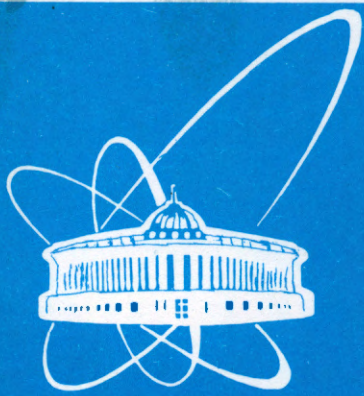


99-102



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11-99-102

М.Г.Айрапетян, Э.А.Айрян, Г.Г.Гульбекян, О.Селеш,
А.В.Федоров

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРЕМЕНИ
ДИФФУЗИИ РАДИОАКТИВНЫХ ЯДЕР
ЧЕРЕЗ ТРУБОПРОВОД КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ
ОТ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ МИШЕНИ
К ИОННОМУ ИСТОЧНИКУ

1999

1 Введение

Источники радиоактивных ионов должны отвечать общим требованиям производства ионов, однако они являются специфическими с точки зрения материала, подаваемого в разрядную камеру, который представляет собой продукт ядерных реакций первичного пучка с материалом мишени. Важные моменты при этом:

1) получение достаточно быстрой транспортировки конкретного изотопа от места возникновения до ионного источника относительно периода полураспада, поскольку этот изотоп производится в небольшом количестве и интенсивности пучков в большинстве своём не превышают единиц нА;

2) сепарация конкретного изотопа от остальных продуктов реакций. И то и другое достигается с помощью правильного выбора материалов и конструкций системы «мишень – ионный источник» (рис.1);

3) время транспортировки изотопа от места возникновения до разрядной камеры может достигать больших значений, что сильно понижает эффективность системы. С этой точки зрения критическими являются диффузия внутри твёрдой или жидкой мишени и эффузия по системе.

Мы пытаемся описать эти явления с помощью математико-физического моделирования.

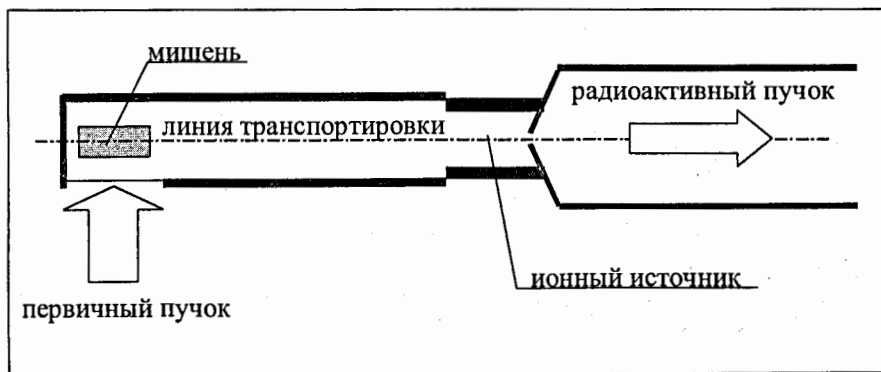


Рис. 1. Упрощённая схема системы для производства пучков радиоактивных ионов

В работе представлены как основные принципы метода, так и результаты, полученные из расчётов на простой модели транспортной части (диффузия по

трубопроводу с круглым сечением). В дальнейшем предполагается развитие модели с целью её приближения к реальным условиям, из чего была бы получена более реалистичная оценка явлений, критически действующих на производство радиоактивных пучков, а также упрощение проектирования новых и модернизации старых источников радиоактивных пучков.

2 Моделирование диффузионного прохождения трубопровода с круглым сечением

Прохождение частицы по транспортной линии изучалось путём последовательного моделирования многократных отражений частиц от стенок трубопровода с круглым сечением в условиях вакуума (диффузия). Предполагалось, что частицы не взаимодействуют друг с другом, и их плотность в трубопроводе такова, что реально имеет место только столкновение частиц со стенками сосуда. Взаимодействие частицы с поверхностным слоем трубопровода описывалось введением параметра – время задержки - τ_{delay} , соответствующего времени, в течение которого частица, попавшая на стенку, не меняет своих координат. При этом, на начальном этапе предполагалось, что скорость частицы до и после взаимодействия со стенкой не меняется по абсолютной величине. Также предполагалось, что все частицы влетают в трубопровод с одинаковой начальной средней квадратичной скоростью:

$$v_0 = \sqrt{\frac{3kT}{M}}, \quad (1)$$

где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, M – масса частицы. В последующем было рассмотрено распределение скорости v по максвелловскому закону:

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Mv^2}{2kT}\right) v^2. \quad (2)$$

Плотность вероятности по углу рассеяния в продольной плоскости определялась законом косинусов:

$$P(\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta. \quad (3)$$

В поперечной плоскости распределение по углу рассеяния было выбрано равномерным. Выбор таких распределений позволяет смоделировать перенос вещества вдоль трубопровода под действием разности концентраций (диффузионный перенос):

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (4)$$

где j – поток частиц через единичную поперечную площадь в единицу времени, $\frac{\partial c}{\partial x}$ – градиент изменения концентрации вдоль продольной оси трубопровода, D – коэффициент диффузии. При описанных условиях для коэффициента диффузии D получается:

$$D = \frac{N}{N-1} \frac{L^2}{t} \cong \frac{L^2}{t}, \quad (5)$$

где N – количество частиц, влетающих в трубопровод; L – длина трубопровода; t – время диффузии. При этом очевидно, что выполняется условие,

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{N}{V}\right)}{\partial L} \cong \frac{1}{V} \left[\frac{\partial N}{\partial L} - \frac{N}{L} \right],$$

где объем трубопровода $V = SL$, а площадь поперечного сечения $S = \pi d^2/4$, d – диаметр трубопровода.

В случае, когда длина свободного пробега частицы сравнима с размерами трубопровода, для молярного потока через полное поперечное сечение в единицу времени получается выражение,

$$J = -\frac{\pi d^3}{3} \sqrt{\frac{RT}{2\pi\mu}} \frac{(c_2 - c_1)}{L}, \quad (6)$$

где $R = 8.314 \frac{J}{\text{mol K}}$ – универсальная газовая постоянная, μ – молярная масса,

а $(c_2 - c_1)$ – разность концентраций на концах трубопровода.

Из (6) для времени прохождения трубопровода получаем,

$$t = Q \frac{L^2}{d} \sqrt{\frac{\mu}{T}}, \quad (7)$$

где $Q = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{R}} \cong 0.652$.

При моделировании прохождения частиц по каналу (трубопроводу) с правильным сечением время генерации событий может быть заметно сокращено по сравнению с общим случаем произвольного сечения [1]. В данном случае, для трубопровода с круговым сечением, время пролёта между двумя последовательными столкновениями частицы со стенками трубопровода находилось из условия,

$$r \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = d \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = v_{\perp} t, \quad (8)$$

где d – диаметр трубопровода; $(x_0, y_0) = (0, 0)$ – позиция частицы на стенке трубопровода перед началом движения; (x, y) – новые координаты частицы при очередном столкновении со стенкой трубопровода в поперечной плоскости; φ –

угол рассеяния в поперечной плоскости, равномерно разыгрываемый в интервале $0 \div \pi$, а v_{\perp} – проекция полной скорости в поперечной плоскости $v_{\perp} = v \sin \theta$ (см. рис. 2).

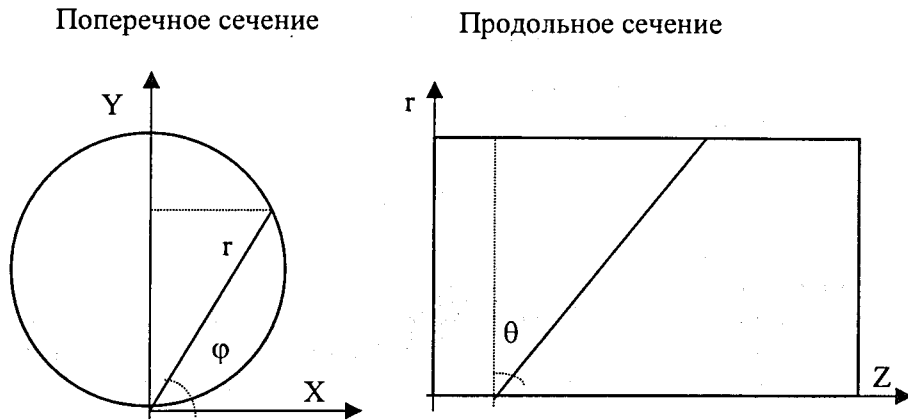


Рис. 2. Траектория движения частицы в трубке в поперечной и продольной плоскостях

Длина хорды r определяла вертикальную составляющую продольного сечения трубопровода (т.е. "новый" диаметр трубопровода). Новые координаты при перемещении в продольном направлении определялись как,

$$z = z_0 + v_{\parallel} t, \quad (9)$$

где $v_{\parallel} = v \cos \theta$; θ – угол рассеяния в продольном направлении, разыгрываемый согласно (3) в интервале $0 \div \pi$. Перед следующим движением частицы система вращалась относительно продольной оси до совмещения новой позиции $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \equiv (0, 0)$, и процедура повторялась. Если частица оказывалась на торце (начальной позиции $z = 0$), то угол θ разыгрывался в интервале $-\frac{\pi}{2} \div \frac{\pi}{2}$ (т.е.

частица не может покинуть трубопровод, кроме как вылетев с противоположной стороны или же распавшись в самом трубопроводе). Время прохождения частицей каждого отрезка суммировалось и сравнивалось с периодом полураспада $\tau_{1/2}$. В случае, когда $t < 10\tau_{1/2}$, считалось, что частица распалась, и она потеряна. Оценивалось время t_p диффузии частиц через трубопровод, за которое p процентов влетевших частиц проходило открытый конец трубопровода.

3 Обсуждение результатов

Прохождение частиц через трубопровод было рассмотрено на примере ядер ${}^6\text{He}$ с $\tau_{1/2} = 820$ мс при $T = 293$ К. Разыгрывалось 50000 событий. Были получены следующие результаты:

1. Рассматривалась зависимость между положениями при входе и выходе из трубки: а) частицы влетали по центру трубки; б) частицы влетали в трубку в произвольном месте. Корреляций обнаружено не было. Частицы вылетали из трубопровода равномерно распределенные по площади сечения трубки.

2. Рассматривалась зависимость времени диффузии t_p от длины трубки L (см. рис. 3). Полученные значения аппроксимировались квадратичной функцией $Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. Было получено $a_0 = a_1 = 0$ для всех случаев, а значения коэффициента a_2 для разных p приведены в таблице 1.

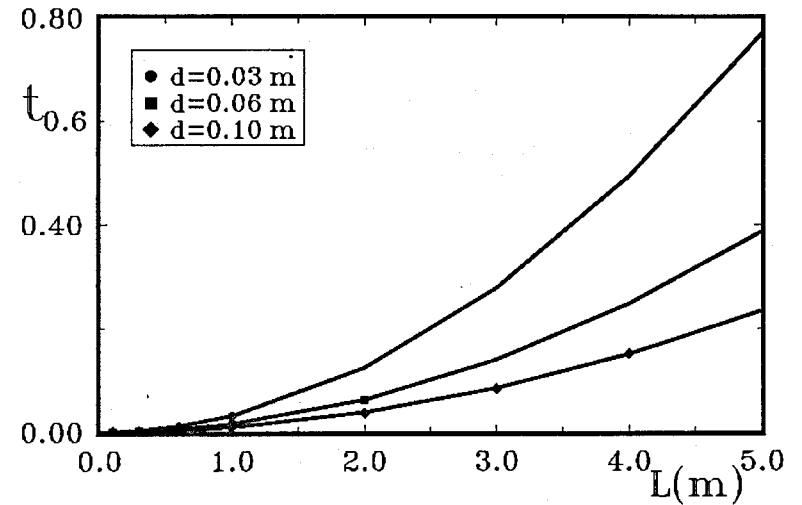


Рис. 3. Зависимость времени диффузии трубопроводом атомов ${}^6\text{He}$ от длины L трубопровода без учёта распадов.

Таблица 1: Значения параметра a_2 при аппроксимации зависимости времени диффузии t_p от длины L трубопровода функцией $Y = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ для разных значений диаметра d .

p [%]	$D = 0.03\text{m}$	$d = 0.06\text{m}$	$d = 0.1\text{m}$
50	0.02348	0.01177	0.00713
60	0.03086	0.01547	0.00937
70	0.04001	0.02002	0.01222

3. Рассматривалась зависимость времени диффузии трубопроводом в зависимости от диаметра d (см. рис. 4). Данные аппроксимировались функцией $Y = b/X$. Значения коэффициента b для разных p приведены в таблице 2.

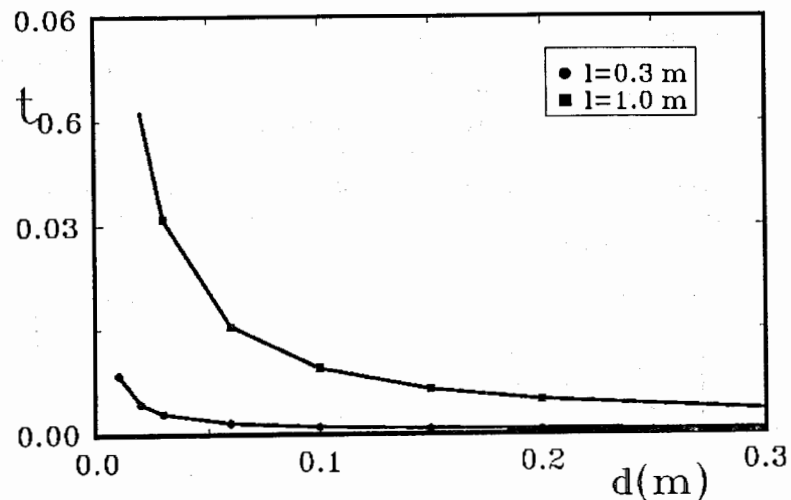


Рис. 4: Зависимость времени диффузии трубопроводом атомов ${}^6\text{He}$ от диаметра d трубопровода без учёта распадов

Таблица 2: Значения параметра b при аппроксимации зависимости времени диффузии t_p от диаметра d трубопровода функцией $Y = b/X$ для разных значений длины L

p [%]	$L = 0.3\text{m}$	$L = 0.1\text{m}$
50	6.23×10^{-5}	7.01×10^{-4}
60	8.28×10^{-5}	9.25×10^{-4}
70	1.09×10^{-4}	1.21×10^{-3}

Совмещая эти результаты, получаем для времени диффузии трубопроводом,

$$t_p = Q \frac{L^2}{d} \sqrt{\frac{\mu}{T}} \quad (10)$$

Коэффициент пропорциональности Q для разных значений p приведен в таблице 3. Еще раз отметим, что этот результат не зависит от того, фиксирована ли позиция вхождения в трубку или она может быть произвольной.

Таблица 3: Значения коэффициента Q из (10), полученные для разных значений p и определенное из (7)

P [%]			Q из ур-ния (7)
50	60	70	
0.490	0.648	0.843	0.652

Как видно из приведенных в таблице 3 значений, полученное аналитически выражение для времени диффузии трубопроводом (7) с хорошей точностью воспроизводится при моделировании при $p = 60\%$.

4. Рассматривалась зависимость времени диффузии t_p от времени жизни на стенке трубопровода τ_{delay} (см. рис. 5).

Данные фитировались линейной функцией $Y = a_0 + a_1 X$. Значения коэффициентов a_0 и a_1 для $d = 0.1\text{m}$ и при различных L приведены в таблице 4.

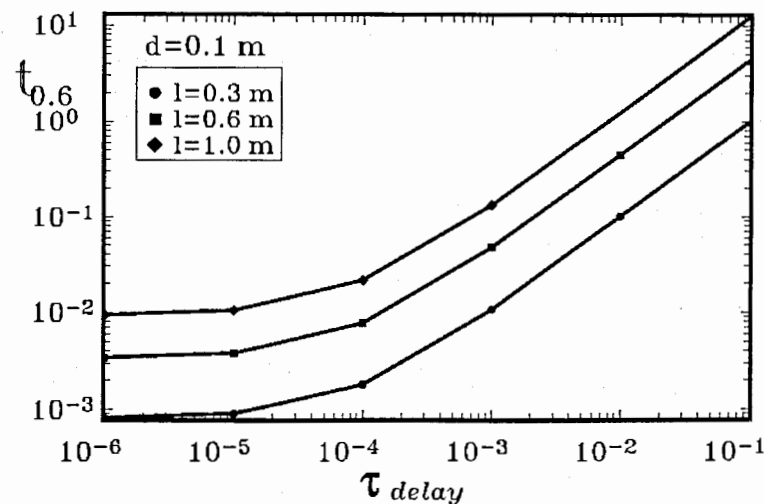


Рис. 5: Зависимость времени диффузии трубопроводом атомом ${}^6\text{He}$ от времени задержки на поверхности τ_{delay}

Таблица 4: Значения параметров a_0 и a_1 при аппроксимации зависимости времени диффузии трубопроводом t_p от времени задержки τ_{delay} функцией $Y = a_0 + a_1X$ при $d = 0.1m$ и разных L и p

L [m]	p = 50%		p = 60%		p = 70%	
	a_0	a_1	a_0	a_1	a_0	a_1
0.3	1.1785×10^{-3}	15.069	8.0563×10^{-4}	9.920	5.3383×10^{-4}	4.981
0.6	4.5966×10^{-3}	61.135	3.3567×10^{-3}	44.274	2.4135×10^{-3}	30.270
1.0	1.2235×10^{-2}	166.324	9.2737×10^{-3}	123.575	6.8403×10^{-3}	90.599

Видно, что, начиная с некоторого порогового значения τ_{delay} , зависящего от размеров трубопровода, время диффузии t_p заметно возрастает, приводя к потерям в трубопроводе от распадов частиц.

4 Заключение

Смоделирована зависимость времени диффузии радиоактивных ядер трубопроводом с круглым сечением от размеров трубопровода и времени задержки на стенках. Алгоритм позволяет восстанавливать временную зависимость от размеров трубопровода с большой точностью при 60% прошедших частиц. Также, показано отсутствие корреляций между положениями частиц на входе и выходе из трубопровода.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №01-99-01101.

Литература

[1] Ершов Б.Д., Попов Н.Г., Саксатинский Г.Л., « Методы анализа молекулярных потоков», НИИЭФА, обзор ОА-31, Ленинград, 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 апреля 1999 года.

Айрапетян М.Г. и др.

P11-99-102

Математическое моделирование времени диффузии радиоактивных ядер через трубопровод круглого сечения от производящей мишени к ионному источнику

Описан алгоритм и приведены результаты математического моделирования времени диффузионного прохождения трубопровода с круглым поперечным сечением радиоактивными ядрами ${}^6\text{He}$. Получены оценки времени диффузии в зависимости от размеров трубопровода и времени задержки на стенках.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Airapetyan M.G. et.al.

P11-99-102

Mathematical Modeling of Radioactive Nucleus Diffusion Time Through the Pipe of Circular Cross Section From the Generating Target to the Ion Source

An algorithm and results of mathematical modeling are described for the modeling of diffusion time of the ${}^6\text{He}$ radioactive nucleus through the pipe with circular cross section. Diffusion time estimations are obtained in dependence on the pipe dimensions and the time of delay on pipe's walls.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1999