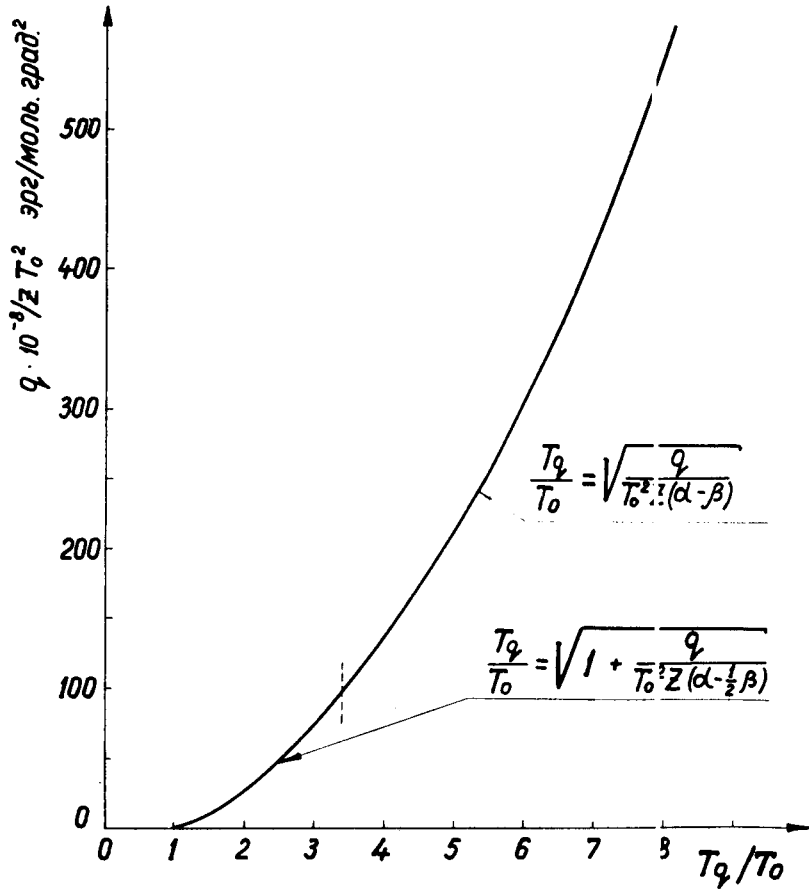


Рис.4. Холодопроизводительность ступени растворения в непрерывном режиме.

При $T_q > T_1$ источник тепла, связанный с потоком He^3 , исчезает, так как при дальнейшем повышении температуры раствора температура He^3 остается близкой к He^4 . Тогда

$$T_q = \sqrt{\frac{q}{Z(\alpha - \beta)}}. \quad (10)$$

Зависимость холодопроизводительности установки от температуры, определяемая формулами (9) и (10), показана на рис. 4 как функция относительной температуры. Сравнение этой кривой с имеющимися экспериментальными результатами показано на рис. 5.

Эффект Джоуля-Томсона при дросселировании раствора

Для оценки дополнительных источников тепла, которые могут возникнуть из-за дросселирования раствора, необходимо рассмотреть вопрос об эффекте Джоуля-Томсона в растворе.

Диффузия атомов He^3 в растворе происходит под действием перепада осмотического давления ΔP , действующего на пути от ванны растворения до ванны испарения. Работа, совершаемая против сил трения на этом пути, равна

$$A = \Delta P \cdot v = \Delta P \Delta V,$$

где ΔV — объем газа или жидкости, протекающей в единицу времени. Эта работа превращается в тепло и вызывает нагревание потока на величину ΔT , определяемую равенством

$$A = \frac{\Delta V}{V} C_p \Delta T.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta T}{\Delta P} = \frac{V}{C_p}, \quad (11)$$

где V и C_p — молярный объем и молярная теплоемкость, соответственно.

Истинный эффект нагревания на самом деле всегда меньше величины, даваемой формулой (11), из-за охлаждения газа или жидкости вследствие расширения, и может быть найден из уравнения

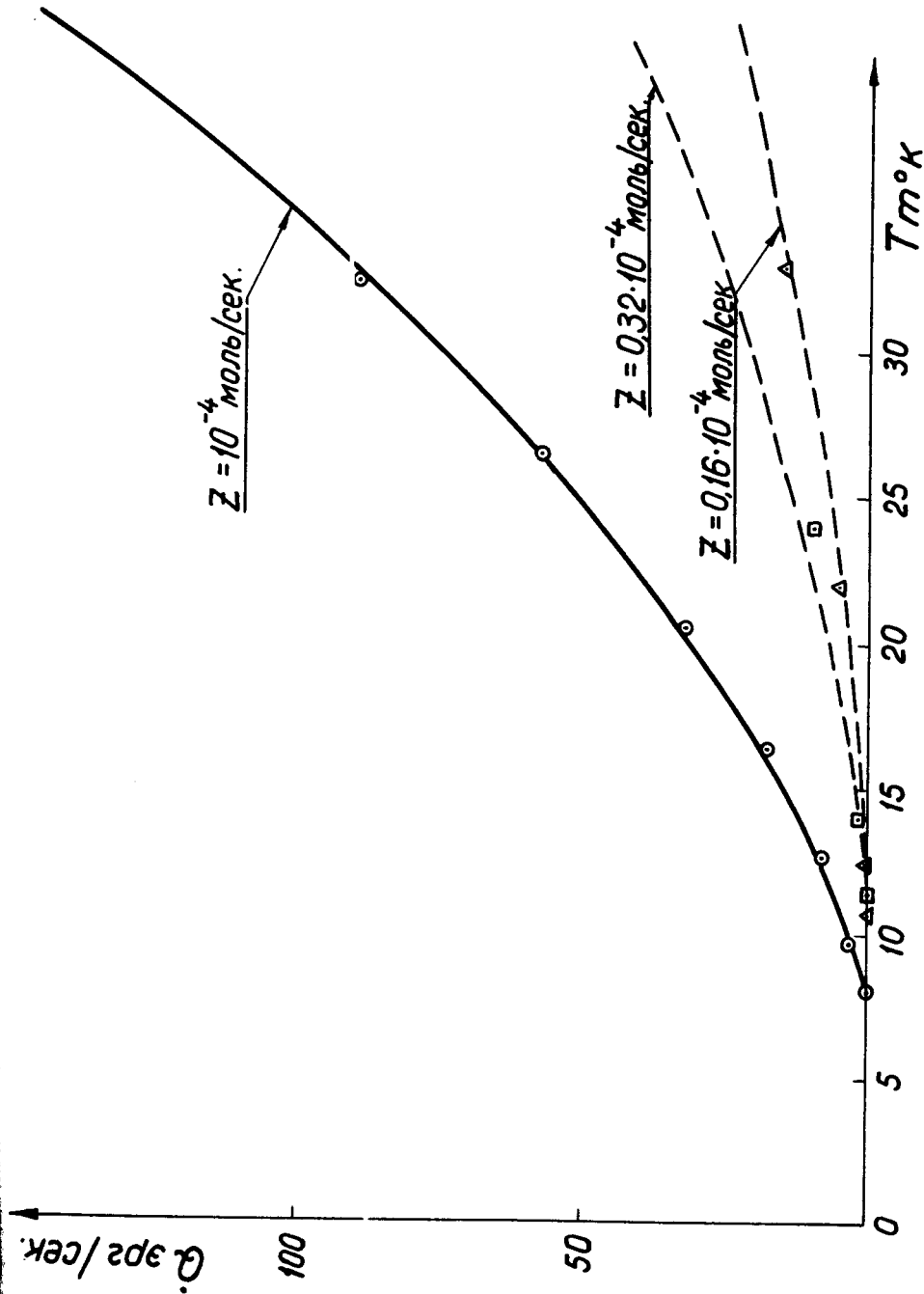


Рис.5. Зависимость достигнутых в непрерывном режиме температура от внешней тепловой нагрузки \odot , \square , \triangle данные Борисова и др. [17].
 \square - данные Уитли и др.

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - \frac{V}{C_p}, \quad (12)$$

описывающего дифференциальный эффект Джоуля-Томсона.

Очевидно, первый член в этом уравнении дает охлаждение потока вследствие расширения, а второй учитывает найденный выше эффект нагревания из-за трения о стенки трубки. Знак и величина результирующего эффекта зависят от значения производной $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$, определяющей величину эффекта охлаждения потока из-за расширения.

Покажем, что в случае слабых растворов эффектом охлаждения при $T \leq 0,1^\circ\text{K}$ можно пренебречь.

Для оценки величины $\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ можно воспользоваться уравнением состояния идеального газа Ферми (4), которое может быть записано в виде

$$P = a V^{-1/3} T^2 + b V^{-5/3}, \quad (13)$$

где

$$a = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{m^*}{\hbar^2} k^2 N^{1/3},$$

$$b = \frac{\pi^2}{5} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m^*} N^{5/3}, \quad N - \text{число Авогадро.}$$

V — молярный объем газа, а P — осмотическое давление в растворе.

Дифференцируя выражение (13) по температуре и произведя преобразования, получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{6V}{T} \left(\frac{1}{1 + \frac{5b}{a T^2 V^{4/3}}} \right).$$

Подставляя численные значения входящих величин, при концентрации раствора 6% получим, пренебрегая единицей, простой результат

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = 6 V T,$$

и, подставляя это значение в формулу (12), получим

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{6VT^2}{C_p} - \frac{V}{C_p} \quad (14)$$

Таким образом, при температурах $T \leq 0,1^\circ\text{K}$ первый член, описывающий охлаждение насыщенного раствора вследствие расширения, действительно мал по сравнению с эффектом нагревания из-за сил трения, и им можно пренебречь.

Воспользовавшись найденным выше значением производной $(\frac{\partial V}{\partial T})_P$, покажем теперь, что при $T \leq 0,1^\circ\text{K}$ теплоемкость раствора при постоянном осмотическом давлении практически совпадает с C_V .

Как известно, C_p может быть выражено через C_V в виде

$$C_p = C_V - T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P^2 / \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

или, преобразуя производную $(\frac{\partial V}{\partial P})_T$ с помощью якобиана к другим переменным

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{\partial(V, T)}{\partial(P, T)} = \frac{\frac{\partial(V, T)}{\partial(V, P)}}{\frac{\partial(P, T)}{\partial(V, P)}} = - \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_V}{\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_P} = - \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P}{\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V}$$

получим

$$C_p = C_V + T \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P \quad (15)$$

Подставляя значения $(\frac{\partial V}{\partial T})_P = 6VT$ и $(\frac{\partial P}{\partial T})_V = 2aV^{-1/3}T$, получим

$$C_p = C_V + 12aV^{2/3}T^3 = (107 + 5,5T^2) \text{ Гдж/моль} \cdot \text{град} \approx C_V$$

Таким образом, повышение температуры раствора из-за трения при диффузии He^3 под действием перепада осмотического давления есть

$$\Delta T = - \frac{V}{C_V} \Delta P = - \frac{4,1 \cdot 10^{-7}}{T} \Delta P^\circ\text{K}, \quad (16)$$

где ΔP выражено в $\text{дин}/\text{см}^2$, а T — в градусах Кельвина. Заметим, что близкий результат был получен несколько другим способом в работе Е. Вароко ^{/18/}. Это накладывает серьезные ограничения на геометрию соединительных трубок и форму каналов теплообменника при температурах ниже $0,01^\circ\text{K}$.

При вязком течении, каковым является диффузия He^3 в растворе ^{/19/}, для трубок круглого сечения имеет место формула Пуазейля, согласно которой

$$\Delta P = - \frac{8 \Delta V \ell}{\pi r^4} \eta$$

и для прямоугольных каналов

$$\Delta P = - \frac{20 \Delta V \ell}{\pi a b^3} \eta,$$

где η — вязкость жидкости или газа, ΔV — объемный расход, выраженный в $\text{см}^3/\text{сек}$; ℓ , r , a и b — геометрические величины: длина, радиус, высота широкой и узкой стенок соответственно. Так как вязкость раствора и He^3 в области $T \leq 0,03^\circ$, согласно работам ^{/20,21/}, можно принять

$$\eta_{\text{раст.}} = 7,5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{T^2} \text{ пуаз}; \quad \eta_{\text{He}^3} = 3,2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{T^2} \text{ пуаз},$$

получим для величины нагревания раствора на единице длины трубки радиуса r при скорости циркуляции He^3 , равной Z моль/сек,

$$\frac{dT}{dX} = - \frac{\gamma^2}{C_V} \frac{8Z}{\pi r^4} \eta = 3,9 \cdot 10^{-10} \frac{Z}{r^4 T^3} \text{ }^\circ\text{K} \quad (17)$$

и соответствующее повышение температуры ΔT на длине ℓ будет равно

$$\Delta T = \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-9} Z \ell}{r^4} + T_0^4 \right)^{1/4} - T_0,$$

где T_0 — температура раствора на входе трубки.

Разумно потребовать, чтобы относительная величина нагревания

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \left(\frac{1.6 \cdot 10^{-8} Z l}{r^4 T_0^4} + 1 \right)^{1/4} - 1$$

была всюду постоянна. Тогда диаметры соединительных трубок должны изменяться обратно пропорционально их температурам, а сопротивление соединяемых секций теплообменника пропорционально четвертой степени их температуры.

Охлаждение обратного потока He^3 и эффективность теплообменников

Рассмотрим теперь некоторые вопросы, связанные с использованием секционных и непрерывных теплообменников для охлаждения потока He^3 , и покажем преимущество использования последних.

Диаграмма, иллюстрирующая работу секционного теплообменника, показана на рис.6. Верхней прямой изображена теплоемкость раствора, нижней — теплоемкость чистого He^3 . Температура, обозначенная через T_0 — минимальная температура раствора. T_1 , T_2 , T_3 и т.д. — температуры, до которых охлаждается He^3 в соответствующих секциях, а T'_1 , T'_2 , T'_3 и т.д. — температуры, до которых нагревается раствор в тех же секциях.

Допустим, что рабочая поверхность всех секций такова, что внутри каждой происходит выравнивание температуры раствора и концентрированной фазы He^3 до одной и той же относительной величины, т.е.

$$\frac{T_n - T'_n}{T_n} = \frac{\Delta T_n}{T_n} = \gamma.$$

Для нахождения T_0 , T_1 , T_2 и т.д. можно написать систему простых уравнений теплового баланса

$$T_0 (S_2 - S_1) = T_0^2 (\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \beta (T_1^2 - T_0^2)$$

$$\frac{1}{2} \alpha [(T'_1)^2 - T_0^2] = \frac{1}{2} \alpha [T_1 (1 - \gamma)^2 - T_0^2] = \frac{1}{2} \beta (T_2^2 - T_1^2) \quad (18)$$

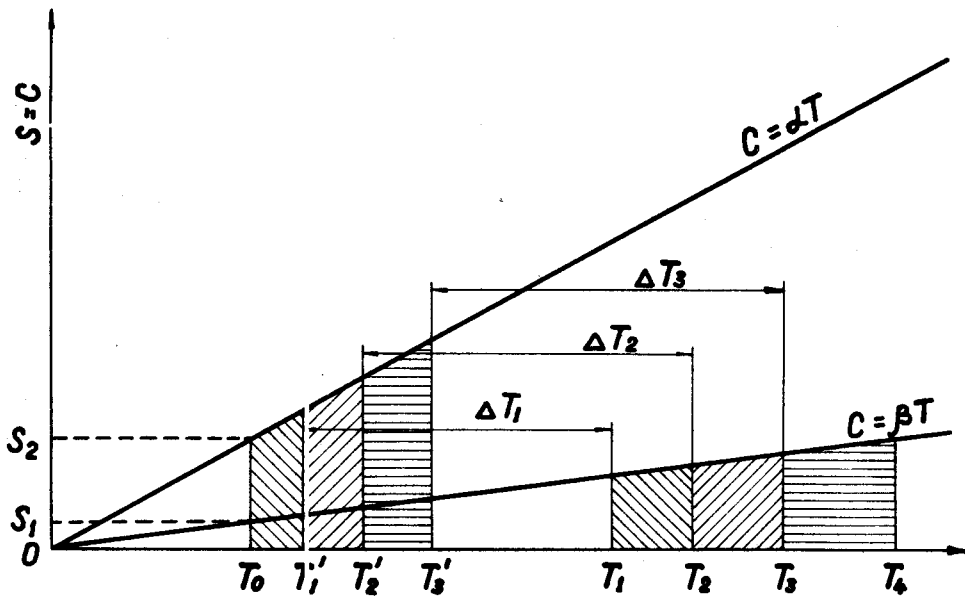


Рис.6. Диаграмма режима охлаждения He^3 в секционном теплообменнике.

$$\frac{1}{2} \alpha [T_2^2 (1-\gamma)^2 - T_1^2 (1-\gamma)^2] = \frac{1}{2} \beta (T_3^2 - T_2^2) \quad \text{и т.д.}$$

.....

$$\frac{1}{2} \alpha (1-\gamma)^2 (T_{n+1}^2 - T_n^2) = \frac{1}{2} \beta (T_{n+2}^2 - T_{n+1}^2).$$

(18)

Решая уравнения (18), получим^{х)}, при $\gamma \ll 1$.

$$T_1 = X_0 T_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta} - 1} T_0$$

$$T_2 = X_1 T_1 = T_1 \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \left[(1-\gamma)^2 - \frac{1}{X_0^2} \right] + 1 \right\}^{1/2} = T_1 \left[\frac{\alpha}{\beta} (1-\gamma)^2 + 0,43 \right]^{1/2}$$

$$T_3 = X_2 T_2 = T_2 \left[\frac{\alpha}{\beta} (1-\gamma)^2 \left(1 - \frac{1}{X_1^2} \right) + 1 \right]^{1/2} = T_2 \left[\frac{\alpha}{\beta} (1-\gamma)^2 + 0,09 \right]^{1/2} \text{ и т.д.}$$

.....

$$T_{n+1} = X_n T_n = T_n \left[\frac{\alpha}{\beta} (1-\gamma)^2 \right]^{1/2}$$

Таким образом, значение γ , зависящее от величины поверхности теплового контакта секции теплообменника, определяет степень охлаждения потока He^3 , достигаемую в данной секции и равную

$$X_n = (1-\gamma) \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}},$$

величина которой, очевидно, заключена в пределах $2,1 \geq X_n \geq 1$. Тогда результирующая температура раствора

$$T_0 = \left(\frac{1}{X_0} \frac{1}{X_0} \frac{1}{X_0} \dots \frac{1}{X_{n-1}} \right) T_n.$$

При максимальном значении $\gamma = 0,52$, определяемом нижним значением X_n , ступенчатый теплообменник переходит в непрерывный, теплообмен в котором, таким образом, происходит при максимально возможном перепаде температур $\gamma = 0,52$.

х) В общем случае $T_{n+1} = T_n \left[\frac{\alpha}{\beta} (1-\gamma)^2 \left(1 - \frac{1}{X_n^2} \right) + 1 \right]^{1/2}$, но т.к.

$X_{n-1} = X_n$, для X_n получим уравнение $X_n^2 = \frac{\alpha}{\beta} (1-\gamma)^2 \left(1 - \frac{1}{X_n^2} \right) + 1$, откуда $X_n = (1-\gamma) \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

В другом крайнем случае, когда $\gamma = 0$, степень охлаждения максимальна. Однако для этого требуется практически бесконечная поверхность теплового контакта. Поэтому первый случай предпочтительнее второго, поскольку он приводит к наиболее эффективному использованию общей рабочей поверхности теплообменника.

Закон, по которому должна изменяться величина рабочей поверхности секций при заданном значении γ , определяется зависимостью теплового сопротивления границы раздела от температуры, которое при малой разности температур

$$R = \frac{\Delta T}{q} \approx T^{-3}.$$

Поэтому поток тепла через границу с поверхностью S

$$q = \xi S T^3 dT,$$

где ξ — численный множитель, зависящий от рода жидкости и свойств твердого тела.

В случае последовательного прохождения потоком тепла двух границ, как это имеет место в теплообменнике, при конечной разности температур ΔT имеет место равенство

$$\dot{q} = \frac{1}{4} \xi_1 S_1 T^4 [1 - (1 - \gamma_1)^4] = \frac{1}{4} \xi_2 S_2 T^4 [(1 - \gamma_1)^4 - (1 - \gamma)^4], \quad (19)$$

где γ_1 — относительный перепад на первой границе, откуда

$$1 - (1 - \gamma_1)^4 = \frac{1 - (1 - \gamma)^4}{1 + \delta} = \epsilon,$$

где

$$\delta = \frac{\xi_1 S_1}{\xi_2 S_2}.$$

Приравняв поток тепла q (19) через границу раздела потоку, передаваемому раствору в каждой секции

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \beta T_n^2 (X_n^2 - 1) Z,$$

получим выражение для величины поверхности теплового контакта между He^3 и твердым телом:

$$S_n = \frac{2\beta(X_n^2 - 1)Z}{\xi_1 T_n^2 \epsilon} ; \quad (20)$$

так как $T_{n+1} = T_n X_n$ и $X_n = X_{n+1}$, то,

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = \left(\frac{T_{n+1}}{T_n} \right)^2 = X_n^2 \quad S_n = X_n^2 S_{n+1},$$

т.е. поверхность последовательно соединяемых секций должна возрастать пропорционально квадрату желаемой степени охлаждения потока.

Рассмотрим теперь вопрос о теплопередаче в непрерывном теплообменнике, применение которого является более рациональным, чем применение секционного, рассмотренного выше. Такой теплообменник может, в частности, представлять собой длинную сильно гофрированную металлическую трубку, помещенную в другую трубку с малым зазором между ее стенками и гофрами. Внутри гофрированной трубки находится раствор, а в зазоре между внешней и гофрированной трубками протекает концентрированный He^3 . Легко видеть, что теплопроводность такой системы в направлении движения потоков He^3 определяется только проходными сечениями, а не полным сечением системы из-за очень большого граничного сопротивления, существующего на пути потока тепла на остальной основной площади поперечного сечения теплообменника. Поскольку шунгирующий поток тепла, идущий вдоль теплообменника, в данном случае мал по сравнению с потоком, отводимым от He^3 , для простоты расчетов им можно пренебречь. Тогда закон изменения температуры раствора и He^3 вдоль теплообменника будет определяться только зависимостью теплового сопротивления от температуры и геометрией теплообменника.

Так как скорость движения He^3 в зазоре

$$v = -\frac{ZV}{S},$$

где S - поперечное сечение зазора, за единицу времени слой жидкости толщиной $d\ell$ переместится на длину $\Delta x = v$, и температура его изменится на величину $\frac{dT}{dx} v$. Энергия, которая при этом должна быть передана через границу раздела,

$$d\dot{q} = -\beta T \frac{\epsilon T}{\epsilon x} v \frac{S df}{V} = \frac{1}{4} \xi T^4 \epsilon dS, \quad (21)$$

где dS — рабочая поверхность теплообменника на длине df . Интегрируя уравнение (21), получим

$$T_x = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi \epsilon S_x}{2\beta Z} + \frac{1}{T_0^2}}}, \quad (22)$$

где T_0 — температура He^3 на входе теплообменника, а T_x — температура He^3 на расстоянии x после прохождения потоком поверхности S_x . Поверхность S_n , необходимая для понижения температуры He^3 в n раз, равна

$$S_n = (n^2 - 1) \frac{2\beta Z}{\xi \epsilon T_0^2} \quad \text{и} \quad T_n = \frac{T_0}{n}, \quad (23)$$

где T_n — температура He^3 после прохождения поверхности S_n .

Для того, чтобы оценить преимущества непрерывного теплообменника по сравнению со ступенчатым, рассмотренным выше, перепишем формулу (23) в прежних обозначениях, заменяя n на X и T_0 на $T_n X$. Тогда

$$S_n = \frac{2\beta Z (X^2 - 1)}{\xi \epsilon T_n^2 X^2}. \quad (24)$$

Сравнивая эту формулу с аналогичной формулой (20) для ступенчатого теплообменника, видим, что они отличаются только множителем X^2 . Этот множитель и представляет реальную экономию поверхности при использовании непрерывного теплообменника. При значениях X , близких к единице, разница исчезает, как и следовало ожидать, т.к. ступенчатый теплообменник в этом случае фактически превращается в непрерывный. Для более точной оценки необходимо учесть еще зависимость коэффициента

ϵ от x , существующую в ступенчатом теплообменнике (в случае непрерывного теплообменника ϵ не зависит от x).

Так как

$$x = (1-\gamma) \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad \text{а} \quad \epsilon = \frac{1-(1-\gamma)^4}{1+\delta},$$

то, выражая ϵ через x , получим коэффициент использования рабочей поверхности ступенчатого теплообменника:

$$K = \frac{S_{\text{непр.}}}{S_{\text{ступ.}}} = \frac{1}{X^2} \left[\frac{1 - X^4 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2}{1 - (1-\gamma)^4} \right] = \frac{1,05}{X^2} \left(1 - \frac{1}{19 X^2} \right).$$

Таким образом, если используется ступенчатый теплообменник, в котором температура He^3 понижается, например, в 2 раза в каждой секции, то общая суммарная поверхность такого теплообменника должна быть в 5 раз больше, чем непрерывного. Поскольку $S_n = X_n^2 S_{n+1}$, можно утверждать, что коэффициент использования рабочей поверхности падает в $\frac{n \cdot 19}{19 - n^2}$ раз, где $n = X^2$ — коэффициент возрастания поверхности соседних секций теплообменника. Поэтому оптимальным вариантом ступенчатого теплообменника является теплообменник, составленный из многих секций с постоянной поверхностью, градиент осмотического давления в которых меняется, как T^4 .

Рассмотрим теперь вопрос о выборе геометрии соединительных трубок и покажем, что диффузия He^3 в них существенно снижает поток тепла через раствор, который имеет место при отсутствии переносного движения атомов He^3 .

В случае отсутствия диффузии уравнение теплопроводности для раствора, теплопроводность которого $\kappa = C/T$ ^{/22/}, есть

$$q = \kappa s \frac{dT}{dX} = C s \frac{1}{T} \frac{dT}{dX},$$

поэтому

$$q_x = \frac{C s}{x} \ln \frac{T_x}{T_0}, \quad (26)$$

где x — длина трубки с поперечным сечением s , на которой поддерживается перепад температур $T_x - T_0$.

При диффузии He^3 распределение температуры вдоль трубки, когда нагреванием из-за трения можно пренебречь, определяется следующим дифференциальным уравнением

$$\dot{q}_0 + \frac{1}{2} \alpha (T_x^2 - T_0^2) Z = C s \frac{1}{T_x} \frac{dT_x}{dX}, \quad (27)$$

где \dot{q}_0 — интересующий нас поток тепла при наличии диффузии He^3 со скоростью Z .

Введя обозначение

$$b^2 = \frac{2\dot{q}_0 - \frac{1}{2} \alpha Z T_0^2}{\alpha Z}$$

и интегрируя уравнение (27), записанное в виде

$$\int_{T_0}^{T_x} \frac{dT}{(T^2 - b^2) T} = \frac{dZ}{2Cs} \int^x dx,$$

получим решение в виде

$$\ln \frac{\sqrt{\dot{q}_0 + \frac{1}{2} \alpha Z (T_x^2 - T_0^2)} \cdot T_0}{\sqrt{\dot{q}_0} \cdot T_x} = \frac{X(\alpha Z) T_0^2 - 2\dot{q}_0}{2XCs}, \quad (28)$$

которое, естественно, при $Z=0$ переходит в решение (26). Решение (28) для сравнения удобно представить следующим образом:

$$\frac{X_{\text{дифф.}}}{X_0} = \frac{2\dot{q}_0 \ln \sqrt{1 + \frac{6\alpha Z}{2\dot{q}_0} (T_x^2 - T_0^2)} \cdot \frac{T_0}{T_x}}{(\alpha Z T_0^2 - 2\dot{q}_0) \ln \frac{T_x}{T_0}},$$

где $\frac{X_{\text{дифф.}}}{X_0}$ — отношение длин трубок равного сечения, по которым течет поток тепла \dot{q}_0 , при наличии в одной из них диффузии He^3 со скоростью Z . Таким образом, эффект сокращения необходимой дли-

ны трубки не зависит от теплопроводности раствора, и при малых значениях \dot{q}_0 растет примерно пропорционально Z .

Рассмотрим в заключение вопрос о предельной температуре, которую можно получить методом растворения He^3 в He^4 , в связи с ограничениями, возникающими, к сожалению, из-за возрастания теплопроводности и вязкости раствора с понижением температуры.

Очевидно, дальнейшее понижение температуры раствора при любом увеличении поверхности теплообмена станет невозможным, как только образующийся раствор по каким-либо причинам начнет нагреваться до температуры поступающего He^3 . В этом предельном случае источник тепла, связанный непосредственно с потоком He^3 , поступающим в ванну растворения, можно не рассматривать вообще из-за равенства их температур, и, следовательно, задача эквивалентна нахождению предельной температуры в установках разового действия без возвращения He^3 обратно в систему.

Условие теплового баланса в этом случае можно записать просто, приравняв тепло, поглощаемое в процессе растворения при температуре

T_0 , теплу, поступающему в ванну растворения вследствие теплопроводности раствора $\kappa = C/T$:

$$(\alpha - \beta) T_0^2 Z = \pi r^2 C \frac{1}{T_0} \left(\frac{dT}{dx} \right)_0,$$

где $\left(\frac{dT}{dx} \right)_0$ — градиент температуры раствора на входе в камеру растворения, а r — радиус трубки. Предполагая, что основным источником тепла, приводящим к появлению данного градиента, является внутреннее трение, получим, подставив вместо $\left(\frac{dT}{dx} \right)_0$ выражение (17), найденное ранее

$$(\alpha - \beta) T_0^2 Z = \pi r^2 C \frac{1}{T_0} \frac{V^2 Z \cdot 8 \cdot 7,5 \cdot 10^{-7}}{\pi r^4 T_0^3 \alpha}.$$

Подставляя численные значения $C = 24$ эрг/сек, $V = 44$ см³, $\alpha = 107$ дж/моль.град² и $\beta = 25$ дж/моль.град², получим

$$T_0 = \left(\frac{C V^2 \cdot 8 \cdot 7,5 \cdot 10^{-7}}{r^2 \alpha (\alpha - \beta)} \right)^{1/6} = 4,8 \frac{1}{d^{1/3}} \text{ м}^0 \text{ К},$$

где d — диаметр трубки в мм. Этот результат совпадает с точностью до 20% с выводом, полученным более сложным путем в работе Уитли и др.^{/3/}. Видим, что для получения температуры порядка $1\text{ м}^{\circ}\text{К}$ требуются уже трубы диаметром порядка 10 см, в то время как для получения, например, $5\text{ м}^{\circ}\text{К}$ достаточно использовать еще капилляры с отверстием порядка 1 мм. Таким образом, становятся видны практические пределы данного метода, которые оказываются не так уж далеки от достигнутых в настоящее время этим методом температур.

Характеристики теплообменника, который обеспечивал бы охлаждение потока He^3 до температуры, близкой к предельной, в принципе можно найти путем решения сложного дифференциального уравнения второго порядка, определяющего изменение температуры вдоль его длины, вытекающего из анализа условий теплового баланса на единице длины в единицу времени:

$$\frac{c \pi r^2}{T} \left(\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{dT}{dx} \frac{1}{T} \right) + \frac{1}{4} \xi \epsilon T^4 \frac{dS}{dx} + \frac{8 \cdot 10^{-7}}{\pi r^4} \frac{z^2 V^2}{T^2} = \alpha T \frac{dT}{dx} Z,$$

где первый член — приток тепла вследствие теплопроводности раствора, второй — поток тепла через поверхность теплового контакта на единице длины теплообменника, а третий — рождение тепла из-за трения. Аналогичное уравнение следует написать для канала теплообменника, заполненного He^3 , и, решая их совместно, можно получить все параметры для проектирования такого теплообменника. К сожалению, эти уравнения не приводятся к квадратурам и для их решения приемлемы только приближенные методы. Но эту задачу разумно поручить счетным машинам.

В заключение автор пользуется случаем выразить свою благодарность проф. В. И. Пешкову за ценные дискуссии, способствовавшие постановке ряда вопросов, и члену-корреспонденту АН СССР В. П. Желепову за постоянную поддержку и внимание к нашей работе.

Л и т е р а т у р а

- 1.* John C.Wheatley, preprint University of California at San Diego La Jolla, California 92037.
- 2.* Ray Radebaugh, Technical note 362 N BS issued December, 29, 1967.
- 3.* J.C. Wheatley, O.E.Vilches and W.R.Abel preprint University of California at San Diego La Jolla, California, 92037.
4. J.Bardeen, G.Baym and D.Pines. Phys.Rev. 156, 207 (1967).
5. Ebner, C., Phys.Rev. 156, 222 (1967).
6. D.O.Edwards, D.E.Brewer, P.Seligman, M.Skertic, M.Yaub, Phys.Rev. Lett., 15, 773 (1965).
7. A.C.Anderson, W.R.Roach, R.E.Sarwinski, J.C.Wheatley. Phys.Rev. Lett. 16, 7 (1966).
- 8.* Hall H.E., Ford P.J. and K.Tompson, Cryogenics 6, 80 (1966).
- 9.* Неганов Б., Борисов Н., Либург М. ЖЭТФ, 50, 1445 (1966).
- 10.* London H., Clarke G.R. and Mendoza E. Phys.Rev., 128, 1992(1962).
- 11.* Wilches O.E. and Wheatley J.C. Phys.Letters 24A, 440 (1967).
- 12.* Пешков В.П. УФН 94, 607 (1968).
13. G.K.Walters and W.M. Fairbank. Phys.Rev. 103, 262 (1956).
14. И.Померанчук. ЖЭТФ 19, 42 (1949).
15. Ifft, E.M., D.O.Edwards, R.E.Sarwinski and M.M Skertic. Phys.Rev. Letters 19, 831 (1967).
16. A.C.Anderson, D.O.Edwards, W.R.Roach, R.E.Sarwinski and J.C.Wheatley. Phys.Rev.Lett. 17, 367 (1966) and 16, 263 (1966).
17. Борисов Н., Либург М., Неганов Б., Тагирова Ф. Доклад на советско-французском коллоквиуме в Бакуриани, февраль 1968г.
- 18.* E.Varogian. Доклад на советско-французском коллоквиуме в Бакуриани, февраль 1968г.
- 19.* В.П.Пешков ЖЭТФ; 51, 1821 (1966).
20. J.Bardeen, G.Baym, P.D.Pines. Phys.Rev. Letters 17, 372 (1966).
21. M.A.Black, H.E.Hall, K.Tompson, Proc. LT-10 Moscow, 1967 p.174.

22. H.R. Abel, R.J. Jorson, J.C. Wheatley and W. Zimmermann, Jr.
Phys. Rev. Letters 18, 16, 737 (1966).
*
23. E. Varoghaux C.R. Ac. Sc. Paris (1967), 265B, 1372.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июля 1968 года.