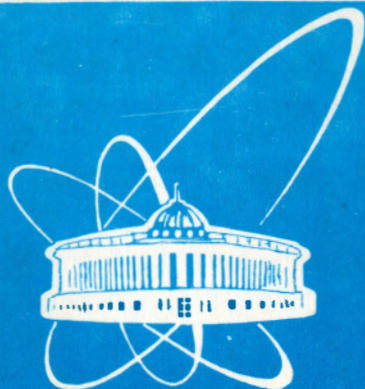


99-155



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

99-155

P11-99-155

Т.П.Топурия, М.Д.Шафранов

ДИЭЛЕКТРИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ.
РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ
ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в «Журнал вычислительной математики
и математической физики»

1999

Диэлектрик в электростатическом поле

Рассмотрим, чем поведение диэлектрика отличается от поведения проводника в электрическом поле, создаваемом сторонними зарядами. Возьмем два шара - одинаковых по размеру. Пусть один из шаров является проводником, второй - изолятором (диэлектриком). Если эти шары находятся в электрическом поле, создаваемом системой заряженных проводников и диэлектриков, то в соответствии с законами электростатики поверхность металлического шара остается эквипотенциальной, несмотря на то, что поверхностная плотность зарядов не является постоянной: $-\sigma = \sigma(x,y,z)$. Электрическое поле внутри шара - $E=0$, на поверхности шара - $E = \sigma(x,y,z)/\epsilon_0$. Это положение справедливо для проводников любой формы в электрическом поле. В качестве граничного условия на поверхности шара задается потенциал.

Граничные условия на поверхности диэлектрика определяются законами электростатики для диэлектриков. В соответствии с основными положениями электростатики для однородных диэлектриков граничные условия на поверхности раздела между средами в электростатических полях определяются из двух уравнений [1]. Первое из них

$$\operatorname{rot} E=0, \quad (1)$$

в котором вектор E - электрическое поле как внутри, так и вне диэлектрика. Второе уравнение определяет свойства вспомогательного вектора D :

$$\operatorname{div} D=0. \quad (2)$$

Поле E является суперпозицией поля сторонних зарядов E_0 и поля связанных зарядов E° : $E = E_0 + E^\circ$. При наличии внешнего электрического поля вещество само становится источником электрического поля, в результате чего внешнее поле изменяется.

В уравнении (2) $D = \epsilon_0 E + P$, где P - вектор поляризации, или электрический дипольный момент единицы объема диэлектрика, ϵ_0 - диэлектрическая постоянная. Следствием уравнения (1) является непрерывность

тангенциальных составляющих электрического поля на поверхности раздела двух диэлектриков:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (3)$$

Следствием уравнения (2) является непрерывность нормальной составляющей вектора D к поверхности раздела:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (4)$$

Для однородных диэлектриков зависимость D от E описывается соотношением: $D = \epsilon_0 E + P = \epsilon \epsilon_0 E$, где ϵ - диэлектрическая проницаемость среды. В таком случае граничные условия (3) и (4) можно представить в виде соотношений для тангенциальной и нормальной составляющих полей двух диэлектриков:

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}. \quad (5)$$

В свою очередь граничные условия (5) можно представить и в виде граничных условий для потенциала

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_1 \partial \varphi_1 / \partial n = \epsilon_2 \partial \varphi_2 / \partial n. \quad (5')$$

Метод решения краевых задач электростатики основан на принципе суперпозиции и теореме единственности электростатики. Эта теорема утверждает: если каким-либо способом краевая задача электростатики решена, то полученное решение является единственным и верным [2].

В наших работах [3-6] предложены и обоснованы алгебраические методы численного решения краевых задач электростатики произвольных систем проводников (электродов), удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$. В алгебраических методах граничные условия удовлетворяются с помощью вспомогательных дискретных точечных или линейных зарядов, размещаемых в объеме проводников вблизи их поверхности. Потенциалы, величины электрических полей в процессе решения задачи вычисляются в контрольных точках, находящихся на кратчайшем расстоянии от соответствующих зарядов.

Основанием для применения вспомогательных дискретных зарядов служит тот факт, что вблизи поверхности проводника, где расположены вспомогательные заряды, эквипотенциальная поверхность хорошо повторяет

форму поверхности с зарядами. При этом в непосредственной близости от поверхности с зарядами эквипотенциальной поверхностью является волнообразная поверхность, несущая на себе особенности, связанные с дискретностью размещения зарядов. На некотором расстоянии от поверхности с зарядами эквипотенциальная поверхность становится свободной от этих особенностей. Оптимальным является случай, когда расстояние между поверхностью с зарядами и поверхностью проводника d и расстояние между соседними зарядами a удовлетворяют неравенству $1,4a < d$ [3].

Физическая модель

Посмотрим, каким образом с помощью вспомогательных зарядов решается задача *диэлектрик в электростатическом поле*. В качестве объекта исследований возьмем диэлектрическую пластинку, которая расположена в зазоре, образованном двумя плоскими электродами. Разместим вспомогательные линейные заряды внутри электродов, а также внутри или вне диэлектрика. Совокупность всех этих зарядов должна обеспечить выполнение граничных условий – задаваемым потенциалам на поверхностях электродов, - а также выполнение граничных условий (5 или 5') на поверхности диэлектриков.

Предположим, что в среде, в которой находится пластинка, диэлектрическая постоянная $\epsilon=1$. Посмотрим, к чему приведет расположение зарядов внутри самой пластинки и вне ее. На рис. 1а показана пластинка диэлектрика прямоугольного сечения в электрическом поле. В ее центре стрелкой обозначено направление вектора электрического поля E .

В соответствии с направлением вектора электрического поля E на поверхности диэлектрической пластинки, ближайшей к верхнему электроду с положительным потенциалом, возникнут отрицательные заряды. На стороне пластинки, ближайшей к нижнему электроду, - положительные заряды. Эти связанные заряды диэлектрика вместе со сторонними зарядами электродов создают электрическое поле E . Слева на этой части рисунка показан случай,

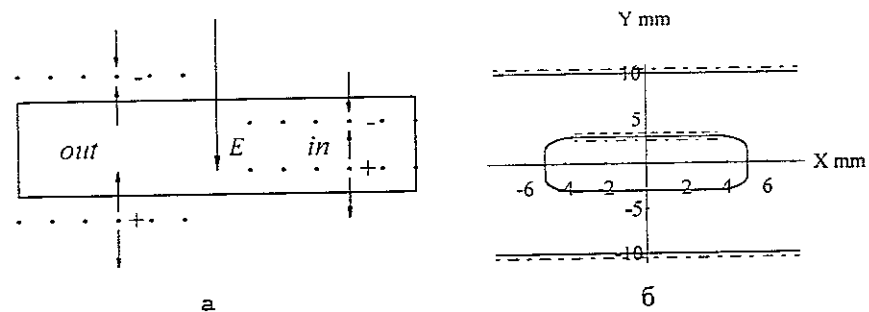


Рис. 1 (а) Пластинка диэлектрика в электрическом поле E , знаками \pm обозначены знаки вспомогательных зарядов вне (out) и внутри (in) диэлектрика. Направления электрических полей обозначены стрелками.

(б) Схема расположения диэлектрика между электродами. Вспомогательные заряды электродов обозначены штрихпунктиром. Вспомогательные заряды диэлектрика - штрихами и штрихпунктиром

когда вспомогательные заряды размещаются вне пластинки. Знаки зарядов соответствуют знакам зарядов, связанных на поверхности диэлектрика. Стрелками показаны направления электрических полей, создаваемых вспомогательными зарядами. Из рисунка следует, что электрическое поле внутри диэлектрика при таких знаках вспомогательных зарядов будет меньше внешнего поля. Их отношение определяется уравнениями (5). В нашем конкретном случае его можно определить из соотношения $E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$, где $n1$ и $n2$ - внешние нормали к границе раздела диэлектриков. Нормаль $n1$ направлена от диэлектрика в среду, а нормаль $n2$ - внутрь его. Размещенные таким образом вспомогательные заряды совместно с зарядами электродов должны обеспечить выполнение граничных условий на поверхности диэлектрика и решение основной задачи электростатики – определения электрических полей и потенциалов в любой точке диэлектрика и в окружающем диэлектрик пространстве.

При размещении вспомогательных зарядов внутри диэлектрика (правая часть рис. 1а) знаки этих зарядов определяются так же, как и при внешнем

расположении зарядов. Внутреннее размещение зарядов обеспечивает выполнение граничных условий на границе раздела и решение основной задачи электростатики вне диэлектрика. Таким образом, одним из этапов решения является нахождение величин вспомогательных зарядов, размещаемых внутри и вне диэлектрика. Эти заряды в совокупности с зарядами проводников должны обеспечить выполнение граничных условий (5).

Используем в качестве вспомогательных зарядов линейные заряды. Возьмем электроды, диэлектрик и линейные заряды достаточно протяженными, это позволит провести численное моделирование на плоскости $Z=0$ (рис.16). В медианной плоскости ($Z=0$) потенциал и величина электрического поля, создаваемого линейным зарядом, определяются следующими соотношениями:

$$U = 2\sigma \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + r^2}}{r} \quad \text{и} \quad E = \frac{2\sigma L}{r \sqrt{L^2 + r^2}}.$$

Здесь $2L$ - длина линейного заряда, σ - линейная плотность заряда. В этих уравнениях системный коэффициент $1/4\pi\epsilon_0$ опущен, поскольку все вычисления выполняются в относительных единицах. В рассматриваемом примере длина пластинки, электродов и линейных зарядов равна 1000 мм. Величина межэлектродного зазора составляет 20 мм, толщина пластинки - 6 мм, ее ширина равна 10 мм. Прямые углы скруглены, радиусы закругления - 1,5 мм.

Схема размещения линейных зарядов показана на рис. 16. Расстояние между соседними линейными зарядами равно 50 мкм. Потенциал электродов U_0 составляет 1000 В. Величина диэлектрической проницаемости ϵ принята равной четырем ($\epsilon = 4$). Это значение примерно соответствует среднему значению величины ϵ для многих изоляторов, нашедших широкое применение в практике физического эксперимента и технике.

Постановка задачи

В [7] задача решалась с помощью итерационного метода простого в программировании, но требующего длительного численного расчета.

Альтернативным является численный метод решения с помощью линейных алгебраических уравнений [6]. При применении метода алгебраических уравнений для решения рассмотренной выше задачи необходимо составить систему из n линейных уравнений, где число линейных уравнений равно сумме - числу вспомогательных зарядов электродов i и зарядов диэлектрика $2m$. Решение этой системы позволит найти величины всех зарядов, обеспечивающих выполнение граничных условий.

Поведение нормальных компонентов электрического поля на границе раздела двух сред $E_{n1} = \epsilon E_{n2}$ описывают уравнения (6).

$$\sum_{i,j} E_{n_{i,j}} + \sum_{k,j} E_{n_{k,j}} - \epsilon (\sum_{i,j} E_{n_{i,j}} + \sum_{m,j} E_{n_{m,j}}) = 0. \quad (6)$$

Первый и второй члены определяют нормальные составляющие электрических полей на границе раздела с внешней стороны диэлектрика. Нормальные составляющие создаются вспомогательными зарядами электродов и зарядами диэлектрика при их внутреннем размещении. Третий член обязан вспомогательным зарядам электрода и внешним зарядам диэлектрика. Этот член определяет нормальные компоненты поля на границе раздела с внутренней стороны диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость ϵ входит в эту систему уравнений непосредственно.

Вторая система уравнений связана с граничными условиями на поверхности диэлектрика для потенциала: отсутствие разрыва потенциала при переходе через границу раздела.

$$\sum_{i,j} U_{i,j} + \sum_{k,j} U_{k,j} - (\sum_{i,j} U_{i,j} + \sum_{m,j} U_{m,j}) = 0. \quad (7)$$

Сложнее дело обстоит с уравнениями для определения вспомогательных зарядов электродов. При внутреннем размещении зарядов диэлектрика система уравнений для определения зарядов электродов выглядит как

$$\sum_{i,j} U_{i,j} + \sum_{m,j} U_{m,j} = U_0. \quad (8)$$

Первый член в (8) представляет собой сумму потенциалов, создаваемых

вспомогательными зарядами электродов. Второй член – сумма потенциалов при внутреннем размещении зарядов диэлектрика.

При внешнем размещении зарядов диэлектрика должна использоваться система

$$\sum_{i,j} U_{i,j} + \sum_{k,j} U_{k,j} = U_0. \quad (9)$$

Существует различие расстояний между вспомогательными зарядами диэлектрика и поверхностью электрода при внутреннем и внешнем размещении вспомогательных зарядов диэлектрика. Значение потенциала электродов U_0 задано. При равенстве между собой первых членов уравнений (8) и (9), определяющих потенциал вспомогательными зарядами электродов, $\sum_{k,j} U_{k,j} \neq \sum_{m,j} U_{m,j}$. Выполнение условий для размещения вспомогательных зарядов $2d < R_{\min}$ (величина R_{\min} – минимальное расстояние между диэлектриком и электродами) при вычислениях в линейном приближении использовать полусумму потенциалов при внешнем и внутреннем размещении зарядов диэлектрика.

Это положение иллюстрируется рис. 2 из [7]. На нем показано

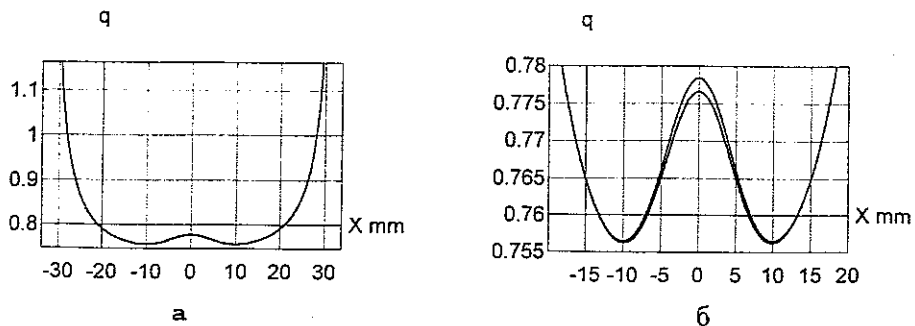


Рис. 2 (а) Распределение вспомогательных зарядов электрода вдоль его поверхности при внутреннем и внешнем расположении вспомогательных зарядов диэлектрика. Разница в значении величин зарядов проявляется только в виде небольшого утолщения кривой в области $X=0$.

(б) Те же распределения в измененном масштабе, наибольшее различие не превышает 0,002

распределение зарядов электродов при внешнем и внутреннем размещении вспомогательных зарядов диэлектрика. Максимальная относительная разница в этих случаях не превышает величины 0,002.

Таким образом, система уравнений (10) определит потенциал в j -й контрольной точке электрода:

$$\sum_{i,j} U_{i,j} + \frac{1}{2} \sum_{k,j} U_{k,j} + \frac{1}{2} \sum_{m,j} U_{m,j} = U_0. \quad (10)$$

Первый член уравнений определяет потенциал, создаваемый вспомогательными зарядами самого электрода. Два следующих члена определяют потенциал от вспомогательных зарядов диэлектрика при внутреннем и внешнем их размещении. Таким образом, уравнения (6, 7 и 10) образуют систему из независимых $n = i+2m$ уравнений для нахождения величин $n = i+2m$ вспомогательных зарядов электродов и диэлектрика. Поставленная задача полностью разрешима.

Казалось бы, что решаемая задача далека от практики. На самом деле она имеет самое непосредственное отношение к количественному решению задач, например, связанных с краевыми эффектами в многопроводных пропорциональных камерах (МППК). МППК широко используются в качестве координатных детекторов при исследованиях по физике высоких энергий. Ранее объяснение некоторых краевых эффектов носило в основном качественный характер [8].

Результаты решения задачи

В соответствии с соотношением (5) и принятым значением диэлектрической проницаемости $\epsilon = 4$ отношение нормальных составляющих электрического поля на поверхности диэлектрика должно быть равно четырем. Это условие при решении систем уравнений было заложено в систему (6). На рис. 3а показано распределение нормальных составляющих электрического поля вдоль поверхности диэлектрика. Верхняя кривая соответствует составляющей поля с внешней стороны диэлектрика. Нижняя кривая представляет распределение нормальной составляющей внутри диэлектрика.

На рис. 3б показано отношение тангенциальных составляющих поля. В соответствии с (5) отношение должно быть строго равно 1. Небольшое отклонение в районе 70-й контрольной точки соответствует месту перехода от прямолинейного участка поверхности к закруглению. Это отклонение является следствием того, что отношение рассчитывалось не для оптимального случая, когда расстояние между поверхностью с зарядами и поверхностью проводника d и расстояние между соседними зарядами a удовлетворяют неравенству $1,4a < d$ [2]. Расчет был выполнен для случая $a = d$.

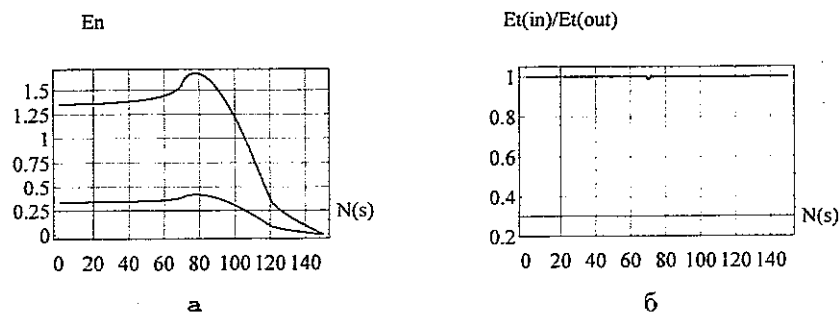


Рис. 3 (а) Распределение компонентов электрического поля вдоль поверхности диэлектрика. Нормальная составляющая поля с внешней стороны пластины (верхняя кривая) и с внутренней стороны (нижняя кривая).

(б) Отношение тангенциальных компонентов электрического поля с внешней и внутренней сторон пластины

В результате решения задачи найдены величины трех наборов вспомогательных зарядов, создающие поверхностные плотности зарядов, удовлетворяющих граничным условиям. Поэтому имеется возможность посмотреть то или иное распределение для отдельного набора зарядов или их совокупности. На рис. 4а показано распределение вдоль поверхности диэлектрика тангенциальной составляющей поля, образуемого только поверхностными поляризационными зарядами диэлектрика. Рис. 4б представляет распределение тангенциальной составляющей поля, образуемого совокупностью поляризационных зарядов диэлектрика и поверхностных зарядов электродов.

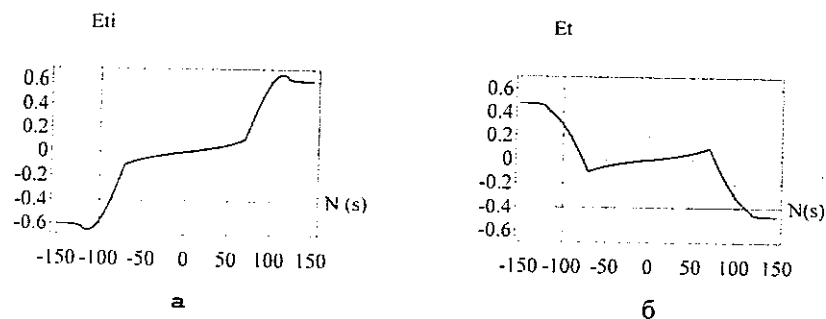


Рис. 4. Распределение тангенциальных составляющих электрического поля вдоль поверхности диэлектрика.

(а) Распределение составляющих поля, образуемого только поверхностными поляризационными зарядами.

(б) Распределение составляющих поля, создаваемого всей совокупностью зарядов электродов и диэлектрика

На рис. 5 показана часть карты силовых линий электрического поля и эквипотенциалей. Силовые линии и эквипотенциали на поверхности диэлектрика испытывают излом. Касательная к поверхности диэлектрика и эквипотенциаль вследствие излома образуют углы, внешний (эквипотенциаль

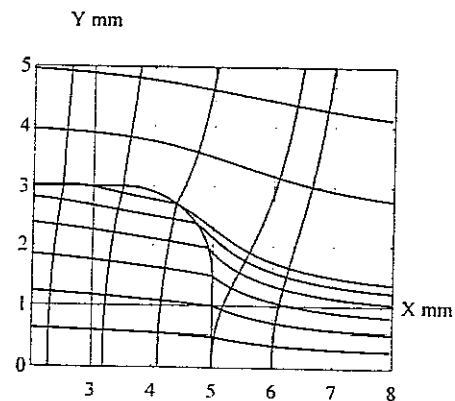


Рис. 5. Линии электрического поля и эквипотенциали в районе боковой части диэлектрика. В соответствии с теорией линии поля и потенциалы испытывают на границе диэлектрика излом

вне диэлектрика) и внутренний. Вычисления показали, что отношение тангенсов этих углов равны строго четырем, т.е. равны диэлектрической проницаемости. В соответствии с теорией закон преломления силовых линий выражается как отношение тангенсов углов между нормалью к поверхности и силовой линией вне или внутри диэлектрика. Это отношение равно диэлектрической проницаемости. Эквипотенциали в точках пересечения с силовыми линиями образуют прямой угол. Поэтому нет ничего удивительного в таком отношении тангенсов, характеризующем излом эквипотенциалей. Это является еще одним свидетельством правильности решения поставленной задачи.

Силовые линии поля испытывают на границе с поверхностью диэлектрика скачек, выражаемый соотношением $E_{n1} = \epsilon E_{n2}$. На рис. 6

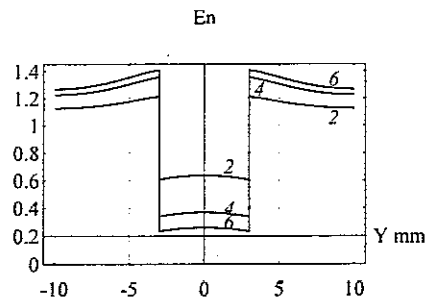


Рис. 6. Скачок нормальной составляющей электрического поля на границе диэлектрика со средой, диэлектрическая проницаемость которой равна 1. Величины диэлектрической проницаемости диэлектрика равны 6, 4 и 2. Они указаны цифрами около соответствующих кривых

показано распределение нормальной составляющей поля вдоль оси ординат (см. рис. 1б). Цифрами около кривых показаны величины ϵ - диэлектрических проницаемостей - 2, 4, 6. Видно, что с ростом ϵ происходит насыщение поля. Вне диэлектрика поле стремится к некоторой постоянной, а внутри его предельное значение равно нулю. С увеличением ϵ происходит и насыщение поверхностной плотности зарядов пластин электродов (рис.7).

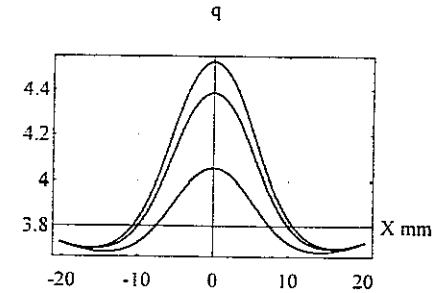


Рис. 7. Распределение поверхностной плотности зарядов вдоль части электрода вблизи пластинки диэлектрика. Величины диэлектрической проницаемости равны 6, 4 и 2 соответственно для верхней, средней и нижней кривых

Диэлектрик для больших значений ϵ по своему поведению в электрическом поле становится похож на проводник.

Решение задачи выполнено численным моделированием. Здесь уместно привести цитату из доклада академика А.А. Самарского на Международном симпозиуме, посвященном истории советского атомного проекта:

“ Ведущую роль в познании теперь играет математическое моделирование с технологией вычислительного эксперимента. Его ядром является триада модель - алгоритм - программа” [9].

В заключение авторы выражают свою признательность М.Г. Шафрановой за ценные замечания, сделанные в процессе подготовки рукописи.

Литература

- [1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Наука, Москва (1992) 57-70.
- [2] Панофский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Физ.-Мат. (1963) 52-53.

- [3] Шафранов М.Д. Метод решения основной задачи электростатики для многопроводочных пропорциональных камер. Сообщение ОИЯИ P13-96-355, Дубна (1996) 1-30.
- [4] Шафранов М.Д. Алгебраический вариационно-итерационный метод решения краевых задач электростатики произвольных систем, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Сообщение ОИЯИ P11-98-103, Дубна (1998) 1-42.
- [5] Shafranov M.D. Algebraic iterative method to solve boundary problems of arbitrary electrostatic systems satisfying the Laplace equation. JINR Preprint E11-98-255, Dubna (1998) 1-12.
- [6] Топурия Т.П., Шафранов М.Д. Метод линейных уравнений для решения краевых задач электростатики и примеры его применения в электронной оптике. Препринт ОИЯИ P11-98-262, Дубна (1998) 1-14.
- [7] Шафранов М.Д. Диэлектрик в электростатическом поле. Метод решения задач, постановка и обоснование. Сообщение ОИЯИ P11-99-148, Дубна (1999) 1-21.
- [8] Шафранов М.Д. Краевые эффекты в многопроводочных пропорциональных камерах. Краткие сообщения ОИЯИ 6[74]-95, Дубна (1995) 21-34
- [9] Самарский А.А. Прямой расчет мощности взрыва. История советского атомного проекта. Труды международного симпозиума ИСАП-96. Москва, ИЗДАТ, т.1, 222.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 мая 1999 года.