

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

99-148

P11-99-148

М.Д.Шафранов

ДИЭЛЕКТРИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ.
МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ,
ПОСТАНОВКА И ОБОСНОВАНИЕ

1999

Исполнен долг, завещанный от бога
Мне, грешному.

А.С. Пушкин. Борис Годунов

1. Введение

Решение задач электростатики для проводников состоит из двух этапов. Главный из них - это вычисление пространственных распределений потенциалов и электрических полей, создаваемых сторонними зарядами и индуцированными зарядами проводников. Этот этап является основной задачей электростатики. Ему предшествует решение так называемых краевых задач, цель которого - определение поверхностных плотностей сторонних и индуцированных зарядов. Эти заряды создают на поверхностях проводников задаваемые потенциалы, т.е. найденными распределениями зарядов удовлетворяются условия на границах проводников.

Решение краевых задач систем заряженных проводников сложно, хотя заданием величин их потенциалов полностью определяются граничные условия. Потребности практики привели к разработке методов решения задач для систем заряженных проводников в электронной оптике. Решение задач электронной оптики облегчается тем, что все оптические элементы являются проводниками. Это позволяет полностью задать граничные условия. С другой стороны, элементы электронной оптики, как правило, составляют осесимметричные системы, устройства с плоской симметрией. В этих случаях трехмерная задача сводится к задаче на плоскости. Для решения задач электронной оптики широко используются численные методы, такие как метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод интегральных уравнений [1]. В двух первых применяются методы сеток с прямоугольными и треугольными ячейками. В обоих случаях заданные потенциалы вычисляются при помощи сетки, наложенной на рассчитываемую область поля, и формул, связывающих потенциал текущей контрольной точки расчета с потенциалами соседних узлов сетки. В методе интегральных уравнений рассчитываются распределения поверхностной плотности зарядов на электродах. Для произвольных систем проводников, потенциалы которых удовлетворяют уравнению Лапласа, разработаны алгебраические методы решения задач [2-4].

Задача диэлектрик в электростатическом поле относится к числу

нерешенных задач классической электростатики. Сложность решения задач с диэлектриком в электрическом поле связана с тем, что для этой системы невозможно задать граничные условия полностью. Уравнения $E = -\text{grad } \varphi$, $D = \epsilon \epsilon_0 E$ и $\text{div} D = \rho$, $D_{2n} - D_{1n} = \sigma$, дополненные требованием непрерывности потенциала φ , представляют собой полную систему уравнений электростатического поля в произвольной среде [5]. Это означает, что если заданы значения объемной плотности свободных зарядов ρ , поверхностная плотность свободных зарядов σ на границах раздела, а также значение диэлектрической постоянной ϵ в каждой точке пространства и если при этом на бесконечности напряженность электрического поля $E \rightarrow 0$, то в этой системе однозначно определяются величины φ , E и D в каждой точке пространства. Физически стремление $E \rightarrow 0$ на бесконечности означает, что все заряды находятся в конечной области пространства. Совершенно понятно, что для решения практических задач указанные выше требования невыполнимы.

Из литературы известны только несколько случаев решения задачи *диэлектрик в электростатическом поле* в законченном виде. Одним из них является простой случай с плоскопараллельной пластинкой диэлектрика в поле плоского конденсатора, когда расстояние между его обкладками много меньше его размеров. В пренебрежении краевыми эффектами задача полностью решается. Другие два случая: бесконечно длинный цилиндр диэлектрика эллиптического сечения или диэлектрик в форме эллипсоида вращения находятся в однородном электрическом поле [6]. Условие однородности в этом случае означает, что источники поля находятся на таком большом расстоянии от поверхности диэлектрика, что его индуцированные заряды не влияют на потенциал и распределение сторонних зарядов источника.

Для понимания всей сложности решения рассмотрим задачу, например, с диэлектрическим шаром известной диэлектрической проницаемости в поле, создаваемом двумя плоскопараллельными электродами. На электроды подано напряжение. Чтобы решать в этом случае основную задачу электростатики, т.е. определять потенциал в любой точке поля, создаваемого этой системой, необходимо знать поверхностную плотность сторонних зарядов в каждой точке пластин и поляризационных зарядов диэлектрического шара. Знания величины диэлектрической проницаемости ϵ и потенциала пластин для нахождения

поверхностных плотностей зарядов электродов и диэлектрика недостаточно. Плотность зарядов диэлектрика и пластин зависит не только от потенциала пластин, диэлектрической проницаемости, но и в существенной мере определяется формой диэлектрика. Становится ясно, что, на наш взгляд, простая задача неразрешима.

В данной работе предложен и обоснован численный метод решения задачи *диэлектрик в электростатическом поле*. Решение поставленной задачи с диэлектриком рассматривается как решение краевой задачи, когда на поверхностях элементов системы заданы граничные условия.

2. Электростатика диэлектриков

В соответствии с основными положениями электростатики для однородных диэлектриков в электростатических полях граничные условия на поверхности раздела определяются из двух уравнений [6]. Первое из них.

$$\text{rot } E = 0, \quad (1)$$

в котором вектор E - электрическое поле как внутри, так и вне диэлектрика. Второе уравнение определяет свойства вспомогательного вектора D :

$$\text{div} D = 0. \quad (2)$$

Поле E является суперпозицией поля сторонних зарядов E_0 и поля связанных зарядов E° : $E = E_0 + E^\circ$. В уравнении (2) $D = \epsilon_0 E + P$, где P - вектор поляризации или электрический дипольный момент единицы объема диэлектрика, ϵ_0 - диэлектрическая постоянная. В большинстве случаев для изотропных сред поляризация пропорциональна электрическому полю $P = \epsilon_0 \chi E$. Электрическая восприимчивость χ связана с другой характеристикой диэлектрика - диэлектрической проницаемостью ϵ - соотношением $\epsilon = 1 + \chi$.

Следствием уравнения (1) является непрерывность тангенциальных составляющих электрического поля на поверхности раздела двух диэлектриков:

$$E_{1t} = E_{2t}. \quad (3)$$

Следствием уравнения (2) является непрерывность нормальной составляющей вектора D к поверхности раздела:

$$D_{1n} = D_{2n}. \quad (4)$$

Для однородных диэлектриков зависимость D от E описывается соотношением

$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon \epsilon_0 E$, где ϵ - диэлектрическая проницаемость среды. В таком случае граничные условия (3) и (4) можно представить в виде соотношений для тангенциальной и нормальной составляющих полей двух диэлектриков:

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}. \quad (5)$$

В свою очередь граничные условия (5) можно представить и в виде граничных условий для потенциала $\varphi_1 = \varphi_2$, $\epsilon_1 \partial \varphi_1 / \partial n = \epsilon_2 \partial \varphi_2 / \partial n$.

В наших работах [2-4] предложен и обоснован алгебраический метод численного решения краевых задач электростатики произвольных систем проводников (электродов), удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$. Решения получаются в форме пригодной и для решения основной задачи электростатики: определения потенциалов, электрических полей, поверхностных плотностей зарядов проводников. Метод решения краевых задач основан на принципе суперпозиции и теореме единственности электростатики. Эта теорема утверждает: если каким-либо способом краевая задача электростатики решена, то полученное решение является единственным и верным [7]. В алгебраическом методе граничные условия удовлетворяются с помощью вспомогательных зарядов, размещаемых в объеме проводников вблизи их поверхности.

Основанием для применения вспомогательных дискретных зарядов служит тот факт, что вблизи поверхности проводника, где расположены вспомогательные заряды, эквипотенциальная поверхность хорошо повторяет форму поверхности с зарядами. При этом в непосредственной близости от поверхности с зарядами эквипотенциальной поверхностью является волнообразная поверхность, несущая на себе особенности, связанные с дискретностью размещения зарядов. На некотором расстоянии от поверхности с зарядами эквипотенциальная поверхность становится свободной от этих особенностей. Исследования [2] показали, что оптимальным является случай, когда расстояние между поверхностью с зарядами и поверхностью проводника d и расстояние между соседними зарядами a удовлетворяют неравенству $1,4a < d$.

3. Решение задачи

В качестве объекта исследований возьмем диэлектрическую пластинку, имеющую в сечении прямоугольную форму. Пластинка расположена в зазоре, образованном двумя плоскими электродами (рис. 1а). Разместим вспомогательные

линейные заряды внутри электродов, а также внутри или вне диэлектрика. Совокупность всех этих зарядов должна обеспечить выполнение граничных условий: задаваемым потенциалам на поверхностях проводников, а также выполнение граничных условий (5) на поверхности диэлектриков.

Возьмем электроды и диэлектрик достаточно протяженными, это позволит провести численное моделирование на плоскости $Z=0$. Тем самым, пространственная задача будет сведена к задаче на плоскости.

Предположим, что в объеме, в котором находится пластинка, диэлектрическая постоянная $\epsilon=1$. Посмотрим, к чему приведет расположение зарядов внутри самой пластинки и вне ее. На рис. 1б показана пластинка диэлектрика прямоугольного сечения в электрическом поле. В ее центре стрелкой обозначено направление вектора электрического поля E .

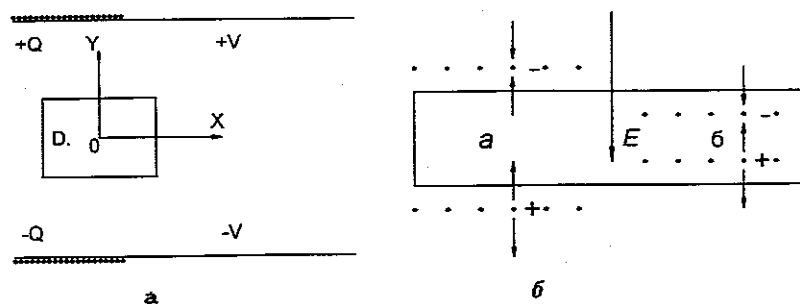


Рис.1. (а) Схема расположения диэлектрика (D) в электрическом поле между электродами с потенциалами $\pm V$. Вспомогательные заряды электродов - $\pm Q$.

(б) Диэлектрик в электростатическом поле E , знаками \pm обозначены знаки вспомогательных зарядов вне диэлектрика (а) и внутри него (б). Стрелки показывают направление электрических полей

В соответствии с направлением вектора электрического поля E на поверхности диэлектрической пластинки, ближайшей к верхнему электроду с положительным потенциалом, возникнут отрицательные заряды. На стороне пластинки, ближайшей к нижнему электроду, - положительные заряды. Эти связанные заряды диэлектрика вместе со сторонними зарядами электродов создают электрическое поле E . Слева на этой части рисунка показан случай, когда вспомогательные заряды размещаются вне пластинки. Знаки зарядов

соответствуют знакам зарядов, связанных на поверхности диэлектрика. Стрелками показаны направления электрических полей, создаваемых вспомогательными зарядами. Из рисунка следует, что электрическое поле внутри диэлектрика при таких знаках вспомогательных зарядов будет меньше внешнего поля. Их отношение определяется уравнениями (5). В нашем конкретном случае ее можно определить из соотношения $E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$. В этом соотношении $n1$ и $n2$ - внешние нормали к границе раздела диэлектриков. Размещенные таким образом вспомогательные заряды совместно с зарядами электродов должны обеспечить выполнение граничных условий на поверхности диэлектрика и решение основной задачи электростатики в объеме диэлектрика.

При размещении вспомогательных зарядов внутри диэлектрика (правая часть рисунка 1б) знаки этих зарядов определяются так же, как и при внешнем расположении зарядов. Внутреннее размещение зарядов обеспечивает выполнение граничных условий на границе раздела и решение основной задачи электростатики вне диэлектрика. Применим *итерационный* метод, развитый в [2,3], к решению задачи *диэлектрик в электростатическом поле*.

Краевая задача будет решаться в несколько этапов. Основные этапы определяются итерационным способом численного решения задачи и двумя способами размещения зарядов внутри и вне диэлектрика.

Поверхность проводника является эквипотенциальной, электрическое поле внутри проводников отсутствует, поэтому для решения краевых задач с проводниками достаточно только внутреннего размещения вспомогательных зарядов. Поверхность диэлектрика в отличие от поверхности проводника не является эквипотенциальной. Одним из граничных условий на поверхности диэлектрика является разрыв нормальной составляющей электрического поля на поверхности. Для выполнения этого условия необходимо размещать вспомогательные заряды внутри и вне диэлектрика. Внутреннее и внешнее размещения зарядов накладывают дополнительное условие на расстояние между поверхностями с внутренними и внешними зарядами. Расстояние между ними должно быть таким, чтобы обеспечить минимальную разность между вычисленными значениями электрических полей и потенциалов на поверхностях электродов соответственно с внешними и внутренними зарядами диэлектрика.

Решение может дать положительный результат только при условии размещения вспомогательных зарядов внутри и вне диэлектрика на очень близких расстояниях d от поверхности диэлектрика. В конкретном случае решения задачи должно выполняться соотношение $2d < R_{min}$, где R_{min} - минимальное расстояние между диэлектриком и электродом. Вследствие этого будут близки между собой и значения потенциалов на поверхности диэлектрика и потенциалы электрода. Только в этом случае будут близки по значению попарно линейные вспомогательные заряды внутри и вне диэлектрика, а также попарно вспомогательные заряды электродов при внутреннем и внешнем размещении зарядов диэлектрика (рис.2). Следовательно, будут близки между собой и потенциалы электродов при внутреннем и внешнем размещении зарядов диэлектрика. Это положение проиллюстрировано вычислениями и приведенными ниже рисунками.

Переходим к описанию этапов решения поставленной задачи в соответствии с принятой схемой.

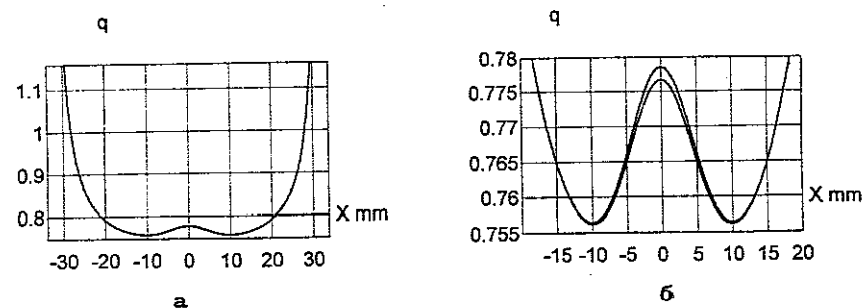


Рис. 2. (а) Распределение величин вспомогательных зарядов q вдоль поверхности электрода при внутреннем и внешнем расположении вспомогательных зарядов диэлектрика. Разница в значении q проявляется только в виде небольшого утолщения кривой в области $X=0$.

(б) Те же распределения в измененном масштабе. Наибольшее различие между распределениями при $X=0$ не превышает 0,002

Первый этап решения

а). Решается краевая задача - вычисляются вспомогательные заряды электродов $Q(a,k)$, создающих вместе с вспомогательными зарядами диэлектрика $q(i)$

заданный на электродах потенциал $\pm V$. Вспомогательные заряды диэлектрика, равные между собой, размещены внутри диэлектрика.

б). Вычисляются вспомогательные заряды $Q(b,k)$ при размещении таких же по величине зарядов диэлектрика $q(i)$, как и в пункте (а), вне его объема. Совокупность этих зарядов электродов создает вместе с постоянными зарядами диэлектрика потенциалы электродов $\pm V$. Здесь и далее индексы a и b соответствуют размещению зарядов внутри диэлектрика и вне диэлектрика.

Использование на этом этапе зарядов диэлектрика приводит к увеличению вспомогательных зарядов электродов при заданном потенциале электродов, как это происходит в реальности. При решении задачи итеративным методом в этом случае сокращается итеративный процесс второго этапа.

Таким образом, в результате первого этапа решения находятся два набора зарядов электродов $Q(a,k)$, и $Q(b,k)$ соответственно для внутреннего и внешнего случаев размещения постоянных и одинаковых по величине вспомогательных зарядов диэлектрика.

Второй этап решения

а). Вычисляются нормальные составляющие электрического поля при размещении вспомогательных зарядов внутри диэлектрика для величин зарядов электродов $Q(a,k)$, найденных на первом этапе решения при размещении вспомогательных зарядов вне диэлектрика и зарядов электрода $Q(b,k)$. В обоих случаях начальные значения величин вспомогательных зарядов диэлектрика такие же, как при вычислениях на первом этапе.

Отношение нормальных составляющих $E_{an}(x)/E_{bn}(x)$ обозначено равным $\varepsilon(x)$ – условному значению диэлектрической проницаемости пластинки.

б). Вычисляются новые значения вспомогательных зарядов диэлектрика $q(i)$, одинаковые для случая их размещения как внутри, так и вне диэлектрика. Эти заряды вместе с зарядами электродов создают электрические поля, удовлетворяющие уравнению $E_{an}(x)/E_{bn}(x) = E_{an}(0)/E_{bn}(0)$ или $\varepsilon(x) = \varepsilon(0)$ во всех контрольных точках. Отношение $\varepsilon(0) = E_{an}(0)/E_{bn}(0)$ относится к центру диэлектрика.

Третий этап решения

В результате второго этапа найдены новые величины зарядов диэлектрика, поэтому расчетные значения потенциалов электродов будут отличаться от величин $\pm V$, полученных после первого этапа решения задачи. При фиксировании новых значений зарядов диэлектрика величины зарядов электродов корректируются так, чтобы обеспечить прежние значения потенциалов электродов $\pm V$. Таков третий, промежуточный этап решения задачи. После этого этапа известны величины зарядов электродов $q(i)$, одинаковые для двух вариантов их размещения внутри и вне диэлектрика, известны также уточненные величины зарядов электродов $Q(a,k)$ и $Q(b,k)$. На основе этих данных вычисляются потенциалы в i контрольных точках диэлектрика $U(a,i)$ и $U(b,i)$ для случая размещения зарядов внутри (а) и вне (б) диэлектрика. Это дает возможность определить среднее значение потенциала в каждой контрольной точке как $U(i) = (U(a,i) + U(b,i))/2$.

Четвертый этап решения

На этом этапе находятся величины вспомогательных зарядов диэлектрика $q(a,i)$ при внутреннем их размещении, когда заряды диэлектрика вместе с зарядами $Q(a,k)$ создают потенциал на поверхности диэлектрика $U(i) = (U(a,i) + U(b,i))/2$. Потенциал $U(i)$ вычисляется на предыдущем этапе решения. Находятся величины вспомогательных зарядов диэлектрика $q(b,i)$ при внешнем их размещении, когда эти заряды вместе с зарядами $Q(b,k)$ создают потенциал $U(i)$.

Из решения нам известны расположение и величины всех вспомогательных зарядов, которые позволяют удовлетворить граничные условия. Таким образом, мы можем в любой точке внутреннего объема системы вычислить не только суммарный вклад зарядов обоих типов, но и вклад только сторонних зарядов или вклад только связанных зарядов. Решив основную задачу электростатики, мы можем определить нормальные составляющие электрического поля на любой поверхности элементов системы, потенциалы, электрические поля и т. д. как в объеме диэлектрика, так и вне его. В случае необходимости возможно уточнение величин зарядов электродов $Q(a,k)$ и $Q(b,k)$.

4. Применение метода

Рассмотрим конкретный пример. Геометрические характеристики системы: величина зазора между плоскостями-электродами - 20 мм, их ширина - 64 мм, длина - 750 мм. Диэлектрик размещен в центре между проводящими плоскостями- электродами. Его размеры: толщина - 4 мм, ширина - 7,5 мм. Длина диэлектрика равна длине проводящих плоскостей. Такую же длину имеют все линейные вспомогательные заряды. Вспомогательные заряды внутри и вне диэлектрика размещаются на расстоянии $d=50$ мкм от его поверхности. Расстояние между этими соседними зарядами также равно 50 мкм.

Разместим вспомогательные линейные заряды внутри электродов. Расстояния между соседними зарядами и расстояние между плоскостью размещения зарядов и внутренней поверхностью электрода равны 0,4 мм. В медианной плоскости ($Z=0$) потенциал и величина электрического поля, создаваемого линейным зарядом, определяются следующими соотношениями:

$$U = 2\sigma \ln \frac{L + \sqrt{L^2 + r^2}}{r} \quad \text{и} \quad E = \frac{2\sigma L}{r \sqrt{L^2 + r^2}}. \quad (6)$$

Здесь $2L$ - длина линейного заряда, σ - линейная плотность заряда. В (6) системный коэффициент $1/4\pi\epsilon_0$ опущен, поскольку все вычисления выполняются в относительных единицах. Зададим в качестве начальных значений равные единичные значения линейных плотностей этих зарядов $\sigma_k=1$, где k - номер линейного заряда. Для обоих случаев размещения вспомогательных зарядов диэлектрика возьмем равные значения линейных плотностей. Пусть поверхностная плотность зарядов диэлектрика $\sigma_d = 0,05$. С учетом того, что расстояние между вспомогательными зарядами диэлектрика в 8 раз меньше расстояния между зарядами диэлектрика, реальное соотношение плотностей будет не 0,05: 1, а 0,4: 1.

Потенциалы и электрические поля вычисляются в контрольных точках поверхности электрода и диэлектрика. Контрольные точки расположены на поверхностях электродов, внутри или вне диэлектрика на кратчайшем расстоянии от линейных зарядов. Потенциалы контрольных точек электродов после очередного i -го шага итерации нормируются по отношению к опорному:

$$R(k,i) = U(k,i)/U(N,i). \quad (7)$$

В этом выражении $U(k,i)$ - напряжение в контрольной точке номера k , $U(N,i)$ - опорное напряжение. Возьмем в качестве опорного потенциал центра электрода. Новое значение линейного заряда для следующего $i+1$ шага итерации определяется из соотношения

$$\sigma(k,i+1) = \sigma(k,i)/R^2(k,i). \quad (8)$$

Для уменьшения числа итераций отношение $R(k,i)$ в знаменателе выражения (8) взято во второй степени. Это уменьшение наиболее ощутимо в конце итерационного процесса, когда $R(k,i)$ близко к 1. Стремление $R(k,i) \rightarrow 1$ означает, что потенциал $U(k,i)$ близок к величине опорного потенциала. Выражение (8), служащее для определения величин зарядов для следующей итерации, замечательно тем, что автоматически уменьшает (увеличивает) величину ближайшего к контрольной точке заряда, если потенциал данной точки больше (меньше), чем опорный потенциал. Именно это обстоятельство и позволяет организовать сходящийся итеративный процесс. В некоторых случаях для ускорения процесса можно увеличивать степень отношения потенциалов $R(k,i)$, но это нужно делать осторожно, контролируя процесс численного решения, так как могут возникнуть резкие скачки значений потенциала при каждой следующей итерации, происходит «раскачка» [1]. Первый этап заканчивается определением величин вспомогательных зарядов электродов, создающих заданные потенциалы.

Как на первом, так и на остальных этапах численного решения проводятся вычисления вспомогательных зарядов. Следовательно, на всех этапах применимы одинаковые итеративные методы их вычисления. Величины зарядов диэлектрика на втором этапе определяются с использованием формулы (8): $\sigma(k,i+1) = \sigma(k,i)/R^2(k,i)$, но в качестве R используется отношение нормальных составляющих электрического поля в контрольных точках на поверхности диэлектрика $R(k,i) = E_{n1}/\epsilon(0)E_{n2}$. Числитель соответствует размещению вспомогательных зарядов внутри диэлектрика, а знаменатель - вне его. Нахождение величин вспомогательных зарядов, создающих заданное отношение нормальных составляющих электрического поля на границе диэлектрика - результат второго этапа решения. На третьем этапе уточняются величины зарядов электродов с использованием соотношения (8).

На рис. 3 приведены распределения нормальных составляющих электрического поля вдоль поверхности диэлектрика до и после уточнения величин зарядов электродов. Четвертый этап состоит из решения двух задач: одна из них - вычисление зарядов диэлектрика при их внутреннем размещении, вторая - вычисление зарядов диэлектрика при их внешнем размещении. На данном этапе в решении первой задачи используется выражение (8), в котором $R(k,i) = U(k,i)/U(N,i)$. В числителе этого выражения стоит потенциал, вычисляемый в контрольной точке поверхности диэлектрика при внутреннем размещении зарядов диэлектрика, в знаменателе - полусумма потенциалов в этой же точке, получаемая при решении третьего этапа: $U(N,i) = (U(a,i) + U(b,i))/2$. Вторая задача решается аналогично, но в качестве числителя берется потенциал, вычисляемый в контрольной точке поверхности диэлектрика при внешнем размещении зарядов диэлектрика.

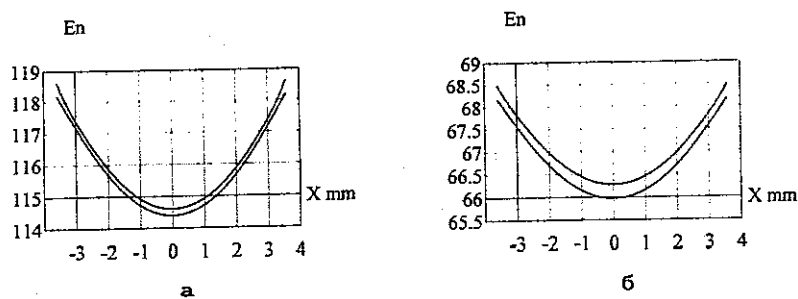


Рис. 3. Распределение проекций электрического поля E на внешние нормали к поверхности диэлектрика до и после коррекции: вне диэлектрика (а) и внутри него (б).

Относительная разность проекций поля не превышает 0,002 (а) и 0,005 (б). Коррекция величин зарядов электродов на третьем этапе приводит к уменьшению величины поля вне диэлектрика (а) и увеличению поля внутри него (б)

5. Результаты численного моделирования

При использовании итеративного метода точность вычисления определяется числом итераций. На рис. 4а (верхняя кривая) показано отношение нормальных составляющих поля, т.е. величина ϵ . В этом случае относительная точность вычислений находится на уровне 10^{-6} , а $\epsilon = 1,734$. Нижняя кривая - отношение

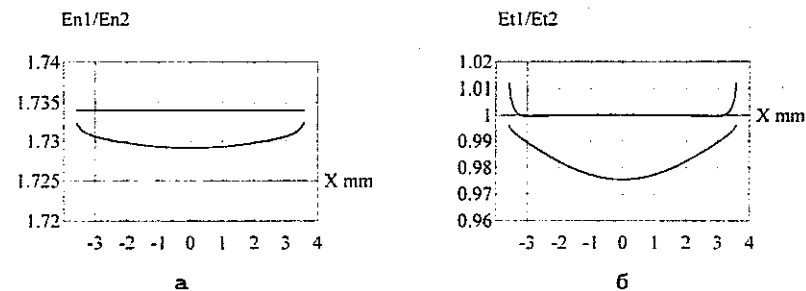


Рис.4. (а) Потенциальные и V -распределения вдоль поверхности диэлектрика при внутреннем (верхняя кривая) и внешнем (нижняя кривая) расположении вспомогательных зарядов диэлектрика.

(б) Распределение составляющей поля E_x вдоль короткой стороны диэлектрика при внешнем положении вспомогательных зарядов диэлектрика только вдоль поверхности диэлектрика ($Y=2$ мм). Оно незначительно отличается от распределения соответствующему внутреннему размещению зарядов вдоль той же поверхности диэлектрика

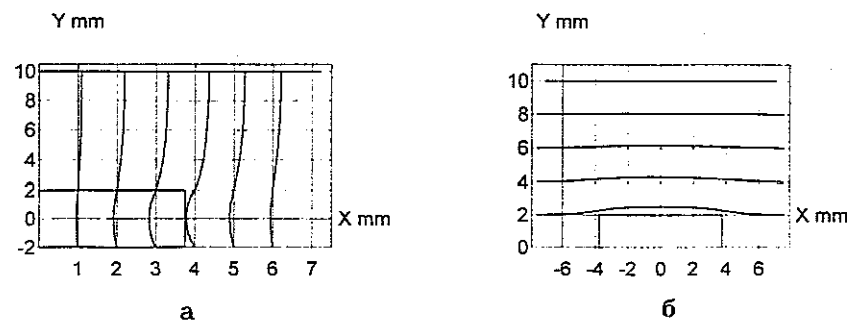


Рис. 5. (а) Распределение отношений нормальных составляющих электрического поля E_{n1}/E_{n2} вдоль поверхности диэлектрика до (верхняя кривая) и после (нижняя кривая) коррекции.

(б) Распределение отношений тангенциальных составляющих E_{t1}/E_{t2} до (нижняя кривая) и после (верхняя кривая) коррекции.

В соответствии с граничными условиями (7) отношение E_{n1}/E_{n2} должно быть равно диэлектрической проницаемости ϵ , а отношение тангенциальных составляющих $E_{t1}/E_{t2} = 1$. Увеличение отношения до 1% на краях обязано неучтенным краевым эффектам

нормальных составляющих после четвертого этапа вычислений. В результате вычислений получаем значение диэлектрической проницаемости $\epsilon=1,7305\pm 0,0015$. На рис. 4б проиллюстрировано отношение тангенциальных составляющих поля до уточнения величин зарядов электродов (нижняя кривая), а также отношение этих же составляющих после уточнения (верхняя кривая).

Карты силовых линий электрического поля и эквипотенциалей в районе размещения пластины диэлектрика представлены на рис. 5. Положение диэлектрика показано прямоугольником. Прямая линия при значении $Y=10$ мм соответствует внутренней поверхности электрода, расчетное значение его потенциала – 1000 вольт.

На рис. 6а приведено распределение потенциала вдоль поверхности диэлектрика. Увеличение потенциала от центра к краям соответствует увеличению поверхностной плотности поляризационных зарядов. На рис. 6б показано распределение составляющей поля E_x вдоль короткой стороны пластинки диэлектрика для случая внешнего размещения вспомогательных зарядов диэлектрика. Эта составляющая по отношению к пластинке диэлектрика является нормальной. Распределение для случая размещения вспомогательных зарядов внутри диэлектрика от приведенного распределения отличается незначительно, т.е. соответствующий скачок нормальных составляющих поля отсутствует. При построении математической модели для вычислений вспомогательные заряды вдоль боковых поверхностей сознательно не размещались. Это было необходимо сделать для всесторонней проверки метода

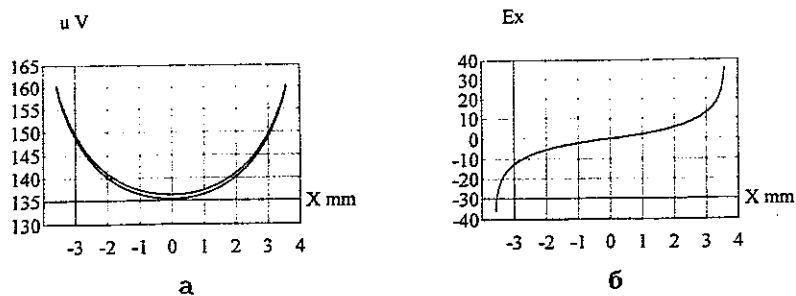


Рис. 6. (а) Карта силовых линий поля и (б) эквипотенциальных линий в районе диэлектрика. Диэлектрик показан в виде прямоугольника

решения задачи, оценки краевых эффектов вблизи боковых поверхностей. Об их наличии можно судить по рис. 4.

Распределение величины электрического поля E вдоль оси $X=0$ показано на рис. 7а. Ход кривой от границ электродов до границ диэлектрика обусловлен зарядами электродов и внутренними вспомогательными зарядами диэлектрика. Распределение внутри диэлектрика определяется зарядами электродов и внешними вспомогательными зарядами диэлектрика в соответствии со схемой на рис. 1. Увеличение поля вблизи поверхности диэлектрика с его внешней стороны и в центре диэлектрика связано с увеличением плотности силовых линий поля в этих областях (рис. 5а). На рис. 7б показаны распределения электрического

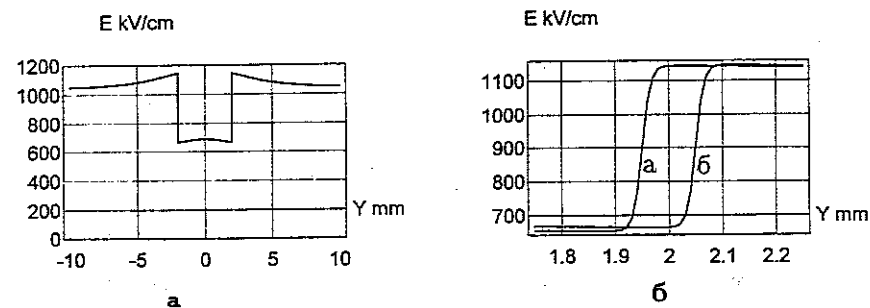


Рис. 7. (а) Распределение электрического поля E_y вдоль оси системы $X=0$. Увеличение поля вблизи внешних границ диэлектрика и в его центре соответствует, как это видно из рисунка б, сгущению в этих местах силовых линий.

(б) Аналогичная зависимость при внутреннем (а) и внешнем (б) положениях вспомогательных зарядов диэлектрика, $Y=2$ мм соответствует границе диэлектрика

поля для внутреннего (кривая а) и внешнего (кривая б) размещения вспомогательных зарядов диэлектрика. Наклонные участки кривых а и б соответствуют областям между поверхностью, на которой размещены вспомогательные заряды, и поверхностью диэлектрика (схема на рис. 1). Наклонные участки параллельны между собой и сдвинуты относительно границы диэлектрика $Y=2$ мм в противоположных направлениях. Из рисунка видно, что

величина этого сдвига равна расстоянию между поверхностью диэлектрика и поверхностями, на которых размещены вспомогательные заряды ($d=50$ мкм).

При отсутствии сторонних зарядов на границе раздела выполняются соотношения (5) $E_{n1}=E_{n2}$ и $\epsilon_1 E_{t1}=\epsilon_2 E_{t2}$ и действует закон преломления силовых линий электрического поля $\text{tg}\alpha/\text{tg}\beta=\epsilon$. Это означает, что в диэлектрике с большим значением проницаемости ϵ линии поля будут составлять больший угол с нормалью к границе раздела. Линии поля испытывают излом. Это положение иллюстрирует рис. 8а. На нем нормаль проходит вдоль линии $X=2$ мм. Границе диэлектрика соответствует линия $Y=2$ мм.

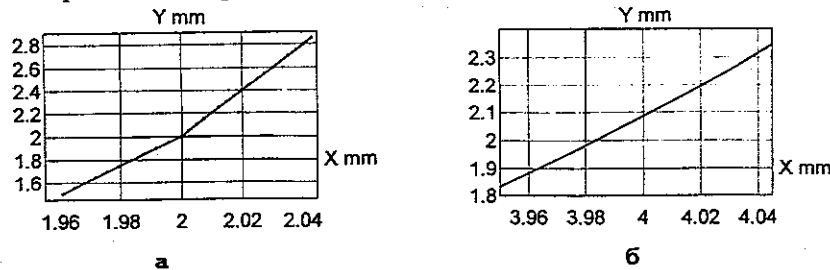


Рис. 8. (а) Излом силовой линии поля на поверхности диэлектрика в точке с координатами (2, 2). В диэлектрике линии поля составляют больший угол с нормалью к границе раздела.

(б) Отсутствие излома линий поля вблизи диэлектрика

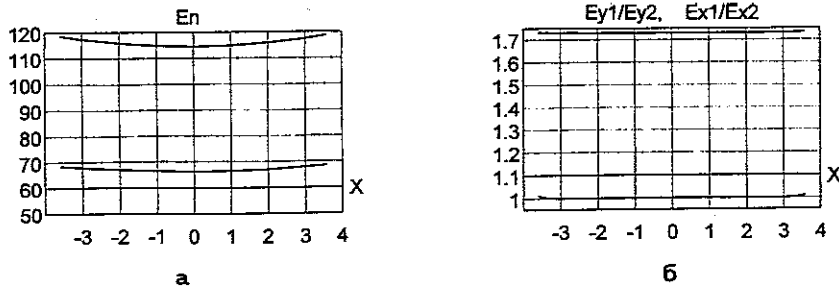


Рис. 9. (а) Распределение нормальных составляющих электрического поля вдоль диэлектрика. Верхняя кривая - проекция на внешнюю нормаль к поверхности вне диэлектрика, нижняя кривая - проекция на внешнюю нормаль к поверхности внутри диэлектрика

(б) Отношения нормальных составляющих - $E_{y1}/E_{y2} = \epsilon$ (верхняя линия) и тангенциальных компонентов E_{x1}/E_{x2} (нижняя линия) вдоль диэлектрика

На рис. 9 показаны распределения нормальных составляющих электрического поля вдоль диэлектрика (а). Верхняя кривая - проекция на внешнюю нормаль к поверхности вне диэлектрика, нижняя кривая - проекция на внешнюю нормаль к поверхности внутри диэлектрика.

Отношения нормальных составляющих и тангенциальных компонентов вдоль поверхности диэлектрика представлены на рис.9б, на котором показаны окончательные результаты численного решения задачи.

6. Совершенствование метода

Задача решалась с помощью итерационного метода, простого в программировании, но требующего длительного численного расчета. Альтернативным является численный метод алгебраических уравнений [8]. При применении метода алгебраических уравнений к рассмотренной задаче необходимо составить систему из n линейных уравнений, где n равно сумме i вспомогательных зарядов электродов, и $2m$ зарядов диэлектрика. Решение этой системы позволит найти величины всех зарядов, обеспечивающих выполнение граничных условий. Система уравнений (9) определяет потенциал в j -й контрольной точке электрода:

$$\sum_{i,j} U_{i,j} + \frac{1}{2} \sum_{k,j} U_{k,j} + \frac{1}{2} \sum_{m,j} U_{m,j} = U_j. \quad (9)$$

Первый член уравнений определяет потенциал, создаваемый вспомогательными зарядами самого электрода. Два следующих члена определяют потенциал от вспомогательных зарядов диэлектрика при внутреннем и внешнем их размещении. Выполнение условий для размещения вспомогательных зарядов $2d < R_{\min}$ позволяет при вычислениях использовать полусумму потенциалов при внешнем и внутреннем размещении зарядов.

Поведение нормальных компонентов электрического поля на границе раздела двух сред $E_{n1}=\epsilon E_{n2}$ описывают уравнения (10).

$$\sum_{i,j} E_{n,i,j} + \sum_{k,j} E_{n,k,j} - \epsilon \left(\sum_{i,j} E_{n,i,j} + \sum_{m,j} E_{n,m,j} \right) = 0. \quad (10)$$

Первый и второй члены определяют нормальные составляющие электрических полей на границе раздела с внешней стороны диэлектрика. Нормальные составляющие создаются вспомогательными зарядами электродов и зарядами

диэлектрика при их внутреннем размещении. Третий член обязан вспомогательным зарядам электрода и внешним зарядам диэлектрика. Этот член определяет нормальные компоненты поля на границе раздела с внутренней стороны диэлектрика. Диэлектрическая проницаемость ϵ входит в эту систему уравнений непосредственно.

Последняя система уравнений связана с граничными условиями на поверхности диэлектрика для потенциала: отсутствие разрыва потенциала при переходе через границу раздела.

$$\sum_{i,j} U_{i,j} + \sum_{k,j} U_{k,j} - (\sum_{i,j} U_{i,j} + \sum_{m,j} U_{m,j}) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, уравнения (9-11) образуют систему из независимых $n=i+2m$ уравнений для нахождения величин $n=i+2m$ вспомогательных зарядов электродов и диэлектрика. Поставленная задача полностью разрешима.

В качестве иллюстрации метода решения поставленной задачи *диэлектрик в электростатическом поле* использовался протяженный диэлектрик, это помогло свести решение задачи к решению на плоскости.

Для решения пространственных задач необходимо использовать точечные вспомогательные заряды. Применение в качестве вспомогательных зарядов точечных зарядов позволяет выполнить решение задач с диэлектриками произвольной формы и различных диэлектрических проницаемостей. Однако число неизвестных и равное им число уравнений может быть велико. Но и в этом случае задача полностью разрешима: все определяется не предложенным методом, а возможностями используемой вычислительной техники.

6. Выводы

Предложен метод решения задач *диэлектрик в электростатическом поле*. Метод заключается в численном решении граничной задачи с использованием вспомогательных зарядов проводящих электродов и вспомогательных зарядов диэлектрика, размещаемых внутри и вне диэлектрика.

Использование точечных вспомогательных зарядов позволяет решать задачи с произвольными по форме диэлектриками, имеющими различные диэлектрические проницаемости.

Возможности предложенного метода проиллюстрированы на конкретном примере решения задачи.

7. Заключение

Я многим обязан своим коллегам за многочисленные обсуждения и поддержку данной работы. Всем им глубокая благодарность.

Мне бы хотелось - еще раз - поблагодарить мою жену М.Г. Шафранову, выполнившую научное редактирование текста, за бесконечное терпение и моральную поддержку.

Литература

- [1] Hawkes P.W. and Kasper E. Principles of Electron Optics, v. 1, Basic Geometrical Optics, Academic Press, London, 1989.
- [2] Шафранов М.Д. Метод решения основной задачи электростатики для многопроволочных пропорциональных камер. Сообщение ОИЯИ P13-96-355 Дубна (1996) 1-30.
- [3] Шафранов М.Д. Алгебраический вариационно-итерационный метод решения краевых задач электростатики произвольных систем, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Сообщение ОИЯИ P11-98-103, Дубна (1998) 1-42.
- [4] Shafranov M.D. Algebraic iterative method to solve boundary problems of arbitrary electrostatic systems satisfying the Laplace equation. JINR Preprint E11-98-255. Dubna (1998) 1-12.
- [5] Тамм И.Е. Основы теории электричества, Наука, Москва. (1966) 100-120.
- [6] Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. Наука, Москва (1992) 57-70.
- [7] Панофский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Физ.-Мат., (1963) 52-53.
- [8] Топурия Т.П., Шафранов М.Д. Метод линейных уравнений для решения краевых задач электростатики и примеры его применения в электронной оптике. Препринт ОИЯИ P11-98-262, Дубна (1998) 1-14.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 мая 1999 года.