ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11-98-69

Е.П.Жидков[1], А.Г.Соловьев[2]

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ

Направлено в «Журнал вычислительной математики и математической физики»

[1]E-mail: zhidkov@lcta41.jinr.ru
[2]E-mail: solovjev@main1.jinr.ru

1998

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе[1] изучается проблема повышения точности определения собственных значений и собственных функций краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на полупрямой. К рассматриваемому классу задач принадлежит, например, задача на собственные значения для стационарного уравнения Шредингера на полуоси. Определение собственных значений оператора энергии является одной из центральных задач квантовой механики. Аналитически собственные значения энергии вычисляются лишь для некоторых модельных задач. В связи с этим проблема их численного определения является актуальной. Для нахождения собственных значений и собственных функций краевой задачи на полупрямой интервал $[0, \infty)$, как правило, заменяется отрезком $[0, R]$, условие из бесконечности переносится в точку R, после чего находятся собственные значения и собственые функции краевой задачи на этом конечном отрезке.

Перенос граничного условия из бесконечности для рассматриваемой нами задачи на собственные значения и собственные функции выполняется аналогично тому, как это делалось в [1 – 3] для краевой задачи. Процедура переноса краевых условий неоднократно описывалась в литературе (см., например, [4 – 7]), и методы решения подобных задач с использованием этой процедуры достаточно хорошо развиты (об одном из них см., например, [8, 9]).

Результатом замены исходной задачи на $[0, \infty)$ задачей на $[0, R]$ является отличие найденных собственных значений и собственных функций от искомых. Исследование влияния выбора точки R на погрешность их определения показывает, что эта погрешность тем меньше, чем больше R. В литературе отсутствуют четкие критерии априорного выбора R для определения собственных значений и собственных функций с заданной точностью. Поэтому задачу на $[0, R]$ часто приходится решать повторно с бо́льшим R. Сравнение полученных собственных значений и собственных функций дает информацию об их точности. Если точность оказывается недо-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97 – 01 – 00746, 98 – 01 – 00190).

статочной (собственные значения и собственные функции сильно различаются), то необходимо дальнейшее увеличение отрезка.

Однако, имея в своем распоряжении два собственных значения задачи на различных отрезках, можно построить их линейную комбинацию, которая будет приближать соответствующее собственное значение исходной задачи с погрешностью, существенно меньшей, чем погрешности каждого из собственных значений по отдельности. То же самое можно проделать и с собственными функциями. В [1] предложен основанный на этой идее метод уточнения приближенных решений краевой задачи на полупрямой, а в [2] говорится о том, как можно продолжить этот процесс уточнения, имея три или более решений. Настоящая работа посвящена описанию и строгому обоснованию аналогичного метода применительно к задаче на собственные значения и собственные функции.

1. ЗАДАЧА НА ПОЛУПРЯМОЙ

Рассмотрим уравнение

$$u'' - [\lambda + q(x)]u = 0 \tag{1.1}$$

на полупрямой $[0, +\infty)$, где функция $q(x)$ непрерывна при $x > 0$, имеет в точке $x = 0$ полюс не выше, чем второго порядка, причем $\lim\limits_{x\to 0} x^2 q(x) \geq 0$, а при $x \to \infty$ имеет асимптотику $q(x) = c/x + O(1/x^2)$, где $c \leq 0$, причем если $c = 0$, то $q(x) \leq -(1+\epsilon)/(4x^2)$ при больших x для некоторого $\epsilon > 0$.

Требуется найти те значения λ (*собственные значения*), при которых уравнение (1.1) имеет нетривиальные решения (*собственные функции*), удовлетворяющие краевым условиям

$$u(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(\infty) = 0. \tag{1.3}$$

Предложение 1. *При сделанных относительно $q(x)$ предположениях задача (1.1), (1.2), (1.3) имеет собственные значения и собственные функции, причем все ее собственные значения неотрицательны и образуют бесконечную убывающую последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ с единственной предельной точкой $\lambda = 0$, а собственная функция $u_n(x)$, отвечающая собственному значению λ_n, имеет в интервале $0 \leq x < \infty$ в точности n нулей.*

Доказательство. Прежде всего, т.к. $q(x)$ имеет в точке $x = 0$ полюс не выше, чем второго порядка, и $\lim\limits_{x\to 0} x^2 q(x) = \rho \geq 0$, уравнение (1.1) имеет единственное (с точностью до постоянного множителя) удовлетворяющее краевому условию (1.2) решение:

$$u(x) = x^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\rho}}\left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right],$$

причем ряд, стоящий в квадратных скобках, сходится в некоторой окрестности нуля (см. [10, с. 115 – 119]). Принадлежность того или иного λ к спектру изучаемой задачи определяется поведением этого решения при $x \to \infty$.

Итак, пусть $u(x,\lambda)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевому условию (1.2). При $\lambda < 0$ это решение остается ограниченным на полупрямой $[0,\infty)$, колеблясь бесконечно много раз вокруг оси x, но не удовлетворяет условию (1.3) (см. [11, с. 28 – 31]). Поэтому собственные значения рассматриваемой задачи следует искать в интервале $\lambda \geq 0$.

Пусть $\lambda > 0$ и $\lambda + q(x) > 0$ при $x > x_\lambda$ (такое x_λ найдется, т.к. $q(x) \to 0$ при $x \to \infty$). Из принципа максимума следует, что решение $u(x,\lambda)$ для $x > x_\lambda$ имеет не более одного нуля, и либо $u(x,\lambda) \to \pm\infty$, либо $u(x,\lambda) \to 0$, $u'(x,\lambda) \to 0$ при $x \to \infty$. (В интервале $(0, x_\lambda]$ число нулей $u(x,\lambda)$ конечно, что следует из теоремы единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения). Поэтому решение $u(x,\lambda)$ при любом $\lambda > 0$ имеет конечное число нулей в интервале $0 < x < \infty$. Обозначим это число через $n(\lambda)$.

Имеет место теорема (см., например, [12, с. 143]), утверждающая, что если $\lambda_2 < \lambda_1$ и решение $u(x,\lambda_1)$ в интервале $0 < x < \infty$ имеет m нулей, то и $u(x,\lambda_2)$ имеет в том же интервале по крайней мере m нулей, причем ν-й нуль функции $u(x,\lambda_2)$ меньше ν-го нуля функции $u(x,\lambda_1)$. Таким образом, $n(\lambda)$ — невозрастающая функция λ.

Пусть $Q = -\min\limits_{x\in[0,\infty)} q(x)$. В силу сделанных относительно $q(x)$ предположений имеем: $0 < Q < +\infty$. Пусть $\lambda > Q$, тогда $\lambda + q(x) > m^2 > 0$ всюду на интервале $0 < x < \infty$. Поэтому между двумя последовательными нулями $u(x,\lambda)$ должен существовать по крайней мере один нуль любого решения уравнения

$$u'' - m^2 u = 0$$

(см. [12, с. 142]). *В то же время это уравнение имеет решение* e^{mx}, *которое нигде* в нуль не обращается. Следовательно, $n(\lambda) = 0$ при $\lambda > Q$.

Благодаря условиям, которым удовлетворяет функция $q(x)$ при больших x, любое решение уравнения (1.1) при $\lambda = 0$ имеет бесконечное число нулей в интервале $0 < x < \infty$ (см. [13, с. 141 – 145]). Поэтому $n(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to 0$.

Точки разрыва функции $n(\lambda)$ образуют дискретное множество и совпадают с собственными значениями рассматриваемой задачи. Действительно, исследование поведения решения $u(x,\lambda)$ при $x \to \infty$, когда λ изменяется в окрестности этих точек, показывает (см. [12, с. 146 – 148]), что каждому значению n соответствует интервал значений λ, в котором $n(\lambda) = n$, и при этом левый конец каждого такого интервала обладает тем свойством, что $u(x,\lambda) \to 0$ и $u'(x,\lambda) \to 0$ при $x \to \infty$.

Таким образом, существует такое λ_1, что отвечающее ему решение $u(x,\lambda_1)$ является решением задачи (1.1), (1.2), (1.3) и не имеет нулей в интервале $0 < x < \infty$, т.е. имеет в точности 1 нуль в интервале $0 \leq x < \infty$; существует такое $\lambda_2 < \lambda_1$, что отвечающее ему решение $u(x,\lambda_2)$ имеет в точности 2 нуля в интервале $0 \leq x < \infty$, и т.д. Предложение доказано.

Следует отметить, что условия, которым удовлетворяет $q(x)$, *гарантируют* существование собственных значений и собственных функций рассматриваемой задачи. Если эти условия не выполняются, но задача имеет собственные значения и собственные функции[2], то излагаемый ниже метод применим и в этом случае.

2. ЗАДАЧА НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Рассмотрим теперь уравнение (1.1) на конечном отрезке $[0, R]$, где R предполагается достаточно большим. Краевое условие (1.2) оставим без изменений[3], а вместо условия на бесконечности (1.3) поставим в выбранной нами точке R краевое условие

$$y'(R) + \left(\sqrt{\lambda} + \frac{c}{2\sqrt{\lambda}R}\right) y(R) = 0 \tag{2.1}$$

аналогично тому, как это делалось в [1 – 3].

Предложение 2. *Если R достаточно велико, то задача (1.1), (1.2), (2.1) имеет конечное число (тем большее, чем больше R) положительных собственных значений $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots, \mu_N$, которые образуют убывающую последовательность, причем собственная функция $y_n(x)$, отвечающая собственному значению μ_n, имеет в интервале $0 \le x < R$ в точности n нулей.*

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевому условию (1.2). При $\lambda < \lambda_1$ это решение имеет нуль в интервале $0 < x < \infty$, и этот нуль монотонно смещается влево при уменьшении λ. Поэтому найдется такое $\mu_1^0 < \lambda_1$, что $y(R, \mu_1^0) = 0$, причем $y(x, \mu_1^0)$ не имеет нулей в интервале $0 < x < R$ (т.е имеет в точности 1 нуль в интервале $0 \le x < R$). Очевидно, что μ_1^0 стремится слева к λ_1 при $R \to \infty$. Пусть R достаточно велико, так что $\mu_1^0 > 0$.

Ясно, что при достаточно большом R существует конечное число (тем большее, чем больше R) положительных чисел $\mu_1^0 > \mu_2^0 > \ldots > \mu_n^0 > \ldots > \mu_N^0$, таких, что $\mu_n^0 < \lambda_n$ ($\mu_n^0 \to \lambda_n$ при $R \to \infty$), а решение $y(x, \mu_n^0)$, отвечающее μ_n^0, обращается в нуль в точке R и имеет в точности n нулей в интервале $0 \le x < R$. (Если бы вместо условия (2.1) в точке R ставилось условие $y(R) = 0$, то эти числа были бы собственными значениями задачи на отрезке $[0, R]$).

Докажем, что в каждом интервале (μ_n^0, μ_{n-1}^0) существует, и притом единственное, значение μ_n, являющееся собственным значением задачи (1.1), (1.2), (2.1). (При $n = 1$ таким интервалом будет интервал $\lambda > \mu_1^0$).

Действительно, в каждом из этих интервалов функция

$$\frac{y'_x(R, \lambda)}{y(R, \lambda)} + \left(\sqrt{\lambda} + \frac{c}{2\sqrt{\lambda}R}\right)$$

[2]Например, когда $q(x) \ge -1/(4x^2)$ при больших x, возможно существование конечного числа собственных значений и собственных функций (см. [14, с. 522 – 524]).

[3]Перенос краевого условия из особой точки $x = 0$ описан, например, в [8, 9]. Пользуясь тем, что уравнение (1.1) имеет в нуле не более, чем регулярную особенность, можно не менять краевое условие (1.2).

является монотонно возрастающей функцией λ (см. [12, с. 144 – 145]). Эта функция возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, т.к. $y(R, \lambda)$ обращается в нуль на обоих концах интервала, а $y'_x(R, \lambda) \ne 0$. (В интервале $\lambda > \mu_1^0$ эта функция возрастает, обращаясь в $-\infty$ на левой границе этого интервала и становясь положительной при некотором значении λ, т.к. знаки $y(R, \lambda)$ и $y'_x(R, \lambda)$ становятся одинаковыми при увеличении λ). Следовательно, в каждом интервале существует единственное значение μ_n, в котором она обращается в нуль и которое является поэтому собственным значением задачи (1.1), (1.2), (2.1). Предложение доказано.

Ниже будет доказано, что собственные значения и собственные функции задачи на отрезке $[0, R]$ при $R \to \infty$ стремятся к собственным значениям и собственным функциям исходной задачи на полуоси. Из доказательства *предложения 2 ясно*, что при этом $\mu_n \to \lambda_n$, и $y_n(x) \to u_n(x)$, т.е. собственные значения и собственные функции задачи (1.1), (1.2), (2.1) сходятся к *соответствующим* им собственным значениям и собственным функциям задачи (1.1), (1.2), (1.3) (соответствие между собственными значениями μ_n и λ_n и между собственными функциями $y_n(x)$ и $u_n(x)$ устанавливается по числу нулей этих собственных функций в интервалах $[0, R)$ и $[0, \infty)$ соответственно).

3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Выясним, как ведут себя собственные значения μ_n задачи (1.1), (1.2), (2.1) на отрезке $[0, R]$ при увеличении R. Пусть, как и раньше, $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевому условию (1.2). Уравнение (1.1) обладает двумя линейно независимыми асимптотическими решениями:

$$\begin{aligned} \phi_1(x, \lambda) &= e^{-\sqrt{\lambda}x} x^{-c/(2\sqrt{\lambda})} \left[1 + O(1/x)\right], \quad x \to \infty, \\ \phi_2(x, \lambda) &= e^{\sqrt{\lambda}x} x^{c/(2\sqrt{\lambda})} \left[1 + O(1/x)\right], \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

(см. [13, с. 157]), поэтому решение $y(x, \lambda)$ при больших x представимо в виде их линейной комбинации, т.е. при $x \to \infty$ либо $y(x, \lambda) \to \pm\infty$, либо $y(x, \lambda) \to 0$, так что, вообще говоря, $y(x, \lambda) = O\left(e^{\sqrt{\lambda}x} x^{c/(2\sqrt{\lambda})}\right)$ при $x \to \infty$. Положим

$$\lim_{x \to \infty} e^{-\sqrt{\lambda}x} x^{-c/(2\sqrt{\lambda})} y(x, \lambda) = M(\lambda). \tag{3.1}$$

Рассмотрим функцию $z(x) = e^{-\sqrt{\lambda}x} x^{-c/(2\sqrt{\lambda})} y'_x(x, \lambda)$. Эта функция является решением уравнения

$$z' + \left(\sqrt{\lambda} + \frac{c}{2\sqrt{\lambda}x}\right) z = (\lambda + q(x))\, e^{-\sqrt{\lambda}x} x^{-c/(2\sqrt{\lambda})} y(x, \lambda).$$

где

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{\lambda} + \frac{c}{2\sqrt{\lambda}x}\right) = \sqrt{\lambda},$$
$$\lim_{x \to \infty} [\lambda + q(x)]\, e^{-\sqrt{\lambda}x} x^{-c/(2\sqrt{\lambda})} y(x, \lambda) = \lambda M(\lambda).$$

Поэтому (см. [11, с. 18 – 22]) любое решение этого уравнения удовлетворяет соотношению

$$\lim_{x\to\infty} z(x) = \frac{\lambda M(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}M(\lambda).$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}x^{-c/(2\sqrt{\lambda})}y'_x(x,\lambda) = \sqrt{\lambda}M(\lambda). \tag{3.2}$$

Заметим, что уравнение (1.1) в совокупности с краевым условием (1.2) эквивалентно следующему интегродифференциальному уравнению:

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}x^{-c/(2\sqrt{\lambda})}\left\{y' + \left(\sqrt{\lambda} + \frac{c}{2\sqrt{\lambda}x}\right)y\right\} =$$
$$= \int_0^x \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}t^{-c/(2\sqrt{\lambda})}\left[\left(q(t) - \frac{c}{t}\right) - \frac{c/\sqrt{\lambda}\left(c/\sqrt{\lambda}+2\right)}{4t^2}\right]y(t)dt. \tag{3.3}$$

Действительно, домножим уравнение (1.1) на функцию $\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}x^{-c/(2\sqrt{\lambda})}$ и проинтегрируем полученное выражение в интервале от 0 до x. Применяя дважды интегрирование по частям и учитывая условие (1.2), приходим к уравнению (3.3). Обратно, дифференцируя уравнение (3.3) по x, приходим к уравнению (1.1), причем из (3.3) следует, что $y(x) \to 0$ при $x \to 0$. Таким образом, решение $y(x,\lambda)$ есть решение уравнения (3.3).

Т.к. $y(x,\lambda) = O\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}x^{c/(2\sqrt{\lambda})}\right)$ при $x \to \infty$, интеграл в правой части уравнения (3.3) сходится при $x \to \infty$. Отсюда с учетом выражений (3.1) и (3.2) получаем следующее выражение для $M(\lambda)$:

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}x^{-c/(2\sqrt{\lambda})}\left[\left(q(x) - \frac{c}{x}\right) - \frac{c/\sqrt{\lambda}\left(c/\sqrt{\lambda}+2\right)}{4x^2}\right] \times$$
$$\times \; y(x,\lambda)dx.$$

С учетом этого выражения перепишем уравнение (3.3) в виде:

$$\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}x}x^{-c/(2\sqrt{\lambda})}\left\{y'_x(x,\lambda) + \left(\sqrt{\lambda} + \frac{c}{2\sqrt{\lambda}x}\right)y(x,\lambda)\right\} = M(\lambda) -$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}t^{-c/(2\sqrt{\lambda})}\left[\left(q(t) - \frac{c}{t}\right) - \frac{c/\sqrt{\lambda}\left(c/\sqrt{\lambda}+2\right)}{4t^2}\right] \times$$
$$\times \; y(t,\lambda)dt. \tag{3.4}$$

Получим теперь уравнения для собственных значений исходной задачи на полуоси и собственных значений задачи на конечном отрезке.

Лемма 1. *Собственные значения λ_n задачи (1.1), (1.2), (1.3), и только они, являются простыми корнями уравнения*

$$M(\lambda) = 0. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть λ_n — собственное значение задачи (1.1), (1.2), (1.3). В этом случае $y(x,\lambda_n) \to 0$ и $y'_x(x,\lambda_n) \to 0$ при $x \to \infty$. Поэтому из формул (3.1) и (3.2) следует, что $M(\lambda_n) = 0$.

Обратно, пусть $M(\lambda) = 0$. Это означает, что коэффициент при неограниченном на бесконечности решении $\phi_2(x,\lambda)$ в разложении $y(x,\lambda)$ равен нулю. Т.е. $y(x,\lambda) \to 0$ и $y'_x(x,\lambda) \to 0$ при $x \to \infty$. Поэтому $y(x,\lambda)$ является собственной функцией задачи (1.1), (1.2), (1.3), а λ — ее собственным значением.

Таким образом, множество собственных значений задачи (1.1), (1.2), (1.3) совпадает с множеством нулей функции $M(\lambda)$. Поскольку каждому собственному значению задачи (1.1), (1.2), (1.3) отвечает только одна собственная функция, нули функции $M(\lambda)$ простые, т.е. $M(\lambda_n) = 0$, а $M'(\lambda_n) \neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Собственные значения μ_n задачи (1.1), (1.2), (2.1) совпадают с корнями уравнения*

$$M(\mu) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\int_R^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}x}x^{-c/(2\sqrt{\mu})}\left[\left(q(x) - \frac{c}{x}\right) - \frac{c/\sqrt{\mu}\left(c/\sqrt{\mu}+2\right)}{4x^2}\right] \times$$
$$\times \; y(x,\mu)dx. \tag{3.6}$$

При $R \to \infty$ это уравнение имеет следующий асимптотический вид:

$$M(\mu) = -\frac{1}{4\mu}\mathrm{e}^{-2\sqrt{\mu}R}R^{-c/\sqrt{\mu}}\left[\left(q(R) - \frac{c}{R}\right) - \frac{c/\sqrt{\mu}\left(c/\sqrt{\mu}+2\right)}{4R^2}\right] \times$$
$$\times \; [1 + O(1/R)]. \tag{3.7}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы немедленно следует из уравнения (3.4) с учетом краевого условия (2.1) в точке R. Для доказательства второго утверждения получим асимптотику правой части уравнения (3.6) при $R \to \infty$.

Т.к. $y(x,\lambda) = O\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}x}x^{c/(2\sqrt{\lambda})}\right)$ при $x \to \infty$, интеграл в правой части уравнения (3.6) стремится к нулю при $R \to \infty$. Заметим также, что если $y(x,\lambda)$ удовлетворяет краевому условию (2.1), т.е. является собственной функцией задачи (1.1), (1.2), (2.1), то $y(R,\lambda) = \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}R}R^{c/(2\sqrt{\lambda})}$ (с точностью до постоянного множителя). Поэтому, пользуясь правилом Лопиталя, имеем:

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\int_R^\infty \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}x}x^{-c/(2\sqrt{\mu})}\left[\left(q(x) - \frac{c}{x}\right) - \frac{c/\sqrt{\mu}\left(c/\sqrt{\mu}+2\right)}{4x^2}\right]y(x,\mu)dx}{\mathrm{e}^{-2\sqrt{\mu}R}R^{c/\sqrt{\mu}}} =$$
$$= -\lim_{R\to\infty}\frac{\left[\left(q(R) - \frac{c}{R}\right) - \frac{c/\sqrt{\mu}\left(c/\sqrt{\mu}+2\right)}{4R^2}\right]}{2\sqrt{\mu} + c/(\sqrt{\mu}R)}.$$

Отсюда следует, что при $R \to \infty$ уравнение (3.6) эквивалентно асимптотическому уравнению (3.7). Лемма доказана.

Мы располагаем теперь всеми вспомогательными средствами для оценки погрешности собственных значений, вызванной заменой задачи на полупрямой задачей на конечном отрезке. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть R достаточно велико, так что существует положительное собственное значение μ_n задачи (1.1), (1.2), (2.1), соответствующее собственному значению λ_n задачи (1.1), (1.2), (1.3).*

Тогда $\mu_n \to \lambda_n$ при $R \to \infty$, причем имеет место разложение:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \lambda_n + \\ &+ \frac{1}{4\mu_n} e^{-2\sqrt{\mu_n}R} R^{-c/\sqrt{\mu_n}} \left[\left(q(R) - \frac{c}{R} \right) - \frac{c/\sqrt{\mu_n}\left(c/\sqrt{\mu_n}+2\right)}{4R^2} \right] \times \\ &\times \eta(\lambda_n)\left[1 + O(1/R)\right], \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\eta(\lambda_n)$ — некоторая величина, не зависящая от R и μ_n.

Доказательство. Согласно леммам 1 и 2, собственные значения λ_n и μ_n являются решениями уравнений (3.5) и (3.6) соответственно. Причем, как установлено в лемме 2, при $R \to \infty$ правая часть уравнения (3.6) стремится к нулю, поэтому его решения стремятся к решениям уравнения (3.5). Т.е. $\mu_n \to \lambda_n$ при $R \to \infty$.

Разлагая $M(\mu_n)$ в ряд Тейлора в окрестности λ_n, получаем

$$M(\mu_n) = M(\lambda_n) + M'(\lambda_n)(\mu_n - \lambda_n) + O\left[(\mu_n - \lambda_n)^2\right],$$

где $M(\lambda_n) = 0$, а $M'(\lambda_n) \neq 0$ в силу леммы 1. Поэтому

$$\mu_n - \lambda_n = \frac{M(\mu_n)}{M'(\lambda_n)} + O\left[(\mu_n - \lambda_n)^2\right],$$

где $M(\mu_n)$ имеет асимптотику (3.7) в силу леммы 2. Отсюда получаем искомое разложение (3.8). Теорема доказана.

4. УТОЧНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Изложим теперь метод уточнения собственных значений, основанный на экстраполяции по параметру R.

Теорема 2. *Пусть $\mu_n^{(1)}$ и $\mu_n^{(2)}$ — собственные значения задачи (1.1), (1.2), (2.1) на отрезках $[0, R_1]$ и $[0, R_2]$ соответственно ($R_2 > R_1$), являющиеся приближениями для собственного значения λ_n задачи (1.1), (1.2), (1.3), причем для*

этих R_1 и R_2 выполнены условия теоремы 1. Пусть, кроме того, определен параметр

$$\alpha = \frac{\dfrac{1}{\mu_n^{(2)}} e^{-2\sqrt{\mu_n^{(2)}}R_2} R_2^{-c/\sqrt{\mu_n^{(2)}}} \left[\left(q(R_2) - \dfrac{c}{R_2} \right) - \dfrac{c/\sqrt{\mu_n^{(2)}}\left(c/\sqrt{\mu_n^{(2)}}+2\right)}{4R_2^2} \right]}{\dfrac{1}{\mu_n^{(1)}} e^{-2\sqrt{\mu_n^{(1)}}R_1} R_1^{-c/\sqrt{\mu_n^{(1)}}} \left[\left(q(R_1) - \dfrac{c}{R_1} \right) - \dfrac{c/\sqrt{\mu_n^{(1)}}\left(c/\sqrt{\mu_n^{(1)}}+2\right)}{4R_1^2} \right]}. \tag{4.1}$$

причем $\alpha \neq 1$.[4]

Тогда линейная комбинация

$$\mu_n^* = \frac{\mu_n^{(2)} - \alpha\mu_n^{(1)}}{1 - \alpha} \tag{4.2}$$

приближает λ_n с погрешностью

$$|\mu_n^* - \lambda_n| = O\left(|\mu_n^{(2)} - \lambda_n|/R_1\right). \tag{4.3}$$

Доказательство. Перепишем формулу (4.2) в виде

$$\mu_n^* = \mu_n^{(2)} + \frac{\alpha}{1 - \alpha}\left(\mu_n^{(2)} - \mu_n^{(1)}\right). \tag{4.4}$$

Используя разложения (3.8) для собственных значений $\mu_n^{(1)}$ и $\mu_n^{(2)}$, с учетом формулы (4.1) получим:

$$\frac{\mu_n^{(2)} - \lambda_n}{\mu_n^{(1)} - \lambda_n} = \alpha \frac{1 + O(1/R_2)}{1 + O(1/R_1)} = \alpha\left[1 + O\left(\frac{1}{R_1}\right)\right].$$

Поэтому

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha}\left(\mu_n^{(2)} - \mu_n^{(1)}\right) = \left(\lambda_n - \mu_n^{(2)}\right)\left[1 + O\left(\frac{1}{R_1}\right)\right].$$

Подставляя полученное выражение в формулу (4.4), получим:

$$\mu_n^* - \lambda_n = \left(\mu_n^{(2)} - \lambda_n\right) O(1/R_1).$$

Отсюда немедленно следует оценка (4.3). Теорема доказана.

Таким образом, использование двух собственных значений, полученных при решении задачи (1.1), (1.2), (2.1) на различных отрезках, позволяет получить искомое собственное значение задачи (1.1), (1.2), (1.3) с погрешностью, существенно

[4] В том исключительном случае, когда $\alpha = 1$, нужно поменять R_1 или R_2.

меньшей, чем погрешности каждого из этих собственных значений по отдельности. Ниже будет показано, как можно продолжить процесс уточнения, что даст дальнейшее повышение точности.

Заметим, что требование на параметр α позволяет выбирать R_1 и R_2 достаточно близкими — полученная оценка (4.3) и в этом случае остается в силе.[5]

5. УТОЧНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Изложенный метод повышения точности определения собственных значений задачи (1.1), (1.2), (1.3) с незначительными изменениями применим также и для уточнения ее собственных функций. Важным при этом является вопрос о нормировке собственных функций. Будем считать собственные функции $u_n(x)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3) на полуоси и собственные функции $y_n(x)$ задачи (1.1), (1.2), (2.1) на отрезке $[0, R]$ нормированными следующими условиями:

$$\int\limits_0^\infty u_n^2(x)dx = 1, \tag{5.1}$$

$$\int\limits_0^R y_n^2(x)dx + y_n^2(R)e^{2\sqrt{\mu_n}R}R^{c/\sqrt{\mu_n}}\int\limits_R^\infty e^{-2\sqrt{\mu_n}x}x^{-c/\sqrt{\mu_n}}dx = 1. \tag{5.2}$$

Теорема о разложении, аналогичная теореме 1, для собственных функций формулируется при этом следующим образом.

Теорема 3. *Пусть R достаточно велико, так что существует собственная функция $y_n(x)$ задачи (1.1), (1.2), (2.1), соответствующая собственной функции $u_n(x)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3).*

Тогда для каждого $x \in [0, R]$ при $R \to \infty$ имеет место разложение

$$\begin{aligned} y_n(x) &= u_n(x) + \\ &+ \frac{1}{4\mu_n}e^{-2\sqrt{\mu_n}R}R^{-c/\sqrt{\mu_n}}\left[\left(q(R) - \frac{c}{R}\right) - \frac{c/\sqrt{\mu_n}\left(c/\sqrt{\mu_n}+2\right)}{4R^2}\right] \times \\ &\times v(x,\lambda_n)\left[1 + O(1/R)\right], \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $v(x, \lambda_n)$ — некоторая ограниченная на отрезке $[0, R]$ функция, не зависящая от R и μ_n.

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее краевому условию (1.2). Тогда для рассматриваемых собственных функций $y_n(x)$ и $u_n(x)$ имеем:

$$y_n(x) = y(x, \mu_n)/C(\mu_n), \quad u_n(x) = y(x, \lambda_n)/C(\lambda_n),$$

где

$$\begin{aligned} C^2(\mu_n) &= \int\limits_0^R y^2(x,\mu_n)dx + y^2(R,\mu_n)e^{2\sqrt{\mu_n}R}R^{c/\sqrt{\mu_n}}\int\limits_R^\infty e^{-2\sqrt{\mu_n}x}x^{-c/\sqrt{\mu_n}}dx, \\ C^2(\lambda_n) &= \int\limits_0^\infty y^2(x,\lambda_n)dx. \end{aligned}$$

Простым дифференцированием по R убеждаемся, что константа $C(\mu_n)$ не зависит от R в силу того, что $y(x, \mu_n)$ удовлетворяет краевому условию (2.1) в точке R. Кроме того, $C(\mu_n) \to C(\lambda_n)$ при $R \to \infty$. Рассматривая $y(x, \lambda)$ при каждом значении x как функцию параметра λ, запишем разложения Тейлора для $y(x, \mu_n)$ и $C(\mu_n)$ в окрестности λ_n:

$$\begin{aligned} y(x,\mu_n) &= y(x,\lambda_n) + \frac{\partial y}{\partial \lambda}(x,\lambda_n)(\mu_n - \lambda_n) + \ldots \\ C(\mu_n) &= C(\lambda_n) + C'(\lambda_n)(\mu_n - \lambda_n) + \ldots \end{aligned}$$

Опущенные слагаемые в этих разложениях имеют порядок $O\left[(\mu_n - \lambda_n)^2\right]$, причем $\mu_n \to \lambda_n$ при $R \to \infty$. Поэтому отсюда получаем

$$\begin{aligned} y_n(x) &= u_n(x) + \left(\frac{1}{C(\lambda_n)}\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x,\lambda_n) - u_n(x)\frac{C'(\lambda_n)}{C(\lambda_n)}\right)(\mu_n - \lambda_n) + \\ &+ O\left[(\mu_n - \lambda_n)^2\right]. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом установленного в теореме 1 разложения (3.8) для собственных значений получается разложение (5.3) для собственных функций. Теорема доказана.

Таким образом, собственные функции задачи (1.1), (1.2), (2.1) на отрезке $[0, R]$ будут тем ближе к соответствующим им собственным функциям исходной задачи (1.1), (1.2), (1.3), чем больше R. Будем понимать близость собственных функций в смысле их близости в равномерной норме.

Уточнение собственных функций путем экстраполяции по параметру R производится следующим образом. (Об уточнении по трем и более собственным функциям будет сказано ниже).

Теорема 4. *Пусть $y_n^{(1)}(x)$ и $y_n^{(2)}(x)$ — собственные функции задачи (1.1), (1.2), (2.1) на отрезках $[0, R_1]$ и $[0, R_2]$ соответственно ($R_2 > R_1$), являющиеся приближениями для собственной функции $u_n(x)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3), причем для этих R_1 и R_2 выполнены условия теоремы 3.*

Тогда линейная комбинация

$$y_n^*(x) = \frac{y_n^{(2)}(x) - \alpha y_n^{(1)}(x)}{1 - \alpha}, \quad x \in [0, R_1], \tag{5.4}$$

[5] Это справедливо и для соответствующих теорем в [1, 2], где они были доказаны при более жестких ограничениях на параметр α.

где параметр α определяется по формуле (4.1) (причем $\alpha \neq 1$), приближает $u_n(x)$ с погрешностью

$$\|y_n^* - u_n\| = O\left(\|y_n^{(2)} - u_n\|/R_1\right). \tag{5.5}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Заметим, что выбор условий нормировки собственных функций в виде (5.1) и (5.2) не является обязательным. Теоремы 3 и 4 остаются в силе и для других условий нормировки, удовлетворяющих следующим двум требованиям. Во-первых, условие нормировки для собственной функции $u_n(x)$ должно получаться из условия нормировки для собственной функции $y_n(x)$ предельным переходом при $R \to \infty$. Во-вторых, условие нормировки для собственной функции $y_n(x)$ не должно зависеть от R. Этим требованиям удовлетворяет, например, условие равенства собственных функций $y_n(x)$ и $u_n(x)$ в некоторой точке заранее выбранному числу, отличному от нуля.

6. О КРАЕВОМ УСЛОВИИ В ТОЧКЕ R

Иногда в точке R вместо условия (2.1) ставится краевое условие

$$y(R) = 0. \tag{6.1}$$

Задача (1.1), (1.2), (6.1) имеет положительные собственные значения $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$, собственная функция $y_n(x)$, отвечающая собственному значению μ_n, имеет в интервале $0 \leq x < R$ в точности n нулей.

Не составляет труда проверить, что при краевом условии (6.1) $\mu_n \to \lambda_n - 0$ при $R \to \infty$, причем имеет место разложение

$$\mu_n = \lambda_n + \mathrm{e}^{-2\sqrt{\mu_n}R} R^{-c/\sqrt{\mu_n}} \eta(\lambda_n)\,[1 + O\,(1/R)]$$

($\eta(\lambda_n)$ не зависит от R и μ_n), а для собственной функции $y_n(x)$, нормированной условием

$$\int_0^R y_n^2(x)dx = 1$$

(или каким-либо другим условием, удовлетворяющим отмеченным выше требованиям), при $R \to \infty$ справедливо разложение

$$y_n(x) = u_n(x) + \mathrm{e}^{-2\sqrt{\mu_n}R} R^{-c/\sqrt{\mu_n}} v(x, \lambda_n)\,[1 + O\,(1/R)]$$

($v(x, \lambda_n)$ не зависит от R и μ_n). Параметр α, используемый для уточнения собственных значений и собственных функций в теоремах 2 и 4, в случае краевого условия (6.1) необходимо вычислять по формуле

$$\alpha = \frac{\mathrm{e}^{-2\sqrt{\mu_n^{(2)}}R_2} R_2^{-c/\sqrt{\mu_n^{(2)}}}}{\mathrm{e}^{-2\sqrt{\mu_n^{(1)}}R_1} R_1^{-c/\sqrt{\mu_n^{(1)}}}},$$

при этом оценки (4.3) и (5.5) остаются в силе.

Отметим, что при использовании краевого условия (6.1) точность определения собственных значений и собственных функций будет ниже по сравнению со случаем, когда на том же отрезке решается задача с условием (2.1).

7. ПРОДОЛЖЕНИЕ ПРОЦЕССА УТОЧНЕНИЯ

Часто задачу (1.1), (1.2), (2.1) приходится решать более чем два раза. В этом случае процесс уточнения можно продолжить, что приводит к дальнейшему повышению точности определения собственных значений и собственных функций задачи (1.1), (1.2), (1.3). Прежде всего, доказанные выше теоремы, описывающие построение уточненных собственного значения и собственной функции, обобщаются аналогично тому, как это сделано в [2], следующим образом.

Теорема 5. *(Обобщение теорем 1 и 3). Пусть R достаточно велико, так что существуют собственное значение μ_n и собственная функция $y_n(x)$ задачи (1.1), (1.2), (2.1) на отрезке $[0, R]$ или уточненные собственное значение и собственная функция на этом отрезке, соответствующие собственному значению λ_n и собственной функции $u_n(x)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3).*

Тогда при $R \to \infty$ имеют место разложения:

$$\begin{aligned}
\mu_n \;=\;& \lambda_n + \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_n}R} R^{-c/(2\sqrt{\mu_n})} \left\{ y_n'(R) + \left(\sqrt{\mu_n} + \frac{c}{2\sqrt{\mu_n}R} - \right.\right. \\
&- \left.\left. \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \left[\left(q(R) - \frac{c}{R} \right) - \frac{c/\sqrt{\mu_n}\left(c/\sqrt{\mu_n} + 2\right)}{4R^2} \right] \right) y_n(R) \right\} \times \\
&\times\; \eta(\lambda_n)\,[1 + O\,(1/R)], \\
y_n(x) \;=\;& u_n(x) + \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \mathrm{e}^{-\sqrt{\mu_n}R} R^{-c/(2\sqrt{\mu_n})} \left\{ y_n'(R) + \left(\sqrt{\mu_n} + \frac{c}{2\sqrt{\mu_n}R} - \right.\right. \\
&- \left.\left. \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \left[\left(q(R) - \frac{c}{R} \right) - \frac{c/\sqrt{\mu_n}\left(c/\sqrt{\mu_n} + 2\right)}{4R^2} \right] \right) y_n(R) \right\} \times \\
&\times\; v(x, \lambda_n)\,[1 + O\,(1/R)],
\end{aligned}$$

где $x \in [0, R]$, а $\eta(\lambda_n)$ и $v(x, \lambda_n)$ не зависят от R и μ_n.

Доказательство. Исходя из уравнения (3.4) при $x = R$ и асимптотики (3.7), разложение для собственных значений получается аналогично тому, как это сделано в теореме 1. После этого аналогично теореме 3 получаем разложение для собственных функций. Теорема доказана.

Теорема 6. *(Обобщение теорем 2 и 4). Пусть $\mu_n^{(1)}$, $y_n^{(1)}$ и $\mu_n^{(2)}$, $y_n^{(2)}$ собственные значения и собственные функции задачи (1.1), (1.2), (2.1) на отрезках $[0, R_1]$ и $[0, R_2]$ соответственно ($R_2 > R_1$) или уточненные собственные значения и собственные функции на этих отрезках, являющиеся приближениями для собственного значения λ_n и собственной функции $u_n(x)$ задачи (1.1),* *(1.2), (1.3), причем для этих R_1 и R_2 выполнены условия теоремы 5. Пусть, кроме того, определен параметр*

$$\alpha = \frac{F\left(R_2, \mu_n^{(2)}, y_n^{(2)}\right)}{F\left(R_1, \mu_n^{(1)}, y_n^{(1)}\right)},$$

где

$$F(R,\mu,y) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{\mu}}e^{-\sqrt{\mu}R}R^{-c/(2\sqrt{\mu})}\left\{y'(R)+\left(\sqrt{\mu}+\frac{c}{2\sqrt{\mu}R}-\right.\right.$$
$$\left.\left. -\;\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left[\left(q(R)-\frac{c}{R}\right)-\frac{c/\sqrt{\mu}\left(c/\sqrt{\mu}+2\right)}{4R^2}\right]\right)y(R)\right\}.$$

Тогда линейные комбинации

$$\mu_n^* \;=\; \frac{\mu_n^{(2)}-\alpha\mu_n^{(1)}}{1-\alpha},$$
$$y_n^*(x) \;=\; \frac{y_n^{(2)}(x)-\alpha y_n^{(1)}(x)}{1-\alpha}, \quad x\in[0,R_1],$$

приближают λ_n и $u_n(x)$ соответственно с погрешностями

$$|\mu_n^*-\lambda_n| \;=\; O\left(|\mu_n^{(2)}-\lambda_n|/R_1\right),$$
$$||y_n^*-u_n|| \;=\; O\left(||y_n^{(2)}-u_n||/R_1\right).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Таким образом, если имеются два решения (два набора собственных значений и собственных функций) задачи (1.1), (1.2), (2.1) на различных отрезках, то можно построить их линейную комбинацию (уточненное решение — набор уточненных собственных значений и собственных функций), которая будет приближать искомое решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) с большей точностью, чем каждое из решений по отдельности. Теоремы 5 и 6 дают возможность проделать ту же процедуру с двумя уточненными решениями (получающимися, например, если имеются три решения задачи (1.1), (1.2), (2.1) на различных отрезках).

Пусть имеются m решений (m наборов собственных значений и собственных функций) задачи (1.1), (1.2), (2.1) на отрезках $[x_0, R_1], \ldots, [x_0, R_m]$ ($R_m > \ldots > R_1$). Уточненное решение (набор уточненных собственных значений и собственных функций) строится по этим m решениям следующим образом (аналогично описанному в [2] алгоритму). Сначала, используя попарно эти m решений, построим $(m-1)$ уточненное решение. Аналогично, используя попарно *это* $(m-1)$ решение, построим $(m-2)$ уточненных решения, и т.д. В результате $(m-1)$ шага получим один набор уточненных собственных значений и собственных функций. Вопрос о точности полученных таким образом собственных значений и собственных функций решает следующая

Теорема 7. *Пусть $\mu_n^{(1)}$ и $y_n^{(1)}(x)$, …, $\mu_n^{(m)}$ и $y_n^{(m)}(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи (1.1), (1.2), (2.1) на отрезках $[x_0, R_1], \ldots, [x_0, R_m]$ соответственно ($R_m > \ldots > R_1$), являющиеся приближениями для собственного значения λ_n и собственной функции $u_n(x)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3), причем для этих $R_1, \ldots, R_m$ выполнены условия теоремы 5. Пусть μ_n^* и $y_n^*(x)$ — уточненные собственное значение и собственная функция, построенные из них по описанной выше схеме, причем на каждом шаге уточнения выполнены условия теоремы 6.*

Тогда μ_n^* приближает λ_n, и $y_n^*(x)$ на отрезке $[x_0, R_1]$ приближает $u_n(x)$ с погрешностями

$$|\mu_n^*-\lambda_n| \;=\; O\left(|\mu_n^{(m)}-\lambda_n|/\prod_{k=1}^{m-1}R_k\right),$$
$$||y_n^*-u_n|| \;=\; O\left(||y_n^{(m)}-u_n||/\prod_{k=1}^{m-1}R_k\right).$$

Доказательство этой теоремы опирается на теоремы 5 и 6 и повторяет доказательство аналогичной ей теоремы в [2].

Следует отметить, что уточненные собственные функции, построенные по формуле (5.4) из двух собственных функций задачи (1.1), (1.2), (2.1), сразу *готовы* для последующего уточнения (т.е. их не нужно перенормировать). Как отмечалось в [2], описанный алгоритм позволяет получить *любую* наперед заданную точность. Там же, а также в [3] приведены примеры численной реализации этого алгоритма для краевой задачи на полуоси.

8. ПРИМЕР

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу:

$$u''-\left(\lambda-2/x+2/x^2\right)u=0, \quad u(0)=0, \quad u(\infty)=0, \tag{7.1}$$

собственные значения и собственные функции[6] которой известны:

$$\lambda_n \;=\; 1/(n+1)^2, \tag{7.2}$$
$$u_n(x) \;=\; \frac{4}{(n+1)^3}e^{-\frac{x}{n+1}}x^2\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left(\frac{2x}{n+1}\right)^k, \tag{7.3}$$
$$a_0 \;=\; \frac{1}{6}\sqrt{n(n+1)(n+2)},$$
$$a_k \;=\; a_{k-1}\frac{k-n}{k(k+3)}, \quad k=1,2,\ldots,n-1,$$
$$n \;=\; 1,2,\ldots$$

[6]Приводятся собственные функции, нормированные условием $\int\limits_0^\infty u_n^2(x)dx=1$.

Соответствующей ей задачей на отрезке $[0, R]$ будет следующая:

$$y'' - \left(\mu - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(R) + \left(\sqrt{\mu} - \frac{1}{\sqrt{\mu} R}\right) y(R) = 0. \tag{7.4}$$

Для численного определения собственных значений и собственных функций задачи (7.4) введем на отрезке $[0, R]$ равномерную сетку $\{x_k = k \cdot h, \quad k = 0, \dots, N\}$ с шагом $h = R/N$ и построим разностную схему второго порядка точности (см. [1]):

$$\begin{array}{rcrcrcl} & - & B_1 y_1 & + & y_2 & = & 0, \\ y_{k-1} & - & B_k y_k & + & y_{k+1} & = & 0, \quad k = 2, \dots, N-1, \\ & - & \beta y_{N-1} & + & y_N & = & 0, \end{array} \tag{7.5}$$

где

$$\begin{aligned} B_k &= 2 + h^2 \left(\mu - 2/x_k + 2/x_k^2\right), \quad k = 1, \dots, N-1, \\ \beta &= \left[1 + h\left(\sqrt{\mu} - 1/(\sqrt{\mu} R)\right) + h^2/2 \left(\mu - 2/R + 2/R^2\right)\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Собственные значения разностной задачи (7.5) вычисляются как корни характеристического уравнения

$$\det \begin{pmatrix} -B_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -B_2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -B_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -B_{N-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -B_{N-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Для однозначного определения собственных функций можно поставить, например, следующее условие нормировки:

$$y_1 = u_n(x_1) \neq 0,$$

где $u_n(x_1)$ — значение точной собственной функции (7.3) в точке $x_1 = h$.

Возьмем $h = 0.1$. Т.к. экстраполяция по R применяется к собственным значениям и собственным функциям задачи (7.4), необходимо получать их с возможно большей точностью. Поэтому с целью уменьшения погрешности разностной схемы применим экстраполяцию Ричардсона, решая разностную задачу (7.5) дважды с шагами h и $h/2$. Таким образом, будем получать собственные значения и собственные функции задачи (7.4) с погрешностью порядка h^4.

В табл. 1 приведены несколько первых точных собственных значений (7.2) исходной задачи (7.1), для каждого собственного значения приведена пара соответствующих ему собственных значений задачи (7.4) на отрезках $[0, R_1]$ и $[0, R_2]$, погрешности этих собственных значений, а также уточненное собственное значение, построенное по формуле (4.2), и его погрешность. Заметим, что с ростом

номера собственного значения необходимо увеличивать также и R, т.к. при фиксированном R точность определения n-го собственного значения падает с ростом n в соответствии с разложением (3.8). Поэтому для каждого n выбраны свои R_1 и R_2. Кроме того, с учетом замечания к теореме 2, $R_2 = R_1 + h$ (т.е. в разностной задаче (7.5) добавляется всего одна точка).

Таблица 1

n	λ_n	R	$\mu_n^{(R)}$	$\lvert\mu_n^{(R)} - \lambda_n\rvert$	μ_n^*	$\lvert\mu_n^* - \lambda_n\rvert$
1	0.2500000	10	0.2500000	0.0000000	0.2500000	0.0000000
		10.1	0.2500000	0.0000000		
2	0.1111111	25	0.1110705	0.0000406	0.1111097	0.0000014
		25.1	0.1110725	0.0000386		
3	0.0625000	45	0.0624866	0.0000134	0.0624992	0.0000008
		45.1	0.0624871	0.0000129		
4	0.0400000	70	0.0399949	0.0000051	0.0399996	0.0000004
		70.1	0.0399950	0.0000050		
5	0.0277778	95	0.0277715	0.0000063	0.0277770	0.0000008
		95.1	0.0277716	0.0000062		

В случае, когда используется краевое условие (6.1), очевидно, достаточно положить $\beta = 0$. В табл. 2 приведены аналогичные данные для этого случая.

Таблица 2

n	λ_n	R	$\mu_n^{(R)}$	$\lvert\mu_n^{(R)} - \lambda_n\rvert$	μ_n^*	$\lvert\mu_n^* - \lambda_n\rvert$
1	0.2500000	10	0.2377191	0.0122809	0.2465510	0.0034460
		10.1	0.2384503	0.0115497		
2	0.1111111	25	0.1098189	0.0012922	0.1108140	0.0002971
		25.1	0.1098676	0.0012435		
3	0.0625000	45	0.0622128	0.0002872	0.0624393	0.0000607
		45.1	0.0622207	0.0002793		
4	0.0400000	70	0.0399101	0.0000899	0.0399817	0.0000183
		70.1	0.0399120	0.0000880		
5	0.0277778	95	0.0276970	0.0000808	0.0277565	0.0000212
		95.1	0.0276983	0.0000794		

Сравнение табл. 1 и 2 показывает, что использование краевого условия (6.1) вместо (2.1) приводит к уменьшению точности собственных значений. Однако и в этом случае можно получить достаточно высокую точность, увеличив длину отрезка. Соответствующие данные приводятся в табл. 3.

Таблица 3

n	λ_n	R	$\mu_n^{(R)}$	$\lvert\mu_n^{(R)} - \lambda_n\rvert$	μ_n^*	$\lvert\mu_n^* - \lambda_n\rvert$
1	0.2500000	15	0.2495426	0.0004575	0.2499759	0.0000241
		15.1	0.2495739	0.0004261		
2	0.1111111	30	0.1109426	0.0001685	0.1110944	0.0000167
		30.1	0.1109497	0.0001614		
3	0.0625000	50	0.0624330	0.0000670	0.0624915	0.0000085
		50.1	0.0624350	0.0000650		
4	0.0400000	75	0.0399708	0.0000292	0.0399957	0.0000043
		75.1	0.0399714	0.0000286		
5	0.0277778	100	0.0277436	0.0000342	0.0277709	0.0000069
		100.1	0.0277442	0.0000336		

В табл. 4 приведены значения в некоторых точках одной из точных собственных функций (7.3), значения двух соответствующих ей собственных функций задачи (7.4) на различных отрезках, а также значения уточненной собственной функции, построенной по формуле (5.4). В последней строке таблицы приведены величины погрешностей получаемых собственных функций в равномерной норме.

Таблица 4

x	$u_2(x)$	$y_2^{(25)}(x)$	$y_2^{(25.1)}(x)$	$y_2^*(x)$
1	0.0722278	0.0722278	0.0722278	0.0722278
5	0.0951952	0.0951590	0.0951607	0.0951940
10	-0.2876809	-0.2876696	-0.2876701	-0.2876807
15	-0.2750755	-0.2747670	-0.2747818	-0.2750647
20	-0.1436782	-0.1428623	-0.1429014	-0.1436491
25	-0.0575456	-0.0556801	-0.0557695	-0.0574780
$\lVert y_n - u_n\rVert$		0.0018655	0.0017761	0.0000676

В табл. 5 приводятся аналогичные данные для случая, когда используется краевое условие (6.1). (В качестве условия нормировки ставится условие равенства получаемых собственных функций и точной собственной функции (7.3) в точке $x = 1$).

Таблица 5

x	$u_2(x)$	$y_2^{(30)}(x)$	$y_2^{(30.1)}(x)$	$y_2^*(x)$
1	0.0722278	0.0722278	0.0722278	0.0722278
5	0.0951952	0.0950445	0.0950509	0.0951804
10	-0.2876809	-0.2876330	-0.2876351	-0.2876766
15	-0.2750755	-0.2737937	-0.2738478	-0.2749485
20	-0.1436782	-0.1402944	-0.1404368	-0.1433376
25	-0.0575456	-0.0498219	-0.0501463	-0.0567534
30	-0.0197701	-0.0000000	-0.0008285	-0.0177033
$\lVert y_n - u_n\rVert$		0.0197701	0.0189415	0.0020668

Приведенные таблицы наглядно показывают эффективность предложенного метода для повышения точности собственных значений и собственных функций. Отметим, что для достижения той же точности при однократном решении данной задачи требуется увеличить длину отрезка интегрирования примерно на 30%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный в [1 - 3] метод экстраполяции по длине отрезка интегрирования успешно перенесен на задачу о собственных значениях и собственных функциях для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на полуоси. При замене этой задачи задачей на конечном отрезке (что, как правило, делается при численном решении) полученные собственные значения и собственные функции приближают искомые собственные значения и собственные функции с некоторой погрешностью. В работе получена асимптотика этой погрешности при устремлении длины отрезка интегрирования к бесконечности. С использованием этой асимптотики построены формулы для уточнения собственных значений и собственных функций. Уточненное собственное значение (собственная функция) вычисляется по двум собственным значениям (собственным функциям) задач на различных отрезках. Оценки погрешностей уточненных собственного значения и собственной функции дают основание ожидать существенного повышения их точности. В рассмотренной модельной задаче удалось добиться повышения точности на порядок без существенного увеличения длины отрезка интегрирования, что является прекрасной иллюстрацией эффективности предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жидков Е.П., Соловьев А.Г.* Уточнение приближенных решений краевой задачи на полупрямой. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 11. С. 1340 - 1344.
   Жидков Е.П., Соловьев А.Г. Уточнение приближенных решений краевой задачи на полупрямой. Дубна: ОИЯИ. 1996. Р11-96-480.
2. *Жидков Е.П., Соловьев А.Г.* Алгоритм численного решения краевой задачи на полупрямой. // Труды Первой открытой научной конференции молодых ученых и специалистов ОИЯИ. Дубна: ОИЯИ, 1997. С. 237 - 241.
   Жидков Е.П., Соловьев А.Г. Алгоритм численного решения краевой задачи на полупрямой. Дубна: ОИЯИ, 1997. Р11-97-62.
3. *Жидков Е.П., Соловьев А.Г.* Повышение точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой. // Proceedings of the 9th International Conference "Computational Modeling and Computing in Physics". Дубна: ОИЯИ, 1997. С. 321 - 326.
   Жидков Е.П., Соловьев А.Г. Повышение точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой. Дубна: ОИЯИ. 1996. Р11-96-153.
4. *Абрамов А.А., Асланян А.А., Балла К.* Сравнение решений прогоночных уравнений при переносе граничных условий из бесконечности для гамильтоновых линейных систем. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 12. С. 1808 - 1818.

5. *Абрамов А.А., Балла К.* О приближенных решениях, основанных на теоремах сравнения, скалярных и матричных уравнений Риккати на бесконечном интервале. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 1. С. 35 - 51.
6. *Биргер Е.С.* Об оценке погрешности замены условия ограниченности решения линейного дифференциального уравнения на бесконечном интервале. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 3. С. 674 - 678.
7. *Абрамов А.А., Диткин В.В., Конюхова Н.Б., Парийский Б.С., Ульянова В.И.* Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1980. Т. 20. № 5. С. 1155 - 1173.
8. *Конюхова Н.Б., Маслович С.Е., Староверова И.Б.* О вычислении быстроосциллирующих собственных функций непрерывного спектра и несобственных интегралов от них. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 3. С. 360 - 379.
9. *Конюхова Н.Б., Староверова И.Б.* Модификация фазового метода решения сингулярных самосопряженных задач Штурма - Лиувилля. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1183 - 1200.
10. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
11. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения, Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
12. *Титчмарш Э.Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, Т. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
13. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
14. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Т. 1. М.: Наука, 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 марта 1998 года.