ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р13 - 3726

Л.Г.Ткачев

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РОСТА И КОНДЕНСАЦИИ ПУЗЫРЬКОВ В ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

1968

P13 - 3726

Л.Г.Ткачев

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ РОСТА И КОНДЕНСАЦИИ ПУЗЫРЬКОВ В ПУЗЫРЬКОВЫХ КАМЕРАХ

Практические потребности развития техники пузырьковых камер представляют собой одну из важных причин, стимулирующих теоретические и экспериментальные исследования поведения пузырьков в жидкости, в частности, исследования процессов асимптотического роста и конденсации пузырьков.

Основные закономерности поведения парового пузырька в перегретой жидкости изучались в работах Плесета и Цвика[1], Форстера и Цубера[2]. Они показали, что скорость роста пузырька[x] в жидкости зависит от ряда факторов: инерции и вязкости жидкости, скорости звука в жидкости и в паре, скорости испарения жидкости и скорости подвода тепла из окружающей жидкости к стенке пузырька. В области, где радиус пузырька R много больше критического, фактором, определяющим скорость роста пузырька, является скорость теплопередачи в жидкости. Из-за малой скорости роста пузырька по сравнению со скоростью звука процесс теплопередачи рассматривается при условии, что давление в жидкости равно давлению пара в пузырьке, а температура жидкости на границе пузырька T_0 равна температуре пара и определяется из условия равновесия пара и жидкости при данном давлении.

Результаты, полученные в работах[1,2], находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными Дергарабедяна[3], который изучал рост пузырьков в перегретой воде. Однако измерения скорости роста и конденсации пузырьков в жидководородных пузырьковых камерах, полученные в работах Альвареца[4], Фабиана и др.[5], Харигела и др.[6], свидетельствуют об определенном расхождении с результатами теоретических

---

[x] *Следует иметь в виду, что излагаемая теория роста пузырьков автоматически переносится на процесс их конденсации с изменениями, о которых указывается только там, где это необходимо.*

исследований[1,2]. В работе Александрова и др.[7] показано, что на скорость роста и конденсации пузырьков существенно влияет всплывание пузырьков, однако его учёт не устраняет расхождения с экспериментальными данными, причём отклонение от теоретических величин составляет 10 ÷ 30% в случае роста пузырьков и достигает 300% в случае их конденсации.

Настоящая работа представляет собой попытку выяснения причин расхождения теоретических и экспериментальных значений скорости роста пузырьков в перегретой жидкости. Целесообразно дать краткую формулировку основных положений теории роста (конденсации) пузырьков в жидкости[1,2,8], прежде чем переходить к ее критическому анализу. Чтобы не усложнять задачу, всплывание пузырьков в данной работе не рассматривается, к тому же его исследование[7] само базируется на результатах теории поведения неподвижных пузырьков. Если не учитывать всплывания, мы имеем дело со сферически симметричной задачей отыскания решения трех уравнений:

$$\frac{4\pi}{3} L \rho' \frac{dR^3}{dt} = 4\pi R^2 k \frac{\partial T}{\partial R} ; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 \dot{r}) = 0 ; \qquad (2)$$

$$c_p \rho \frac{dT}{dt} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 k \frac{\partial T}{\partial r}) ; \qquad (3)$$

уравнения сохранения энергии при испарении жидкости с поверхности пузырька (1), уравнения непрерывности (2) и уравнения теплопроводности (3) с соответствующими граничными и начальными условиями

$$T(R,t) = T_0 , \quad T(\infty,t) = T_\infty , \quad T(r,0) = T_\infty , \qquad (4)$$

где L, ρ' – теплота испарения и плотность пара, k, ρ, c_p – теплопроводность, плотность, теплоемкость жидкости при постоянном давлении, r – радиальная координата точки в жидкости, t – время, $T(r,t)$ и T_∞ – температура в прилегающем слое[x/] и на большом удалении от центра пузырька. Уравнение (1) справедливо при условии, что давление в системе не зависит от времени, причём все величины, входящие в уравнение, вычислены в точке на границе пузырька. При решении уравнений (1)-(3) предполагается, что теплофизические параметры k, ρ, c_p являются не зависящими от температуры константами[xx/]. Исходная система уравнений становится проще, если перейти к новым независимым переменным и к новой искомой функции согласно преобразованию:

$$h = \frac{r^3 - R^3}{3}\ ; \quad \tau = D\int_0^t R^4(t)\,dt\,, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}\,, \tag{5}$$

где $D = \dfrac{k}{\rho c_p}$ – так называемая температуропроводность жидкости, а $\Delta T = T_\infty - T_0$ – перегрев жидкости. В результате этого преобразования уравнения (1)-(3) и дополнительные условия (4) трансформируются к виду:

$$\frac{dR^3}{d\tau} = \frac{3k\Delta T}{DL\rho'}\;\frac{\partial\theta(0,\tau)}{\partial h}\,, \tag{6}$$

$$\dot{h} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial h}\left[\left(1 + \frac{3h}{R^3}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\partial\theta}{\partial h}\right], \tag{8}$$

[x/] Слой жидкости у поверхности пузырька, в котором происходит изменение температуры от T_0 до T_∞.

[xx/] Справедливость такого предположения для случаев воды и жидкого водорода анализируется ниже.

$$\theta(0,\tau)=-1,\ \theta(\infty,\tau)=\theta(h,0)=0. \qquad (9)$$

При решении уравнения (8) возникают трудности, так как оно содержит неизвестную функцию $R(\tau)$. Эти трудности удается обойти, если предположить, что отношение $\frac{3h}{R^3} \ll 1$, так как в этом случае можно воспользоваться методом теории возмущений. Нетрудно показать, что в нулевом приближении решение системы уравнений (6)-(8) имеет вид:

$$\theta = -1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h/2\sqrt{\tau}} e^{-x^2} dx \qquad (10)$$

$$R^3 = \frac{6\,\Delta T\,k}{L\,\rho'\,D\sqrt{\pi}} \sqrt{\tau} \equiv 6\,A_0\sqrt{\tau} \qquad (11)$$

После того, как решение $\theta=\theta(h,\tau)$ и $R^3 = R^3(\tau)$ найдено, можно вычислить среднее значение величины $\frac{3h}{R^3}$ с тем, чтобы проверить исходное предположение о ее малости. По определению получаем:

$$3\left\langle \frac{h}{R^3} \right\rangle \equiv \frac{\int_0^\infty \frac{3h}{R^3}\,\theta(h,\tau)\,dh}{\int_0^\infty \theta(h,\tau)\,dh} = \frac{\pi}{4}\,\frac{L\rho' D}{k\,\Delta T} \qquad (12)$$

Физический смысл величины $3\left\langle \frac{h}{R^3} \right\rangle$, как ясно из соотношения (12), - это отношение объема прилегающего слоя к объему пузырька. Ниже, в таблице 1, приводятся значения $3\left\langle \frac{h}{R^3} \right\rangle$, вычисленные по формуле (12) для воды и жидкого водорода с тем, чтобы сравнить, насколько применимо принятое приближение как в случае роста, так и в случае конденсации пузырьков. Здесь же приведены зависимости от температуры параметров k, ρ, c_p.

Таблица 1

Наполнитель	H_2O	H_2	90% H + 10% Ne
$T^o_\infty K$ рост = 5	378	25	27
$3\langle\frac{h}{R^3}\rangle$ рост ($\Delta T = 5$)	0,05	0,15	0,01
$3\langle\frac{h}{R^3}\rangle$ конденс ($\Delta T = 2$)	0,1	1	0,2
$\frac{1}{k}\left(\frac{dk}{dT}\right)$	10^{-3}	3.10^{-2}	2.10^{-2}
$\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)$	-2.10^{-4}	-3.10^{-2}	-2.10^{-2}
$\frac{1}{c_p}\left(\frac{dc_p}{dT}\right)$	3.10^{-4}	7.10^{-2}	0,1

Значения параметров, приведенных в этой таблице, получены экспериментально в работах/3-6,9-11/. Ввиду большой перспективности использования неон-водородных смесей для наполнения пузырьковых камер/11/ также приведены данные для смеси 90 мол % водорода и 10 мол % неона x/.

Как следует из таблицы 1, предположение о малости величины $3\langle\frac{h}{R^3}\rangle$ справедливо для случая роста пузырьков и, вообще говоря, теряет силу в случае конденсации. Дело в том, что величина перегрева ΔT, от которой зависит $3\langle\frac{h}{R^3}\rangle$, согласно соотношению (12), в процессе конденсации пузырьков существенно меньше, чем в процессе роста.

Что касается зависимости величин k, ρ, c_p от температуры, то для жидкого водорода она в 10 ÷ 100 раз сильнее, чем для воды, так что при перегреве в 5^o на протяжении прилегающего слоя значения k, ρ, c_p меняются на 15 ÷ 35% в случае жидкого водорода и только на 0,1 ÷ 0,5% в случае воды. Следовательно, первоначальное предположение о постоянстве теплофизических параметров в прилегающем слое в случае жидкого водорода не оправдано.

Таким образом, анализ данных из таблицы 1 позволяет заключить, что имеются некоторые основания для разногласия теоретических расчётов скорости роста (конденсации) пузырьков с экспериментальными данными для водорода. Чтобы найти более удовлетворительное согласие между теоретическими и экспериментальными данными, необходимо решить более общую задачу: во-первых, без предположения о малости величины $\frac{3h}{R^3}$ в уравнении (8); во-вторых, желательно учесть в исходных уравнениях зависимость теплопроводности, плотности и теплоемкости жидкости от температуры.

---

x/ Данные взяты из работы/10/.

Зависимость теплофизических параметров k, ρ и c_p от температуры сильно усложняет решение исходной системы уравнений. Поэтому пренебрегаем зависимостью величин k и ρ от температуры, так как в случае жидкого водорода она слабее, чем зависимость $c_p(\theta)$. Теплоемкость как функцию температуры представляем двумя членами ряда Тейлора:

$$c_p(\theta) = c_{p\infty}(1 + a\theta), \tag{13}$$

где $c_{p\infty}$ – теплоемкость жидкости вне прилегающего слоя, а безразмерный параметр разложения a в случае жидкого водорода равен $\approx$ 0,35 при $\Delta T = 5$ и $T = 25^\circ K$.

Таким образом, вместо линейного уравнения (8) получаем квазилинейное уравнение:

$$(1 + a\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial h}\left[\left(1 + \frac{3h}{R^3}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{\partial\theta}{\partial h}\right], \tag{14}$$

причём величина $\frac{3h}{R^3}$ может принимать произвольные значения. Решение этого уравнения осложняется наличием как нелинейного члена, так и неизвестной функции $R(\tau)$. Однако свойства симметрии уравнения (14) позволяют упростить задачу. Действительно, как уравнение (14), так и уравнения (6–9) инвариантны при преобразовании:

$$\tau \to m^2\tau, \qquad h \to m h, \tag{15}$$

поэтому решение можно искать в виде $\theta = \theta(s)$, где $s = \frac{h}{2\sqrt{\tau}}$. Отсюда следует, что зависимость $R(\tau)$ может быть представлена следующим образом:

$$R^3 = 6A\sqrt{\tau} \tag{16}$$

или, учитывая связь между переменными τ и t,

$$R = \sqrt{12D}\quad A\sqrt{t}\ , \tag{16}$$

где A – не зависящая от r постоянная, которая определяется в результате решения системы уравнений (6,7,9,14). Подстановка $\theta = \theta(s)$ позволяет записать эти уравнения в виде:

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_o \frac{d\theta(0)}{ds}\,, \tag{17}$$

$$2(1+\alpha\theta)\,s\,\frac{d\theta}{ds} = -\frac{d}{ds}\left[\left(1+\frac{s}{A}\right)^{\frac{4}{8}}\frac{d\theta}{ds}\right]\,. \tag{18}$$

$$\theta(0) = -1, \qquad \theta(\infty) = 0. \tag{19}$$

Уравнение (18) представляет собой обыкновенное квазилинейное дифференциальное уравнение, решение которого зависит от двух параметров α и A. Параметр α, по определению, должен быть мал по сравнению с единицей, поэтому решение уравнения (18) проще всего искать в виде ряда по α. В линейном приближении получаем:

$$\theta = \theta_1 + \alpha\,\theta_2\,. \tag{20}$$

Так как параметр A также зависит от α, то, наряду с разложением (20), необходимо одновременно разлагать и его

$$A = A_1 + \alpha A_2 \tag{21}$$

В результате разложения система уравнений (17)-(19) распадается на две системы. Система уравнений в нулевом приближении по a имеет вид:

$$A_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_0 \frac{d\theta_1(0)}{ds} ,$$

$$2s\frac{d\theta_1}{ds} + \frac{d}{ds}\left[\left(1+\frac{s}{A_1}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{d\theta_1}{ds}\right] = 0 \qquad (22)$$

$$\theta_1(0) = -1 , \qquad \partial\theta_1(\infty) = 0 .$$

После того, как найдено решение $\theta_1(s)$ и A_1, определяется система уравнений первого приближения по a

$$A_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_0 \frac{d\theta_2(0)}{ds} ,$$

$$2s\frac{d\theta_2}{ds} + \frac{d}{ds}\left[\left(1+\frac{s}{A_2}\right)^{\frac{4}{3}}\frac{d\theta_2}{ds}\right] =$$

$$(23)$$

$$= -2s\theta_1\frac{d\theta_1}{ds} + \frac{d}{ds}\left[\left(1+\frac{s}{A_1}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{4sA_2}{3A_1^2}\cdot\frac{d\theta_1}{ds}\right],$$

$$\theta_2(0) = \theta_2(\infty) = 0 .$$

Получившиеся уравнения довольно легко решаются, причём решения θ_1 и θ_2 выражаются в квадратурах, которые имеют громоздкий вид и поэтому не приводятся. После того, как найдены решения θ_1 и θ_2, окончательные уравнения для определения параметров A_1 и A_2 имеют следующий вид:

$$-1+\frac{6A_1^2}{\sqrt{\pi}A_0}\int_0^1 \exp\left[3A_1^2\phi(x)\right]dx=0, \tag{24}$$

$$A_2=\frac{6A_1^3\int_0^1 \exp\left[3A_1^2\phi(y)\right]dy\int_y^1 (t^{-3}-1)\,dt\left[-1+\frac{6A_1^2}{\sqrt{\pi}A_0}\int_t^1 \exp\left[3A_1^2\phi(z)\right]dz\right]}{\int_0^1 \exp\left[3A_1^2\phi(y)\right]\left[-\frac{4}{3}y^3+\frac{7}{3}-2A_1^2(2y^{-2}+8y-y^4-9)\right]dy}, \tag{25}$$

где $\phi(x)\equiv\dfrac{-1+3x^2-2x^3}{x^2}$ и $A_0=\dfrac{\Delta T\cdot k}{L\,\rho'\,D\sqrt{\pi}}$ –фактор, определяющий скорость пузырька при условиях, что $a=0$ и $\dfrac{3h}{R^3}\ll 1$. Получившиеся уравнения (24) и (25) решаются с помощью численного интегрирования.

Результаты численного решения представлены графически на рис. 1–3. В качестве независимой переменной удобно выбрать параметр A_0 или A_1. Такой выбор позволяет естественным образом разбить область изменения $A_0(A_1)$ на области, соответствующие росту и конденсации пузырьков, так что сразу видна роль рассматриваемых эффектов в обоих процессах.

На рис. 1 приведена зависимость величины $\dfrac{A_1}{A_0}$ как функции A_0, которая характеризует влияние толщины прилегающего слоя на теоретическую скорость роста (конденсации) неподвижных пузырьков. Характер зависимости позволяет заключить, что:

а) учёт члена $\dfrac{3h}{R^3}$ в уравнении теплопроводности приводит к увеличению теоретической скорости роста (конденсации) пузырьков;

б) поправка к скорости роста невелика и лежит в пределах 8÷15%, поправка к скорости конденсации пузырьков значительна и достигает 40÷150%.

Что касается поправки, возникающей при учёте зависимости теплоемкости жидкости от температуры, то она представлена на рис. 2 с помощью величины $(-\frac{A_2}{A_1})$ как функции A_1. Как видно из рисунка, поправка всюду отрицательна, причём возрастает с увеличением скорости роста (конденсации); в области роста она составляет 12 ÷ 15%, в области конденсации – менее 10%.

Таким образом, суммарная поправка к скорости роста пузырька лежит в области 5 ÷ 10%, поправка к скорости конденсации может достигать 150% и обусловлена, в основном, большой толщиной прилегающего слоя.

В связи с тем, что толщина прилегающего слоя играет существенную роль при рассмотрении динамики пузырьков в жидкости, на рис. 3 приводится зависимость величины $3 < \frac{h}{R^3} > = < \frac{r^3}{R^3} > -1$ как функции A. Ее значения вычислялись в соответствии с определением (левая сторона соотношения (12)), причём пунктирная кривая получена с помощью решения Плесета-Цвика (10-11) с учётом зависимости между A_1 и A_0, сплошная кривая получается, если воспользоваться решением системы уравнений (22) и соотношением (16). Из рис. 3 видно, что толщина прилегающего слоя мала в процессах роста пузырьков, причем, как и должно быть, обе кривые в этой области изменения A_1 совпадают. В случае конденсации величина $3<\frac{h}{R^3}>$ может принимать произвольные, вообще говоря, большие значения, причем решение Плесета-Цвика дает заниженные значения толщины прилегающего слоя. Итак, первоначальный вывод, сделанный на основании приближенного рассмотрения процессов роста и конденсации пузырьков в пузырьковых камерах, усиливается при более точном рассмотрении.

В заключение уместно сравнить полученные результаты с имеющимися измерениями скорости роста и рекомпрессии пузырьков в водородных пузырьковых камерах.

а). Экспериментальные данные о росте пузырьков при постоянном давлении /3-6/ подтверждают, что $R \approx \sqrt{t}$, как это следует из общего вида уравнений (6-9,14).

б). Отличие теоретического и вычисленного экспериментально коэффициента пропорциональности в этой зависимости $R(t)$, достигающее 30% /6/, не может рассматриваться как доказательство несправедливости изложенного подхода, так как при вычислении экспериментального фактора не учитывалось изменение величин T, ρ и c_p при адиабатическом уменьшении давления от P_{max} до P_{min} /12/. Законы термодинамики определяют эти изменения следующим образом:

$$\delta T = \int_{P_{max}}^{P_{min}} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S dp = \int_{P_{max}}^{P_{min}} \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dp, \qquad (27)$$

$$\delta \rho = \int_{P_{max}}^{P_{min}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_S dp = -\int_{P_{max}}^{P_{min}} \rho^2\left[\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T + \frac{T}{c_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p^2\right] dp \qquad (28)$$

$$\delta c_p = \int_{P_{max}}^{P_{min}} \left(\frac{\partial c_p}{\partial p}\right)_S dp = \int_{P_{max}}^{P_{min}} \frac{T}{c_p}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial c_p}{\partial T}\right)_p - c\left(\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}\right)_p\right] dp, \qquad (29)$$

где S –энтропия системы, $v \equiv \frac{1}{\rho}$ – удельный объем жидкости. Однако воспользоваться этими формулами трудно, так как необходимо знать зависимость плотности и теплоемкости от давления и температуры как в нормальной, так и метастабильной области. Игнорирование поправок (27-29) не позволяет сделать точное сравнение с теоретическими расчётами, так как нельзя в одном случае пренебрегать, а в другом учитывать эффекты одного и того же порядка.

в). Последнее замечание касается рекомпрессии пузырьков. Из нашего рассмотрения следует, что в этом случае толщина прилегающего слоя $\delta \approx R$. Однако в работе /7/ при исследовании рекомпрессии всплывающих пузырьков необоснованно предполагалось, что $\delta \ll R$. По-видимому, именно это обстоятельство является причиной большого несоответствия экспериментальных /6/ и теоретических /7/ данных о скорости рекомпрессии пузырьков в жидководородных пузырьковых камерах.

Важная роль всплывания пузырьков в процессе рекомпрессии несомненна, это подтверждается экспериментальными наблюдениями [6]. В связи с этим было бы важно рассмотреть динамику всплывающих пузырьков с учётом результатов этой работы.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность Л.Г.Заставенко и У.Кундту за стимулирующие обсуждения, а также Г.С.Воронову, Ю.П.Мерекову, Г.И.Селиванову и А.И.Филиппову за ценные замечания.

Литература

1. *M.S.Plesset, S.A.Zwick, J.Appl. Phys., 23, 95 (1952); 25, 493 (1954); 32, 308 (1955).*
2. *H.K.Forster, N.Zuber, J.Appl. Phys., 25, 474 (1954). H.K.Forster, J.Appl. Phys., 25, 1067 (1954).*
3. *Dergarabedian P., J.Appl. Mech, 75, 557 (1953).*
4. *L.Alvarez, CERN Symposiumon High Energy Physics, 2, 1 (1956).*
5. *B.N.Fabian, R.L.Place, W.A.Rileg, W.H.Sims and V.P.Kenney, Rev. Sci. Instr., 34, 484 (1963).*
6. *G.Harigel, G.Horlitz, S.Wolff, Preprint DESY 67/14 (1967).*
7. *Ю.А.Александров, Г.С.Воронов, Н.Б.Делоне, ПТЭ, 1962, № 3, 50; 1963, № 2, 41;*
8. *L.A.Skinner and S.G.Bankoff, Phys. Fluids 7, 1 (1964); 8, 1417 (1965).*
9. *Дж.Кэй, Т.Лэби, Таблицы физических и химических постоянных, М 1962.*
10. *V.P.Kenney, W.D.Shephard, W.B.Madden, E.A.Harrington, Preprint ANL. 60439 (1967).*
11. *R.Florent, C.F.Geles, G.Harigel, H.Lentz, F.Schmeisner, I.Tischhauser, G.Horlitz, S.Wolff, H.Filthuth, Preprint DESY, Oct. 1967.*
12. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, Статистическая физика. М 1964, стр. 69-73.*

Рукопись поступила в издательский отдел
21 февраля 1968 года.

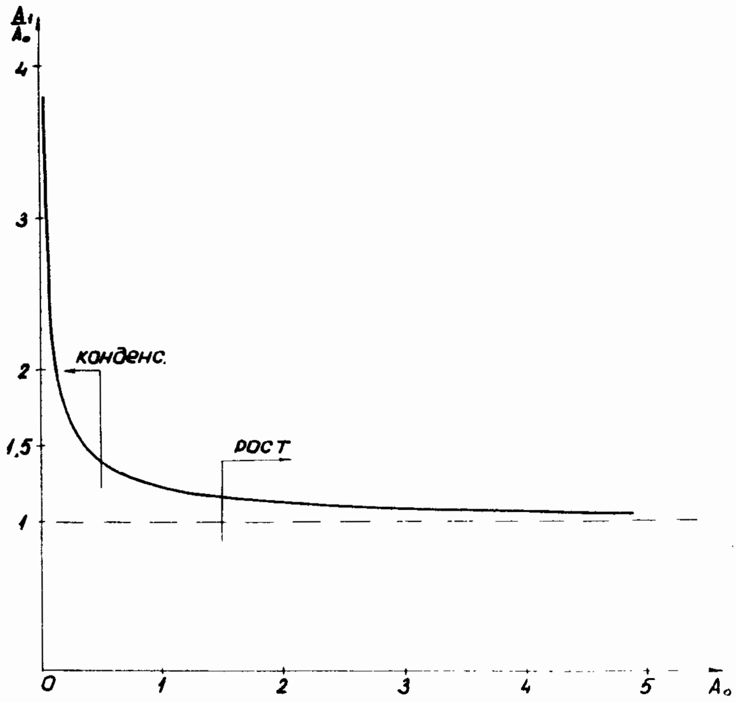

Рис. 1. Относительная поправка к теоретической скорости роста (конденсации) пузырька при точном учёте влияния толщины прилегающего слоя между пузырьком и жидкостью.

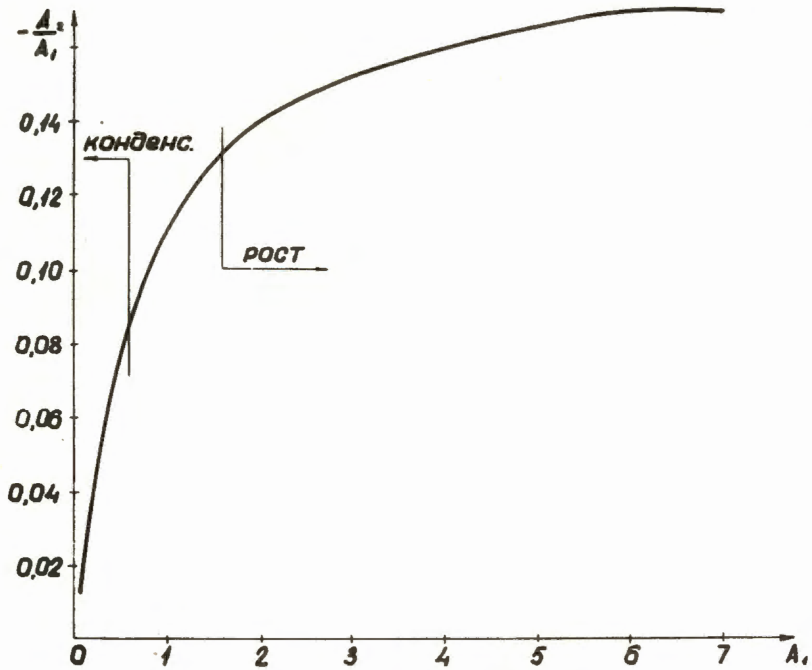

Рис. 2. Поправка к теоретической скорости роста (конденсации) пузырька, обусловленная зависимостью теплоемкости жидкости от температуры.

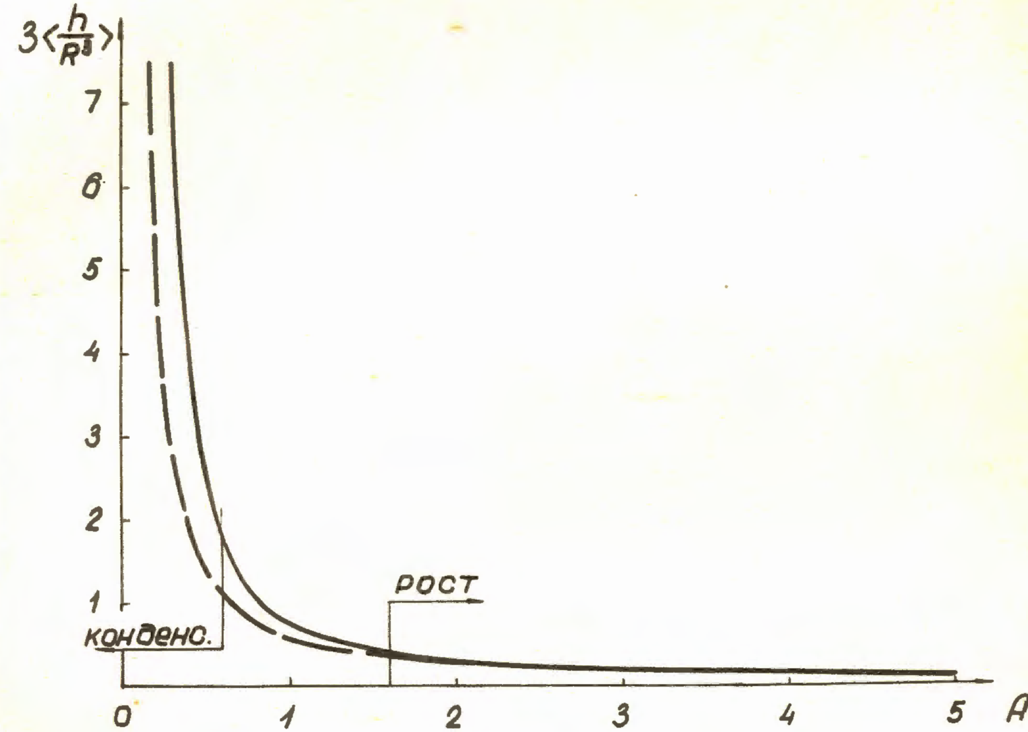

Рис. 3. Отношение объема прилегающего слоя к объему пузырька в процессах роста и конденсации пузырьков. Пунктирная линия соответствует решению Плесета-Цвика, сплошная – решению, полученному в данной работе.