

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

99-159

P11-99-159

И.В.Амирханов, Е.В.Земляная, И.В.Пузынин,
Т.П.Пузынина, Т.А.Стриж

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ
УРАВНЕНИЙ НА СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ
С КУЛОНОВСКИМ И ЛИНЕЙНЫМ
ПОТЕНЦИАЛАМИ*

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта
97-01-01040)

1999

1. Введение

Численный анализ ряда релятивистских потенциальных моделей (см., в частности, [1]-[3]) сводится к решению задач на собственные значения для интегральных уравнений в импульсном пространстве. Одна из трудностей исследования таких задач связана с тем, что в качестве эффективного потенциала в указанных моделях, по аналогии с нерелятивистским подходом [4], обычно используется комбинация кулоновского V_C и линейно растущего V_L потенциалов:

$$V_C(|\vec{p} - \vec{q}|) = -\alpha \frac{4\pi}{|\vec{p} - \vec{q}|^2}, \quad \alpha > 0, \quad (1)$$

$$V_L(|\vec{p} - \vec{q}|) = -\sigma \frac{8\pi}{|\vec{p} - \vec{q}|^4}, \quad \sigma > 0, \quad (2)$$

что приводит к расходимостям в ядрах интегральных уравнений при $\vec{p} = \vec{q}$ и $\vec{p} \rightarrow \infty$. В ряде работ (в частности, [1]) расходимость интегралов устраняется за счет дополнительно введенных в исходные уравнения контрчленов (т.н. перенормировка).

Другой подход предполагает модификацию эффективного потенциала на уровне координатного представления путем его аппроксимации некоторыми элементарными функциями. Исследование свойств ряда таких аппроксимирующих потенциалов проведено в работе [5].

В некоторых случаях расходимость под интегралом удается убрать с помощью специального преобразования исходных уравнений. В частности, такой подход рассматривается в работе [6] применительно к определенному классу задач. В работах [7] и [8] используется другой способ преобразования исходных уравнений для численного исследования КХД-инспирированной модели кваркония.

В настоящей работе исследуется обобщение разработанных в [8] и [5] приемов на случай т.н. запаздывающего взаимодействия. При этом потенциалы (1) и (2) принимают соответственно вид

$$V_C(|\vec{p} - \vec{q}|) = -\alpha \frac{4\pi}{|\vec{p} - \vec{q}|^2 - (E_p - E_q)^2}, \quad (3)$$

$$V_L(|\vec{p} - \vec{q}|) = -\sigma \frac{8\pi}{(|\vec{p} - \vec{q}|^2 - (E_p - E_q)^2)^2}, \quad (4)$$

где $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$, $E_q = \sqrt{q^2 + m^2}$, m – масса (параметр модели).

Переход от потенциалов (1), (2) к (3), (4) означает на уровне координатного представления переход к нелокальному взаимодействию, т.е. исходные дифференциальные уравнения в координатном пространстве становятся интегродифференциальными. Это сильно усложняет интуитивное представление о свойствах спектральной задачи с такими потенциалами.

В качестве примера мы будем рассматривать следующее релятивистское уравнение [9], [10]:

$$[Q(p) - E_{nl}^{(\beta)}] \phi_{nl}^{(\beta)}(p) - \int_0^{\infty} dq V_l^{(\beta)}(p, q) \phi_{nl}^{(\beta)}(q) = 0, \quad (5)$$

где

$$Q(p) = 2(E_p - m), \quad (6)$$

$$V_l^{(\beta)}(p, q) = \int_{-1}^{+1} dx V^{(\beta)}(p, q, x) P_l(x), \quad (7)$$

с условием нормировки

$$\int_0^{\infty} (\phi_{nl}^{(\beta)}(p))^2 dp = 1. \quad (8)$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$ (число нулей собственной функции), m – параметр (масса), $l = 0, 1, 2, \dots$, P_l – полиномы Лежандра, $\beta = 1, 2, 3, 4$ соответствует четырем указанным выше типам взаимодействия (1), (2), (3), (4).

Отметим, что целый ряд релятивистских обобщений уравнения Шредингера отличается от задачи (5), (6) только видом функции $Q(p)$ [3].

Нерелятивистский случай, который будет использоваться для сравнения и тестирования, соответствует функции

$$Q(p) = \frac{p^2}{m} \quad (9)$$

в задаче (5), (7), (8).

В дальнейшем мы будем обозначать решения нерелятивистского уравнения (5), (9) индексом NR . Решения релятивистского уравнения (5), (6) будут обозначаться R при $\beta = 1, 2$ и RT при $\beta = 3, 4$.

В следующих двух разделах представлены постановка задачи и методы численного анализа уравнения (5) с кулоновским и линейным потенциалами. В последнем разделе обсуждаются некоторые свойства спектра рассматриваемого уравнения с учетом релятивистских эффектов. Демонстрируются соответствующие численные результаты.

Для расчетов использовались вычислительные схемы и программы, разработанные на основе непрерывного аналога метода Ньютона [11].

2. Кулоновский потенциал

Для кулоновских потенциалов (1) и (3) выражение (7) может быть записано в следующей форме:

$$V_l^{(1)}(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dt \frac{P_l(t)}{y-t}, \quad y = \frac{p^2 + q^2}{2pq}, \quad (10)$$

$$V_l^{(3)}(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dt \frac{P_l(t)}{y-t}, \quad y = \frac{p^2 + q^2 - (E_p - E_q)^2}{2pq}. \quad (11)$$

Отметим, что численное решение нерелятивистского уравнения (5), (9) с кулоновским потенциалом (10) не представляет принципиальных трудностей, связанных с сингулярностью ядра интеграла. Однако при решении других уравнений в рамках КХД, в частности уравнения Швингера – Дайсона [1, 2], использование кулоновского потенциала приводит к неустранимым расходимостям в этих уравнениях.

В частном случае $l = 0$ формулы (10), (11) можно представить в виде

$$V_0^{(1)}(p, q) = \frac{\alpha}{\pi} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right|, \quad (12)$$

$$V_0^{(3)}(p, q) = V_0^{(1)}(p, q) + \bar{V}_0^{(3)}(p, q), \quad (13)$$

где

$$\tilde{V}_0^{(3)}(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left| \frac{E_p E_q + m^2 + pq}{E_p E_q + m^2 - pq} \right|. \quad (14)$$

В нерелятивистском случае в работе [7] для устранения особой точки (при $p = q$) уравнение (5) преобразовывалось следующим образом [7]:

$$\begin{aligned} [Q(p) - E_{n0}] \phi_{n0}(p) - \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty dq \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| (\phi_{n0}(q) - \phi_{n0}(p)) + \\ - \frac{\alpha}{\pi} \phi_{n0}(p) I_2(p) = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$I_2(p) = \int_0^\infty dq \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right|. \quad (16)$$

При переходе от полубесконечного интервала интегрирования $[0, \infty)$ к конечному отрезку $[0, P_M]$ интеграл (16) вычисляется аналитически:

$$I_2(p) = (P_M + p) \ln(P_M + p) - (P_M - p) \ln(P_M - p) - 2p \ln p$$

и решение задачи (15) на конечном интервале $[0, P_M]$ при $P_M \rightarrow \infty$ сходится к решению исходной сингулярной задачи. Такой прием применялся нами для численного анализа уравнений Швингера - Дайсона и Бете - Солпитера в работе [8].

Однако использование аналогичного подхода для решения релятивистской задачи (5), (6) приводит к тому, что, наряду с существованием решения для каждого фиксированного P_M , стабилизация решения при $P_M \rightarrow \infty$ для потенциала (1) происходит очень медленно, а для потенциала (3) не происходит вообще (с ростом P_M собственное значение уменьшается в абсолютном значении и начиная с некоторого значения меняет знак, т.е. решение перестает существовать). Зависимость собственных значений E_{00}^R (потенциал (12)) и E_{00}^{RT} (потенциал (13)) от P_M представлена в таблице 1. Для сравнения даны также вычисленные по той же программе собственные значения E_{00}^{NR} нерелятивистского уравнения

(5), (9), (12), демонстрирующие сходимость к аналитическому значению $E_{00}^*(m) = -15$, $m = 15$ при $P_M \rightarrow \infty$.

Таблица 1. $m = 15, \alpha = 2, n = 0, l = 0$

P_M	E_{00}^R	E_{00}^{RT}	E_{00}^{NR}
50	-19,52	-17,75	-14,21
100	-27,44	-20,47	-14,86
200	-33,59	-18,83	-14,98
300	-48,92	-14,02	-14,99
400	-58,15	-8,25	-15,00
500	-67,05	-1,92	-15,00

Вопрос существования решений уравнения (5), (6) с потенциалами (1), (3) тесно связан с поведением потенциалов $V_0^{(1)}(p, q)$ и $V_0^{(3)}(p, q)$ при различных значениях аргументов. В частности, если $p = q$, то

$$\lim_{p \rightarrow \infty} V_0^{(3)}(p, p) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{p^2 + m^2}{m^2} \right) \rightarrow \infty. \quad (17)$$

При фиксированном значении $q = \bar{q}$ имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} V_0^{(3)}(p, \bar{q}) = \frac{\alpha}{2\pi} \ln \left(\frac{(E_{\bar{q}} + \bar{q})^2}{m^2} \right). \quad (18)$$

Из точного решения нерелятивистской задачи с кулоновским потенциалом в импульсном представлении следует

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \phi_{n0}^{NR}(p) = \frac{1}{p^3}, \quad (19)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [Q - E_{n0}^{NR}] \phi_{n0}^{NR}(p) = \frac{1}{p}, \quad (20)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int V_0^{(1)}(p, q) \phi_{n0}^{NR}(q) dq = \frac{1}{p}. \quad (21)$$

В случае существования решения уравнения (5), (6) с потенциалом (1), при выполнении условия (21), в пределе $p \rightarrow \infty$ получаем

$$\phi_{n0}^R(p) \rightarrow \frac{1}{p^2}. \quad (22)$$

Это означает, что ϕ_{n0}^R затухает существенно медленнее, чем собственная функция нерелятивистского уравнения, что и подтверждается расчетами.

С другой стороны, предполагая существование решения задачи (5), (6) с потенциалом (3), имеем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(q) dq = C_1, \quad (23)$$

где

$$C_1 = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{\infty} \ln \left[\frac{(E_q + q)}{m} \right]^2 \phi_{n0}^{RT}(q) dq. \quad (24)$$

Тогда асимптотическое поведение решения должно иметь вид

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \phi_{n0}^{RT}(p) = \frac{C_1}{p}. \quad (25)$$

Однако при этом мы получаем $C_1 = \infty$, что указывает на отсутствие решения задачи (5), (6) с потенциалом (3).

Отметим также, что при численном решении интегральный член уравнения (5) обычно представляется в виде

$$\int_0^{\infty} V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(q) dq = I_1(p) + I_2(p), \quad (26)$$

где

$$I_1(p) = \int_0^{P_M} V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(q) dq, \quad (27)$$

$$I_2(p) = \int_{P_M}^{\infty} V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(q) dq \quad (28)$$

и, далее, параметр P_M выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие

$$I_2(p, P_{M_1}) < I_2(p, P_{M_2}) < \epsilon \quad \text{при} \quad P_{M_1} > P_{M_2}, \quad (29)$$

где ϵ – заранее заданное положительное малое число.

Из-за свойств (17), (18) и (23) условие (29) не выполняется. Из таблицы 1 видно, что при увеличении P_M стабилизации решений не происходит. Поэтому полученные численные результаты можно

интерпретировать как отсутствие решения задачи (5), (6) с потенциалом (3), хотя этот вопрос требует дальнейшего строгого теоретического исследования.

Как уже отмечалось выше, "исправить" ситуацию с расходимостями в нуле и на бесконечности можно, заменив исходный потенциал некоторой аппроксимирующей функцией. При этом правильный выбор параметров этой аппроксимирующей функции позволяет получить заданное количество состояний с известной точностью. Одна из таких модификаций, рассмотренная в [5], имеет вид

$$V_C(r) = \begin{cases} \alpha/r_1, & 0 \leq r < r_1, \\ \alpha/r, & r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & r_2 < r < \infty, \end{cases} \quad (30)$$

где $r_1 < r_2$ – параметры. При этом потенциал $V^{(\beta)}(p, q, x)$ в формуле (7) принимает вид

$$V^{(\beta)}(p, q, x) = V(\hat{p}^{(\beta)}) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{pq}{(\hat{p}^{(\beta)})^2} \left[\frac{\sin \hat{p}^{(\beta)} r_1}{\hat{p}^{(\beta)} r_1} - \cos \hat{p}^{(\beta)} r_2 \right], \quad (31)$$

где $\beta = 1, 3$,

$$\hat{p}^{(1)} = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pqx}, \quad (32)$$

$$\hat{p}^{(3)} = \sqrt{p^2 + q^2 - 2pqx - (E_p - E_q)^2}. \quad (33)$$

Поскольку

$$\lim_{p \rightarrow q} V^{(\beta)}(p, q, x) = \text{const} < \infty,$$

потенциал (31) не имеет сингулярности при $p = q$, что делает его удобным в численном анализе. Таблица 2 подтверждает стабилизацию (хотя и медленную) собственных значений E_{n0}^R ($n = 0, 1$) релятивистского уравнения (5), (6) с потенциалом (31), (32) при увеличении интервала интегрирования P_M . Однако такой вариант не позволяет получить решение задачи с "запаздывающим потенциалом" (31), (33). Для сравнения в таблице даны также собственные значения E_{n0}^{NR} ($n = 0, 1$) нерелятивистской задачи (5), (6) с потенциалом (31), (32), позволяющие оценить точность аппроксимации кулоновского потенциала с помощью представления (31) (аналитические собственные значения $E_{00}^{NR*} = -1$, $E_{10}^{NR*} = -0,25$ при $m = 1$).

Таблица 3а. $m = 1, \alpha = 2, l = 0, \mu_1 = 0,01, \mu_2 = 5$

P_M	E_{00}^R	E_{10}^R	P_M	E_{00}^{RT}	E_{10}^{RT}	P_M	E_{00}^{NR}	E_{10}^{NR}
10	-1,266	-0,364	50	-25,91	-1,55	10	-0,865	-0,225
20	-1,268	-0,365	100	-50,68	-2,83	20	-0,866	-0,226
30	-1,268	-0,365	200	-99,88	-5,47	30	-0,866	-0,226

Таблица 3б. $m = 1, \alpha = 2, l = 0, \mu_1 = 0,001, \mu_2 = 10$

P_M	E_{00}^R	E_{10}^R	P_M	E_{00}^{RT}	E_{10}^{RT}	P_M	E_{00}^{NR}	E_{10}^{NR}
10	-1,723	-0,469	50	-44,43	-1,62	10	-1,018	-0,266
20	-1,771	-0,479	100	-89,56	-3,01	20	-1,017	-0,265
30	-1,774	-0,480	200	-179,3	-6,13	30	-1,017	-0,265

Отметим, что с указанными значениями параметров потенциал (35) является более грубым приближением к кулоновскому, в чем можно убедиться, сравнивая результаты решения нерелятивистского уравнения (5), (9). При этом, как видно из таблиц 2, 3, потенциал (35) обеспечивает более быструю "стабилизацию" решения релятивистского уравнения (5), (6) при $P_M \rightarrow \infty$ по сравнению с потенциалом (31). С другой стороны, сравнивая левые части таблиц 3а,б, можно заметить, что более "аккуратная" аппроксимация кулоновского потенциала комбинацией потенциалов Юкавы ($\mu_1 = 0,001, \mu_2 = 10$) приводит к более медленной стабилизации собственных значений с увеличением интервала интегрирования. Как и в случае потенциала (31), для запаздывающего взаимодействия нам не удалось добиться стабилизации решений при увеличении интервала интегрирования.

3. Линейный потенциал

Для представления линейного потенциала мы будем использовать следующий подход [5]:

$$V_L(\tau) = \sigma \begin{cases} \tau, & 0 \leq \tau < \tau_M \\ \tau_M, & \tau_M \leq \tau < \infty \end{cases}, \quad (38)$$

Таблица 2. $m = 1, \alpha = 2, l = 0, r_1 = 0,01, r_2 = 20$

P_M	E_{00}^R	E_{10}^R	P_M	E_{00}^{RT}	E_{10}^{RT}	P_M	E_{00}^{NR}	E_{10}^{NR}
20	-3,247	-0,638	20	-8,053	-0,959	10	-0,997	-0,249
40	-4,949	-0,840	40	-55,11	-1,393	20	-0,999	-0,250
60	-6,444	-0,983	60	-109,6	-1,785	30	-0,999	-0,250
80	-7,707	-1,089	80	-165,8	-2,162	40	-1,000	-0,250
100	-8,769	-1,170	100	-222,6	-2,537	50	-1,000	-0,250
120	-9,610	-1,231	120	-279,3	-2,858	60	-1,000	-0,250
150	-9,903	-1,252	150	-367,9	-3,213	70	-1,000	-0,250

Другой способ модификации исходного потенциала, устраняющий сингулярности в нуле и на бесконечности, представляет собой комбинацию двух потенциалов Юкавы:

$$V_Y(x) = \alpha \left[\frac{\exp(-\mu_1 x) - \exp(-\mu_2 x)}{x} \right], \quad (34)$$

где $\mu_1 \ll 1, \mu_2 \gg 1$ - параметры.

При $l = 0$ импульсное представление потенциала (34) принимает вид

$$V_Y(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\ln \frac{(p+q)^2 + \mu_1^2}{(p-q)^2 + \mu_1^2} - \ln \frac{(p+q)^2 + \mu_2^2}{(p-q)^2 + \mu_2^2} \right]. \quad (35)$$

Запаздывающее взаимодействие вводится в потенциал (35) следующим образом:

$$V_Y(p, q) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\ln \frac{(p+q)^2 + \mu_1^2 - \delta}{(p-q)^2 + \mu_1^2 - \delta} - \ln \frac{(p+q)^2 + \mu_2^2 - \delta}{(p-q)^2 + \mu_2^2 - \delta} \right], \quad (36)$$

где

$$\delta = (\sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{q^2 + m^2})^2. \quad (37)$$

В таблицах 3а,б даны собственные значения E^R и E^{RT} уравнения (5) с потенциалами (35) и (36) соответственно при разных значениях параметров μ_1, μ_2 . Как и в таблицах 1, 2, для сравнения представлены численные результаты для нерелятивистского случая.

где r_M — параметр потенциала, который выбирается так, чтобы обеспечить вычисление нужного числа состояний. В импульсном представлении потенциал $V^{(\beta)}(p, q, x)$ в формуле (7) примет вид

$$V^{(\beta)}(p, q, x) = V(\hat{p}^{(\beta)}) + \sigma r_M (2\pi)^3 \delta(|\vec{p} - \vec{q}|), \quad (39)$$

где

$$V^{(\beta)}(\hat{p}^{(\beta)}) = -\frac{\sigma}{\pi} \frac{pq}{(\hat{p}^{(\beta)})^2} \left[\frac{r_M}{\hat{p}^{(\beta)}} \sin(\hat{p}^{(\beta)} r_M) - \frac{4}{(\hat{p}^{(\beta)})^2} \sin^2\left(\frac{\hat{p}^{(\beta)} r_M}{2}\right) \right], \quad (40)$$

$\beta = 2, 4$; $\hat{p}^{(2)} = \hat{p}^{(1)}$ (формула 32) и $\hat{p}^{(4)} = \hat{p}^{(3)}$ (формула 33).

В таблицах 4а-в представлены собственные значения E_{nl}^{NR} нерелятивистской задачи (5), (9), собственные значения E_{nl}^R релятивистской задачи (5), (6) с потенциалом (2) и собственные значения E_{nl}^{RT} релятивистской задачи (5), (6) с запаздывающим взаимодействием (4). Вычисления во всех случаях велись с использованием представленной здесь модификации линейного потенциала (38). В таблицах даны также отношения $\Gamma_{nl}^R = E_{nl}^R / E_{0l}^R$ и $\Gamma_{nl}^{RT} = E_{nl}^{RT} / E_{0l}^{RT}$. Для сравнения представлены аналогичные результаты из работ [5] и [6]. Везде $\sigma = 1$.

Таблица 4а. $l = 0$

m	n	E_{n0}^{NR}	E_{n0}^R	Γ_{n0}^R	E_{n0}^{RT}	Γ_{n0}^{RT}	Γ_{n0}^R [5]	Γ_{n0}^R [6]	Γ_{n0}^{RT} [6]
5	0	1,367	1,350		0,409				
	1	2,391	2,338	1,73	0,868	2,12	1,71	1,67	1,90
	2	3,228	3,133	2,32	1,323	3,24	2,28	2,18	2,73
	3	3,969	3,828	2,84	1,780	4,35	2,76	2,62	3,52
10	0	1,085	1,080		0,874				
	1	1,897	1,880	1,74	1,544	1,77			
	2	2,562	2,531	2,34	2,102	2,41			
	3	3,150	3,103	2,87	2,603	2,98			
15	0	0,948	0,945		0,834				
	1	1,658	1,649	1,74	1,465	1,76	1,74	1,72	1,79
	2	2,239	2,224	2,35	1,987	2,38	2,34	2,30	2,47
	3	2,753	2,728	2,87	2,451	2,94	2,87	2,80	3,09

Таблица 4б. $l = 1$

m	n	E_{n1}^{NR}	E_{n1}^R	Γ_{n1}^R	E_{n1}^{RT}	Γ_{n1}^{RT}	Γ_{n1}^R [5]	Γ_{n1}^R [6]	Γ_{n1}^{RT} [6]
5	0	1,966	1,936		0,635				
	1	2,856	2,786	1,44	1,092	1,72	1,42	1,39	1,56
	2	3,630	3,515	1,82	1,549	2,44	1,82	1,71	2,09
	3	4,331	4,168	2,15	2,008	3,16	2,14	2,00	2,60
10	0	1,560	1,550		1,264				
	1	2,267	2,244	1,45	1,853	1,47			
	2	2,881	2,842	1,83	2,373	1,88			
	3	3,437	3,382	2,18	2,851	2,26			
15	0	1,363	1,358		1,202				
	1	1,980	1,968	1,45	1,755	1,46	1,44	1,43	1,49
	2	2,516	2,496	1,84	2,240	1,86	1,83	1,80	1,92
	3	3,003	2,974	2,19	2,682	2,23	2,17	2,13	2,33

Таблица 4в. $l = 2$

m	n	E_{n2}^{NR}	E_{n2}^R	Γ_{n2}^R	E_{n2}^{RT}	Γ_{n2}^{RT}	Γ_{n2}^R [5]	Γ_{n2}^R [6]	Γ_{n2}^{RT} [6]
5	0	2,484	2,441		0,857				
	1	3,292	3,205	1,31	1,314	1,53	1,30	1,27	1,41
	2	4,017	3,883	1,59	1,797	2,10	1,56	1,51	1,80
	3	4,684	4,500	1,84	2,234	2,61	1,80	1,72	2,19
10	0	1,972	1,958		1,605				
	1	2,613	2,584	1,32	2,145	1,34			
	2	3,188	3,144	1,61	2,637	1,64			
	3	3,718	3,656	1,87	3,097	1,93			
15	0	1,723	1,715		1,523				
	1	2,283	2,268	1,31	2,025	1,33	1,32	1,31	1,45
	2	2,786	2,763	1,61	2,484	1,63	1,60	1,58	1,89
	3	3,250	3,218	1,88	2,908	1,91	1,86	1,82	2,33

Динамика изменения собственных значений E_{n0}^{NR} , E_{n0}^R и E_{n0}^{RT} в зависимости от массы m представлена на рис.1. С ростом m значения E_{n0}^{RT} и E_{n0}^R сближаются с нерелятивистским собственным значением E_{n0}^{NR} . При малых m значение E_{n0}^{RT} , в отличие от E_{n0}^{NR} и E_{n0}^R , уменьшается. При этом с ростом n различия между ре-

лятивистским и нерелятивистскими собственными значениями при малых массах увеличиваются, т.е. наблюдается усиление релятивистских эффектов.

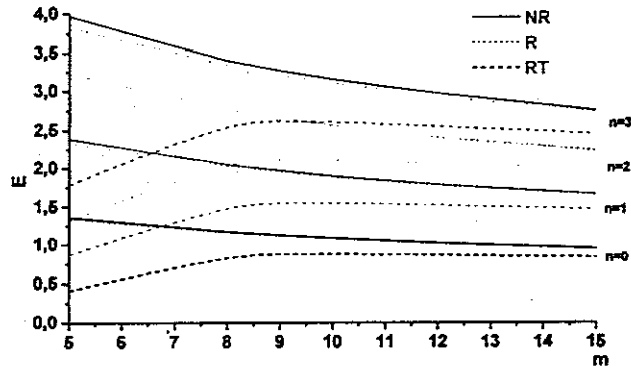


Рис.1

На рис.2 представлены собственные функции ϕ_{00}^{NR} , ϕ_{00}^R и ϕ_{00}^{RT} при разных значениях m . Отметим качественное различие в поведении этих функций. Функции ϕ_{00}^{NR} и ϕ_{00}^R с уменьшением m становятся более "компактными" (рис.2(а,б)), что согласуется с общеизвестными представлениями квантовой механики. Включение "запаздывания" в потенциал приводит к обратному эффекту – функция ϕ_{00}^{RT} с уменьшением m затухает медленнее (рис.2(в,г)). Это должно приводить к уменьшению энергии E_{00}^{RT} , что и подтверждается расчетами (см. табл.4 и рис.1).

Аналогичные эффекты наблюдаются для $n = 1$ (рис.3) и $n = 2$ (рис.4).

На рис.5 представлены функции ϕ_{nl}^{NR} , ϕ_{nl}^R и ϕ_{nl}^{RT} в зависимости от l при $n = 0$ и фиксированных m . Качественное поведение этих функций здесь одинаково.

Рассмотрим другой подход к решению релятивистского уравнения (5), (6) с запаздывающим взаимодействием. При $l = 0$ потенциалы $V_0^{(2)}$ и $V_0^{(4)}$ связаны соотношением

$$V_0^{(4)} = V_0^{(2)} \bar{V}_0^{(4)}, \quad (41)$$

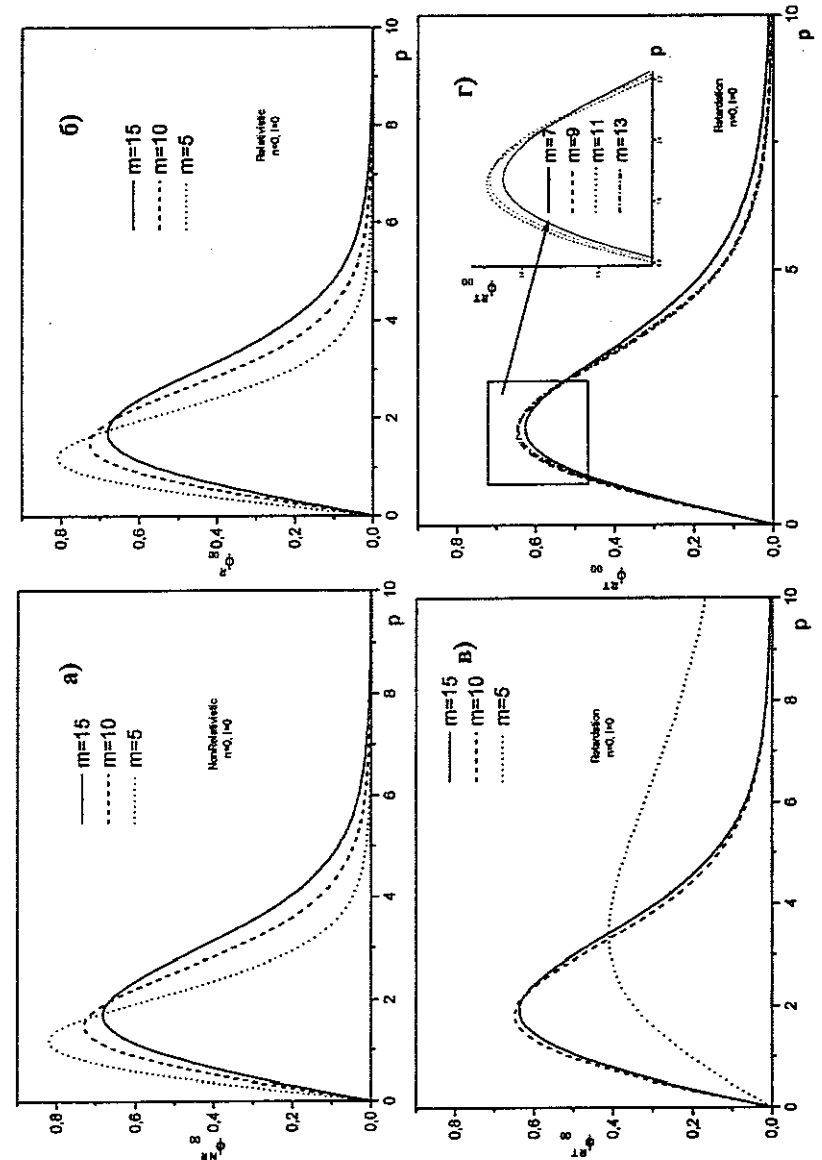


Рис. 2 а-г

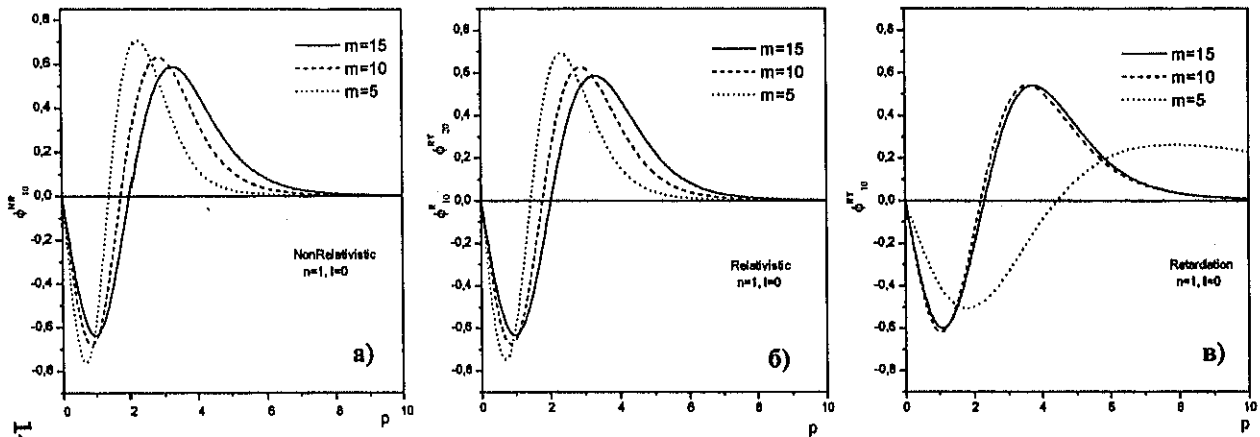


Рис. 3 а-в

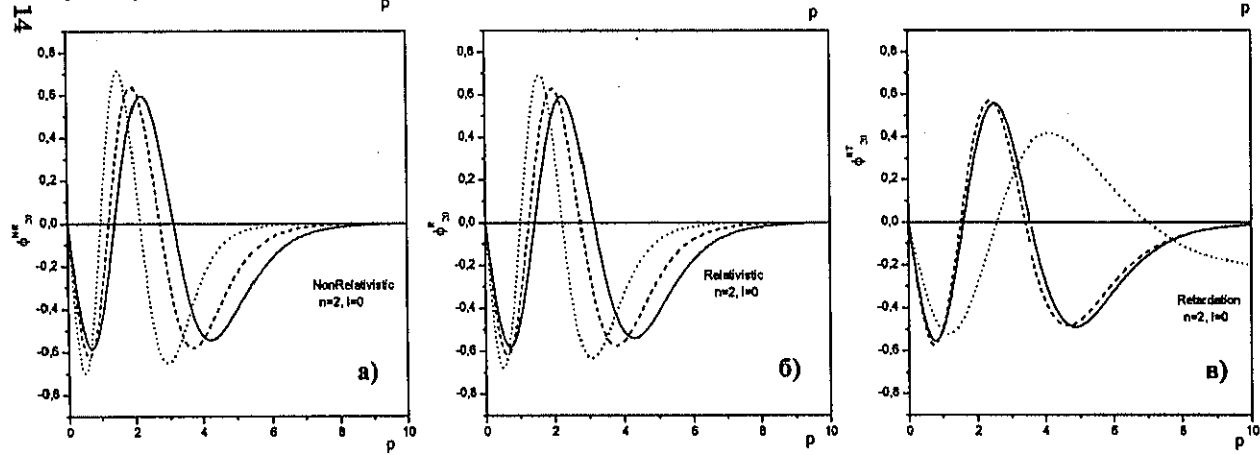


Рис. 4 а-в

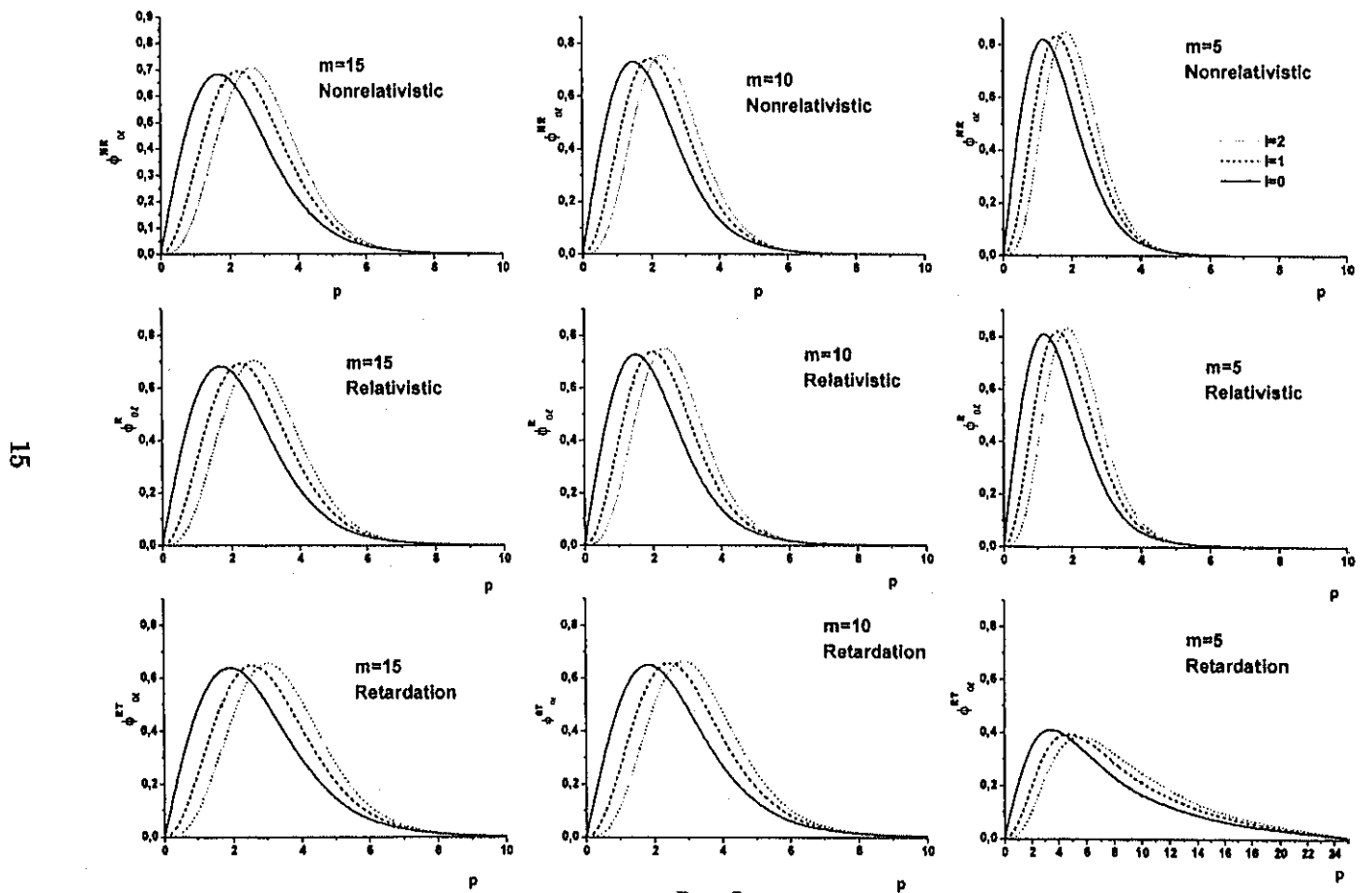


Рис. 5

где

$$\bar{V}_0^{(4)} = \frac{(E_p + E_q)^2}{4m^2}. \quad (42)$$

Используя формулу (40) для представления $V_0^{(2)}$ в (41), мы получаем новую модификацию потенциала (4). Результаты численного решения уравнения (5), (6) с потенциалом (41) представлены в таблице 5.

Таблица 5. $l = 0, m = 15$

n	E_{n0}^{RT}	Γ_{n0}^{RT}
0	0,655	
1	1,146	1,75
2	1,540	2,35
3	1,884	2,88

Из таблицы видно, что хотя собственные значения E_{n0}^{RT} отличаются от результатов таблицы 4а, отношения Γ_{n0}^{RT} изменились мало. Отметим также, что в обеих таблицах значения Γ_{n0} близки к результатам работ [5] и [6].

Все представленные в этом разделе результаты получены при значениях параметров $P_M = 25, r_M = 10$. Для сравнения в табл.6 даны численные результаты решения нерелятивистской задачи (5), (9) для значения массы $m = 1$, полученные при тех же значениях параметров, и значения, представленные в [12]. Отметим, что поскольку с уменьшением m функция ϕ_{nl}^{RT} затухает медленно, при расчетах с малыми m необходимо увеличивать интервал интегрирования.

Таблица 6. $l = 0, m = 1$

n	E_{n0}^{NR}	$E_{n0}[12]$
0	2,33809	2,338
1	4,08787	4,088
2	5,52039	5,521
3	6,78646	6,787

Еще одна возможность решения уравнений в импульсном пространстве с линейным потенциалом состоит в следующем. Пользуясь тождеством

$$\frac{1}{|\bar{p} - \bar{q}|^4} = \frac{1}{6} \Delta_p \frac{1}{|\bar{p} - \bar{q}|^2}, \quad (43)$$

можно выразить линейный потенциал через кулоновский, для представления которого, в случае $l = 0$, используется формула (12). Такой прием применялся в работе [8] при численном исследовании КХД-инспирированной модели кваркония.

4. О некоторых особенностях спектра релятивистского уравнения (5), (6) с потенциалами (1)-(4)

С физической точки зрения представляет интерес сравнительный анализ собственных функций $\phi_{nl}^{(\beta)}$ и собственных значений $E_{nl}^{(\beta)}$ для потенциалов (1), (2) и (3), (4), т.е. выяснение влияния релятивистских эффектов и эффектов запаздывания, а также изучение зависимости решений от физических и математических параметров.

Поскольку динамика спектра уравнения (5), (6) существенно зависит от типа потенциала, мы будем анализировать каждый потенциал отдельно.

Отметим, что все приводимые рассуждения сделаны в предположении, что решение исходной задачи существует.

Кулоновский потенциал.

Замечательным свойством уравнения (5) с потенциалами (1) и (3) является тот факт, что после масштабного преобразования

$$\hat{p} = \frac{p}{m}, \quad \hat{E}_{nl} = \frac{E_{nl}}{m} \quad (44)$$

уравнение (5) в новых переменных явно не содержит параметр m . Благодаря этому свойству собственные значения для двух значений массы m_1 и m_2 связаны соотношением

$$\frac{E_{nl}(m_1)}{E_{nl}(m_2)} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (45)$$

Таким образом, достаточно решить данное уравнение только для одного значения параметра m . Собственные значения для других значений m определяются из соотношения (45).

Отметим, что указанное свойство справедливо как для релятивистской задачи (6), так и для нерелятивистского случая (9).

При приближенном решении задачи (5) все параметры аппроксимации необходимо подбирать так, чтобы свойство (45) не нарушалось.

Предполагая существование $\{E_{nl}^R, \phi_{nl}^R(x)\}$ и $\{E_{nl}^{RT}, \phi_{nl}^{RT}(x)\}$, не трудно получить связь между этими решениями и решением нерелятивистской задачи. Ограничимся рассмотрением случая $l = 0$. Для того, чтобы оперировать с положительными величинами, введем обозначения: $\tilde{E}_{n0}^{NR} = -E_{n0}^{NR} > 0$, $\tilde{E}_{n0}^R = -E_{n0}^R > 0$, $\tilde{E}_{n0}^{RT} = -E_{n0}^{RT} > 0$. Тогда

$$\tilde{E}_{n0}^R = \tilde{E}_{n0}^{NR} + \Delta E_{1n}^R, \quad (46)$$

где

$$\Delta E_{1n}^R = \frac{\int dp Q_{12}(p) \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^R(p)}{\int dp \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^R(p)}, \quad (47)$$

$$Q_{12}(p) = \frac{p^4}{m(E_p + m)^2}. \quad (48)$$

Очевидно, что $\Delta E_{1n}^R > 0$ при $n = 0$. Это означает, что собственные значения релятивистского уравнения лежат ниже, чем нерелятивистские собственные значения, что подтверждается численно для модифицированных потенциалов, аппроксимирующих кулоновский.

Аналогично

$$\tilde{E}_{n0}^{RT} = \tilde{E}_{n0}^{NR} + \Delta E_{1n}^{RT} + \Delta E_{2n}^{RT}, \quad (49)$$

где

$$\Delta E_{1n}^{RT} = \frac{\int dp Q_{12}(p) \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}{\int dp \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}, \quad (50)$$

$$\Delta E_{2n}^{RT} = \frac{\int \int dq dp V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^{RT}(q)}{\int dp \phi_{n0}^{NR}(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}. \quad (51)$$

Величины ΔE_{1n}^{RT} и ΔE_{2n}^{RT} положительны при $n = 0$. Поэтому $\tilde{E}_{n0}^{RT} > \tilde{E}_{n0}^{NR}$.

С другой стороны, можно оценить, как изменится спектр релятивистского уравнения при включении запаздывающего взаимодействия. Действительно,

$$\tilde{E}_{n0}^{RT} = \tilde{E}_{n0}^R + \Delta E_{1n}^{RTR}, \quad (52)$$

где

$$\Delta E_{1n}^{RTR} = \frac{\int \int dq dp V_0^{(3)}(p, q) \phi_{n0}^R(p) \phi_{n0}^{RT}(q)}{\int dp \phi_{n0}^R(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}. \quad (53)$$

Так как $\Delta E_{1n}^{RTR} > 0$ при $n = 0$, $\tilde{E}_{n0}^{RT} > \tilde{E}_{n0}^R$.

Приведенные для потенциала (3) оценки остаются чисто теоретическими, поскольку нам не удалось найти модифицированный потенциал, удовлетворительно аппроксимирующий (3). Однако они могут оказаться полезными в дальнейшем исследовании.

Линейно растущий потенциал.

Для этого потенциала масштабным преобразованием не удастся исключить параметр m из уравнения, поэтому вместо соотношения (45) получается более сложное выражение, позволяющее оценить сдвиг спектра в зависимости от параметра m . Для нерелятивистского и релятивистского уравнений без запаздывания такие оценки сделаны в [5]. В частности, для потенциала (2) мы имеем [5]

$$E_{nl}^R(m_2) = E_{nl}^R(m_1) - 2(m_2 - m_1) \Delta E_{nl}^R, \quad (54)$$

где

$$\Delta E_{nl}^R = \frac{\int dp Q_2(p) \phi_{nl}^R(p, m_1) \phi_{nl}^R(p, m_2)}{\int dp \phi_{nl}^R(p, m_1) \phi_{nl}^R(p, m_2)}, \quad (55)$$

$$Q_2(p) = 1 - \frac{m_1 + m_2}{\sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2}} \geq 0. \quad (56)$$

Равенство, аналогичное (54), для потенциала (4) в случае $l = 0$ имеет вид

$$E_{n0}^{RT}(m_2) = E_{n0}^{RT}(m_1) - 2(m_2 - m_1)(\Delta E_{n0}^1 - \Delta E_{n0}^2), \quad (57)$$

где

$$\Delta E_{n0}^1 = \frac{\int dp Q_2(p) \phi_{n0}^{RT}(p, m_1) \phi_{n0}^{RT}(p, m_2)}{\int dp \phi_{n0}^{RT}(p, m_1) \phi_{n0}^{RT}(p, m_2)}, \quad (58)$$

$$\Delta E_{n0}^2 = \frac{\int \int dp dq V_0^{(2)}(p, q) \Delta V_0^{(4)}(p, q) \phi_{n0}^{RT}(p, m_1) \phi_{n0}^{RT}(p, m_2)}{\int dp \phi_{n0}^{RT}(p, m_1) \phi_{n0}^{RT}(p, m_2)}, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \Delta V_0^{(4)} &= \frac{(m_1 + m_2)}{8m_1^2 m_2^2} [(p^2 + q^2) + \\ &+ 2 \frac{(m_1 + m_2)p^2 q^2 + m_1^2(p^2 + q^2)}{m_1^2 \sqrt{p^2 + m_2^2} \sqrt{q^2 + m_2^2} + m_2^2 \sqrt{p^2 + m_1^2} \sqrt{q^2 + m_1^2}}]. \end{aligned} \quad (60)$$

При $n = 0$ обе поправки ΔE_{00}^1 и ΔE_{00}^2 положительны, что объясняет поведение E_{00}^{RT} при малых массах m (см. табл.4а-в и рис.1).

Связь собственных значений релятивистского и нерелятивистского уравнений для потенциала (2) определяется равенством

$$E_{n0}^R = E_{n0}^{NR} + \Delta E_{1n}^R, \quad (61)$$

где ΔE_{1n}^R вычисляется по формулам (47) и (48). Очевидно, что при $n = 0$ $\Delta E_{00}^R > 0$, т.е. $E_{00}^R < E_{00}^{NR}$.

Оценка, аналогичная (52), в случае потенциалов (2), (4) имеет вид

$$E_{n0}^{RT} = E_{n0}^R - \Delta E_{1n}^{RT}, \quad (62)$$

где

$$\Delta E_{1n}^{RT} = \frac{\int \int dq dp V_0^{(2)}(p, q) [\bar{V}_0^{(4)}(p, q) - 1] \phi_{n0}^R(p) \phi_{n0}^{RT}(q)}{\int dp \phi_{n0}^R(p) \phi_{n0}^{RT}(p)}, \quad (63)$$

$$\bar{V}_0^{(4)} = \frac{(E_p + E_q)^2}{2m^2} \geq 1,$$

откуда следует, что $\Delta E_{1n}^{RT} > 0$ и $E_{n0}^{RT} < E_{n0}^R$.

Приведенные соотношения являются полезными для контроля численных результатов и позволяют предсказывать, как изменятся собственные значения в зависимости от типа потенциала, что подтверждается представленными выше численными результатами.

5. Заключение

В работе рассматриваются некоторые проблемы численного исследования задач на собственные значения в импульсном представлении с кулоновским и линейным потенциалами. Сделан анализ динамики спектра в зависимости от параметров на примере одного релятивистского уравнения. Получены численные результаты, демонстрирующие влияние релятивистских эффектов и эффектов запаздывания взаимодействия на изменение спектра. В частности, установлено, что для запаздывающего взаимодействия поведение спектра резко отличается от релятивистского и нерелятивистского случаев.

Авторы искренне признательны проф. Е.П. Жидкову за внимание к работе и полезные замечания, а также А.И. Мачавариани, который обратил наше внимание на затронутые здесь проблемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 97-01-01040).

Список литературы

- [1] S.L.Adler and A.C.Davis, Nucl.Phys. **B244**, 469 (1984); A.Koćic, Phys. Rev. **D33**, 1785 (1986); R.Alkofer and P.A.Amundsen, Nucl. Phys. **B306**, 305 (1988); D.W.McKay, H.J.Munczek and Bing-Lin Young, Phys.Rev. **D37**, 195 (1988); A.Trzuppek, Acta Physica Polonica **B20**, N2, 93 (1989); И.В.Амирханов, Е.В.Земляная, В.Н.Первушин, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина, Н.А.Сариков, Т.А.Стриж, Математическое моделирование 6, N7, 55 (1994).

- [2] A. Le Yaouanc, L. Oliver, P. Pene and J.C. Raynal, Phys. Rev. **D29**, 1233 (1984); Phys. Rev. **D31**, 137 (1985); Ю.Л.Калиновский, В.Каллис, Б.Н.Куранов, В.Н.Первушин, Н.А.Сариков, ЯФ **49**, 1709 (1989); Yu.L.Kalinovsky, W.Kallies, L.Kaschluhn, L.Münchow, V.N.Pervushin and N.A.Sarikov, Fortschr. Phys. **38**, 333 (1990); Few Body Systems **10**, 87 (1991).
- [3] R. Blankenbecler and R. Sugar, Phys. Rev. **142**, 1051 (1966); V. G. Kadyshevsky, Nucl. Phys. **B6**, 125 (1968); J.W.Norbury, D.E.Kahana and K.N.Maung, Can J.Phys. **70**, 866 (1992).
- [4] А.А.Быков, И.М.Дремин, А.В.Леонидов, УФН Т.143, 3 (1984); Chikade Habe (Yoshida) et al., Prog.Th.Phys. **77**, 917 (1987).
- [5] И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж, Математическое моделирование **9**, N10, 111 (1997).
- [6] К.Н.Maung, D.E.Kahana and J.W.Norbury, Phys.Rev. **D47**, N3, 1183 (1993).
- [7] I.V.Puzynin, I.V.Amirkhanov, T.P.Puzynina, E.V.Zemlyanaya, JINR Rapid Comm. 5[62]-93, 63 (1993).
- [8] И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж, Математическое моделирование **7**, N7, 34 (1995).
- [9] R.H.Thompson, Phys.Rev. **D1**, 110 (1970).
- [10] F.Gross, Phys.Rev. **186**, 1448 (1969); F.Gross and J.Milane, Phys.Rev. **D43**, 2401 (1991); Phys.Rev. **D45**, 969 (1992).
- [11] Т.Жанлав, И.В.Пузынин, ЖВМиМФ **32**, N16, 846 (1992).
- [12] Г.Бете, Е.Е.Солпитер. Квантовая механика одного и двух электронов. Физматгиз, М, 1960; А.С.Давыдов. Квантовая механика. Наука, М, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 мая 1999 года.