



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

98-262

P11-98-262

Т.П.Топурия, М.Д.Шафранов

МЕТОД ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ
И ПРИМЕРЫ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ
В ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКЕ

Направлено в журнал «ОРТИК»

1998

В работах [1,2] дано обоснование нового итерационного алгебраического метода (ИАМ) решения граничных задач электростатики систем, удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$. Настоящая работа посвящена его дальнейшему совершенствованию и рассмотрению конкретных случаев применения данного метода. Использование при расчетах в качестве вспомогательных только линейных или точечных зарядов позволяет в некоторых случаях упростить решение краевых задач электростатики, существенно сократить время компьютерных расчетов. В этом случае краевая задача сводится к решению системы обычных линейных уравнений, поэтому предлагаемый метод целесообразно назвать *методом линейных уравнений* (МЛУ).

В качестве примера использования метода линейных уравнений рассмотрим решение двух задач электронной оптики. Во всех приведенных ниже уравнениях мы будем пользоваться системой Гаусса. Так, потенциал, создаваемый точечным зарядом в этой системе, определяется соотношением $U=q/r$. В системе СИ потенциал точечного заряда определяется выражением $U = q / 4\pi\epsilon_0 r$.

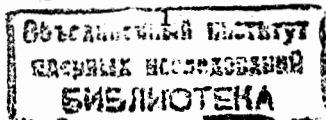
1. Электростатическая линза

1.1 МЛУ и его применение к решению задачи

Рассмотрим электростатическую линзу, образованную двумя трубчатыми электродами длиной L . Зазор между этими электродами s равен $0,1D$, где D – внутренний диаметр электрода. Electroды находятся под равными по абсолютной величине потенциалами U_0 и $-U_0$.

В соответствии с принятой методикой решения задачи воспользуемся изображениями вспомогательных точечных зарядов, создающих заданный потенциал в контрольных точках на внутренней поверхности электродов. Расстояние d между зарядом и соответствующей ему контрольной точкой поверхности должно удовлетворять соотношению $d \in (a, 1,5a)$, где a – расстояние между зарядами вдоль образующей цилиндра. Такое соотношение между a и d является оптимальным [2].

Схема размещения зарядов и контрольных точек в сечении плоскостью Z приведена на левой части рис.1. Изображения вспомогательных зарядов и



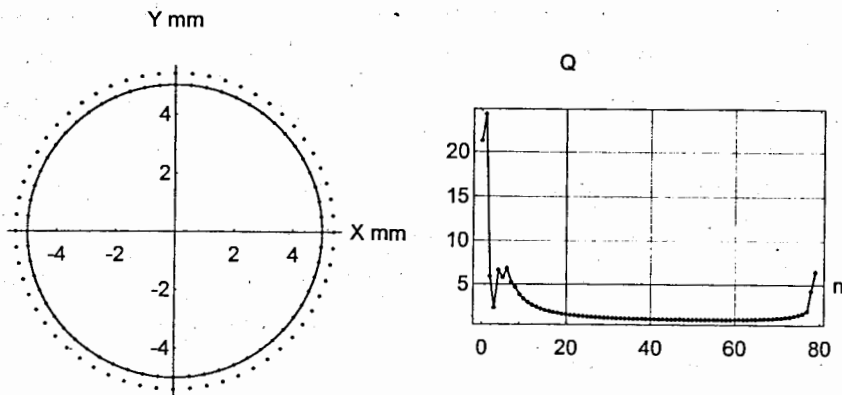


Рис. 1. Схема размещения контрольных точек по окружности, образованной сечением внутренней поверхности трубчатого электрода линзы Z плоскостью, а также вспомогательных зарядов, создающих в контрольных точках заданный потенциал (левый рис.).

Зарядовое распределение в контрольных точках вдоль внутренней образующей трубчатого электрода (правый рис.)

контрольные точки размещены в плоскости сечения, располагаемой нормально к оси линзы Z . Заряды расположены равномерно по окружности радиуса R_q , а контрольные точки - по внутренней окружности радиуса $R=D/2$. Каждый точечный заряд и соответствующая ему контрольная точка находятся на одном радиусе. Число зарядов на каждой окружности равно k . Из условий аксиальной симметрии системы и симметрии относительно плоскости $Z=0$ можно ограничиться контрольными точками только одного цилиндра линзы, лежащими вдоль одной образующей. Число контрольных точек на образующей равно n . В силу осевой симметрии все заряды, находящиеся на одной окружности, равны между собой. Таким образом, необходимое для решения число уравнений, в которых неизвестными являются n величин зарядов $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, также равно n . В соответствии с принципом суперпозиции потенциал в каждой контрольной точке определяется суммой потенциалов от каждого вспомогательного заряда, а потенциалы в каждой контрольной точке должны удовлетворять граничному условию, т.е. быть равными U_0 . Тогда уравнение для i -ой контрольной точки запишется в следующей форме:

$$\left[\left(\sum_{m=1}^k \frac{q_1}{r_{1,m}^{(i)}} \right) - \left(\sum_{m=1}^k \frac{q_1}{R_{1,m}^{(i)}} \right) \right] + \left[\left(\sum_{m=1}^k \frac{q_2}{r_{2,m}^{(i)}} \right) - \left(\sum_{m=1}^k \frac{q_2}{R_{2,m}^{(i)}} \right) \right] + \dots + \left[\left(\sum_{m=1}^k \frac{q_n}{r_{n,m}^{(i)}} \right) - \left(\sum_{m=1}^k \frac{q_n}{R_{n,m}^{(i)}} \right) \right] = U_0. \quad (1)$$

В этом уравнении $r_{l,m}^{(i)}$ - расстояние между зарядом с номером l , находящемся в точке с номером m на окружности с тем же номером, что и номер заряда, и i -ой контрольной точкой на цилиндре с положительным потенциалом. А $R_{l,m}^{(i)}$ - расстояние до той же контрольной точки от заряда, симметрично расположенного на цилиндре с отрицательным потенциалом.

Поскольку мы имеем n уравнений с n неизвестными, эта система линейных уравнений имеет единственное решение. Система решается, например, с помощью метода вращений [3]. Как это следует из приведенного уравнения, предложенный метод можно применить к системе электродов, имеющих равные по абсолютной величине потенциалы. В рассматриваемом случае мы имеем два электрода, поэтому в квадратных скобках выражения (1) находятся два члена со знаками, соответствующими знакам потенциала. В случае большего числа электродов в выражения, стоящие в квадратных скобках, необходимо добавить дополнительные члены. Их знаки определяются знаками потенциала. В этом случае общее число членов и неизвестных в уравнении (1) увеличится на число вспомогательных зарядов на этих электродах. Случай для электродов с разными по величине потенциалами рассмотрен в [2]. В настоящей работе он используется в задаче о дефлекторе.

Рассмотрим конкретный пример решения красной задачи электростатики применительно к двухэлектродной электростатической линзе, для которой $L=30$ мм, $D=10$ мм, $s=0,1D$. При решении использовалась система 80 уравнений для 80 неизвестных точечных зарядов.

Потенциал во всех 80 контрольных точках вдоль образующей цилиндра в относительных единицах $U_0 = 1$, за исключением только одной, где он равен 0,999999 (рис.7). На первом же рисунке показано распределение величин 80 вспомогательных точечных зарядов. Нерегулярности и большая величина зарядов в начале распределения обязаны соответствующим зарядам противоположного

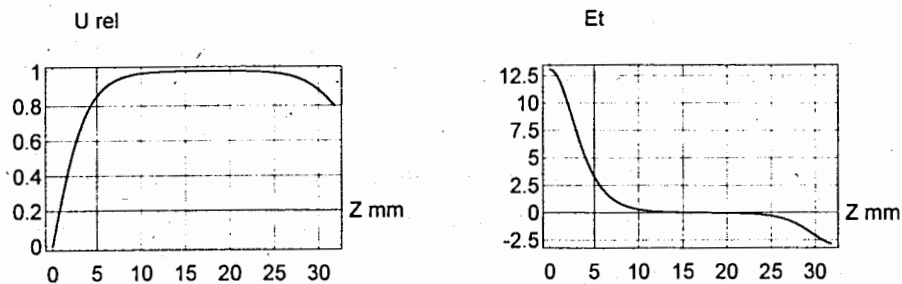


Рис. 2. Потенциальное распределение в относительных единицах вдоль оси электрода линзы. Потенциал внутренней поверхности электрода U_{rel} принят за единицу (левый рис.).

Распределение полного значения электрического поля Et вдоль оси электрода в В/см при потенциале электрода, равном 5 В (правый рис.)

знака второго цилиндра. Увеличение зарядов в конце распределения, необходимое для обеспечения эквипотенциальности поверхности линзы, связано с отсутствием зарядов вне цилиндра линзы. Увеличение величин зарядов приводит к росту электрических полей на конечных участках электродов (рис. 2). Эти краевые эффекты всегда проявляются на границах электродов. На этом рисунке приведено и потенциальное распределение вдоль оси электрода с положительным значением потенциала. На рис.3 показаны эквипотенциалы вблизи зазора между электродами

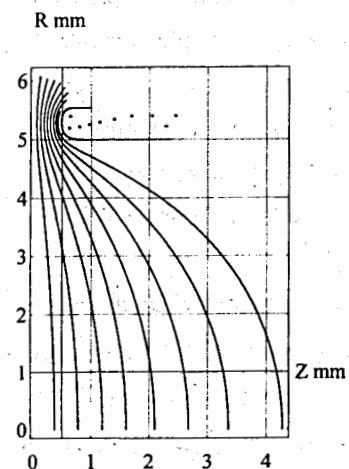


Рис. 3. Эквипотенциалы одного из электродов вблизи зазора. Они соответствуют потенциалам в относительных единицах от 0,1 до 0,8 с интервалом в 0,1. Сплошной линией сверху показана часть электрода в сечении. Точками обозначены изображения вспомогательных зарядов, которые размещены внутри электрода

линзы. Они соответствуют диапазону потенциалов в относительных единицах от 0,1 до 0,8 включительно, с шагом 0,1. Потенциал внутренней поверхности электрода равен единице. На этом же рисунке точками показаны изображения нескольких вспомогательных зарядов начального участка электрода.

По теореме Гаусса на поверхности проводника индукция $D = \epsilon E = 4\pi\sigma$, где σ - поверхностная плотность зарядов, следовательно $\sigma = \epsilon E / 4\pi$. Таким образом, мы можем получить распределение поверхностной плотности зарядов на внутренней

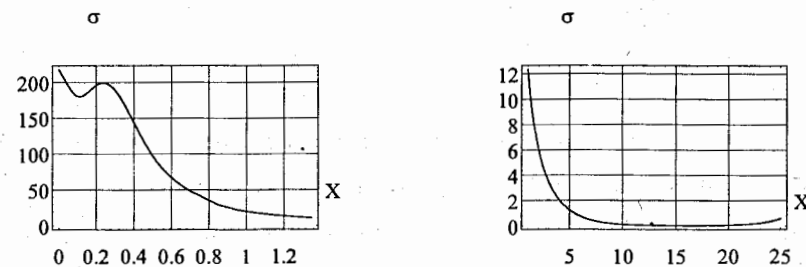


Рис. 4. Поверхностная плотность зарядов в произвольных единицах вдоль начального участка образующей (слева), а также в районе изменения направления электрического поля (справа). По оси X отложено расстояние от начала кривой вдоль поверхности электрода

поверхности электрода, включая и участок в области зазора. Распределение поверхностной плотности зарядов в произвольных единицах показано на рис. 4. Локальный минимум в начале распределения связан с небольшим плоским участком электрода в зазоре (рис. 3).

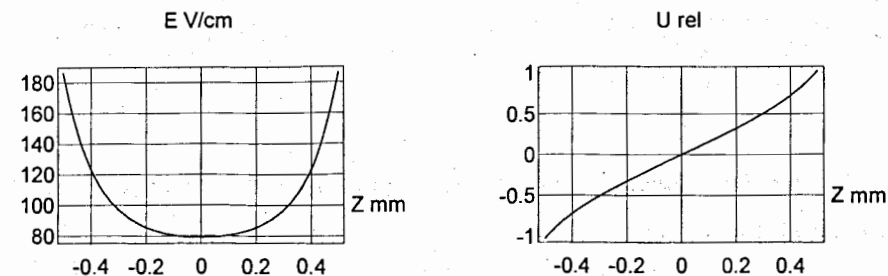


Рис. 5. Распределение электрического поля в зазоре между проводящими частями трубчатых электродов линзы (слева).

Потенциальное распределение в этом же зазоре (справа). Оно практически линейно.

Распределение электрического поля в зазоре линзы при потенциале электродов, равном ± 5 В, показано на рис. 5. В работах [4,5] для нахождения решения электростатической задачи электронной оптики *методом конечных элементов* (МКЭ) было необходимо предположить линейную зависимость потенциала в зазоре. На рис. 5 (справа) показано истинное распределение потенциала в зазоре, оно действительно близко к линейному. Отклонение от линейной зависимости наблюдается вблизи электродов. Оно останется и при уменьшении величины зазора.

Форма конечной торцевой части электрода и размещение вспомогательных зарядов приведены на рис. 6. Эквипотенциаль проведена через точки, лежащие на кривой. Поскольку представляемая работа является иллюстрацией обоснования метода, все изображения вспомогательных зарядов для простоты размещались в один слой на одной цилиндрической поверхности. Исключение составляет начальный участок электрода в районе зазора (рис. 3).

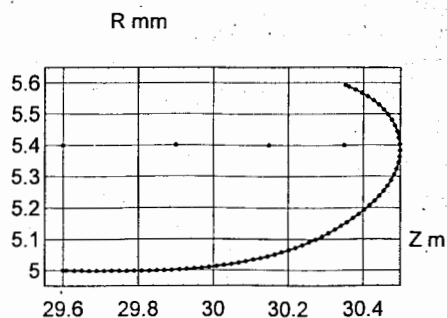


Рис. 6. Форма конечной части электрода в сечении при принятом однослойном распределении вспомогательных зарядов. Их расположение отмечено точками. Эквипотенциаль проведена через расчетные точки

1.2. Сравнение метода линейных уравнений с итерационно-алгебраическим методом

На рис.7 показаны потенциальные распределения в контрольных точках электрода. Слева показано распределение, полученное методом линейных уравнений (МЛУ). Расчет выполнен с использованием одинарной точности.

Распределение, полученное итерационно-алгебраическим методом (ИАМ) после 100 итераций, приведено на правой части рисунка. Эти распределения не дают, по существу, ответа на вопрос о различиях методов и их точностях. Нерегулярности в начале распределения при решении задачи итерационным методом естественным образом связаны с краевыми эффектами, о причине которых говорилось выше. Ранее было показано [2], что небольшая коррекция положения соответствующих зарядов сводит нерегулярности к минимуму.

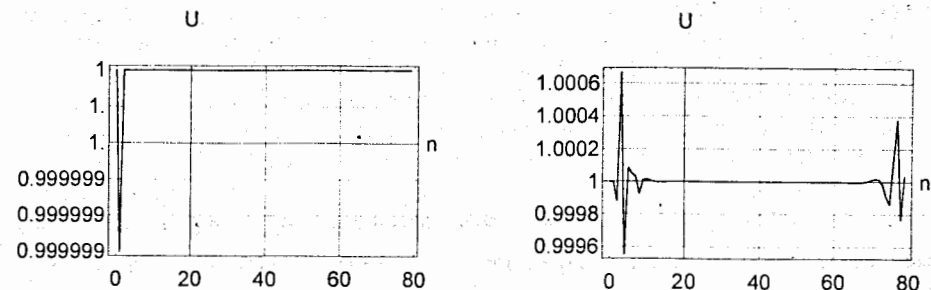


Рис. 7. Потенциальные распределения в относительных единицах, полученные двумя методами. Правое - методом линейных уравнений, левое - итерационным алгебраическим методом

О том, в чем действительно отличаются методы, необходимо судить не по потенциальным распределениям, а по характеру распределений электрических полей и потенциалов в рабочем объеме линзы, т.е. внутри ее объема. На рис.8 показаны части потенциальных распределений вдоль оси электрода линзы, представленных полностью на рис. 2 (нижние кривые), а также распределения, полученные ИАМ, верхняя кривая слева и точки справа. Наибольшая разница в относительных единицах составляет $\sim 0,000004$ (левый рисунок), что напрямую связано с характером потенциального распределения. Для области, в которой происходит изменение направления электрического поля (рис.2), эта разница не превышает $0,000003$. Увеличение или уменьшение числа итераций вдвое, как это показали расчеты, не приводит к существенному изменению указанных величин разностей. В распределениях электрических полей различие составляет менее чем $0,000001$, что вполне объяснимо. Электрическое поле, создаваемое точечным зарядом, в системе Гаусса определяется зависимостью $E=q/r^2$. Следовательно,

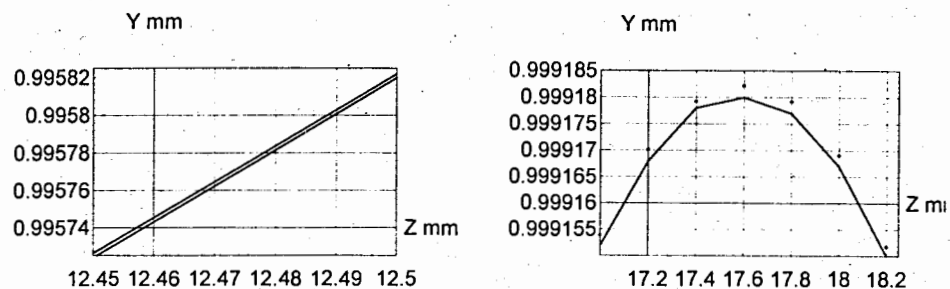


Рис. 8. Части потенциальных распределений, показанных на рисунке 2. Верхняя линия левого рисунка – распределение, полученное итерационным методом (АИМ), нижняя – расчет методом линейных уравнений (МЛУ).

Правый рисунок относится к области изменения знака электрического поля вдоль оси электрода. Точками отмечены значения потенциала, полученные АИМ. Линия – потенциальное распределение, полученное МЛУ

действие зарядов, которые создают еще заметную разность в потенциальных распределениях, ослабевает быстрее для электрических полей при одинаковых расстояниях от точечного заряда до точки, в которой произведены вычисления значений потенциалов и полей. Поэтому разница в величинах электрических полей пренебрежимо мала. О влиянии дискретности расположения вспомогательных зарядов можно судить на основании рис. 9, на котором слева показана часть эквипотенциали. Для реального случая она должна проходить

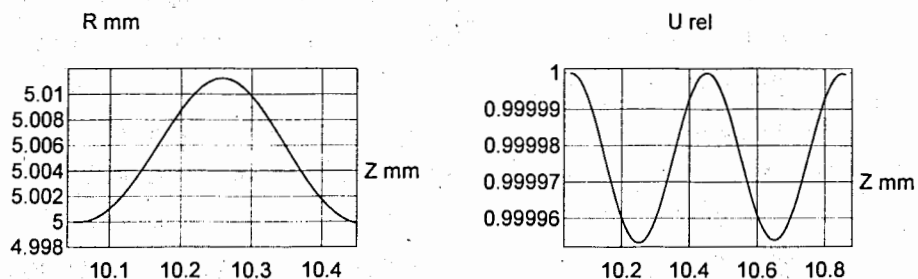


Рис. 9. Демонстрация влияния дискретного распределения вспомогательных зарядов: слева показана часть эквипотенциали, проходящей через контрольные точки. Вместо прямой – сечения реальной поверхности электрода, проходящей через контрольные точки, эквипотенциаль представляет собой волнообразную кривую. Максимальная разница составляет 0,01 мм.

Потенциальное распределение на этом же участке в относительных единицах вдоль поверхности электрода (справа)

вдоль прямой $R=5$ мм. Отклонение расчетного значения математической модели от значения для физической модели составляет 0,01 мм. Распределение потенциала вдоль поверхности электрода при $R=5$ мм показано на этом рисунке справа. Среднее отклонение от значения $u=1$ составляет $\sim 0,00003$.

В свете этого регламентируемая точность решения краевых задач, приводимая в работах ряда авторов, вызывает некоторое сомнение. Например, в [5] для электростатической линзы она составляет 10^{-7} . Скорее всего, это точность вычисления при тех или иных способах подхода к решению численными методами граничных задач для математических моделей реальных физических

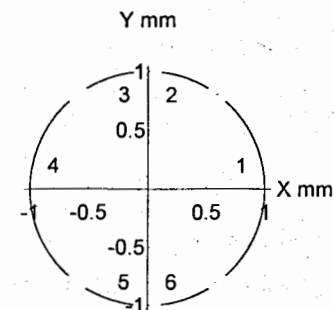


Рис. 10. Сечение дефлектора. Электроды 1, 2 и 6 находятся под положительным потенциалом. Потенциалы электродов 3, 4 и 5 отрицательны.

Абсолютное значение потенциала 1 и 4 электродов равно V_0 . Потенциалы 2, 3, 5 и 6 электродов по модулю равны $(\sqrt{2}-1)V_0$

объектов. В данном случае речь идет об использовании в численном моделировании расчетов с одинарной или двойной точностью.

2. Электростатический дефлектор

Физической моделью для математического моделирования и решения краевой задачи служил электростатический диполь [4-6], применяемый в качестве отклоняющего дефлектора. Задача в нашем случае решается методом алгебраических уравнений с использованием вспомогательных линейных зарядов. В [6] указаны геометрические размеры и численные значения потенциалов. В этом случае можно сравнить результаты наших расчетов с данными, приведенными в [6]. Поэтому дефлектор работы [6] послужил моделью для нашей задачи. Его схема в сечении плоскостью, нормальном к оси, показана на рис.10. Электроды

дефлектора 1 и 4 находятся под потенциалом соответственно V_0 и $-V_0$. Потенциалы электродов в части, где $x > 0$ (2-й и 6-й электроды), положительны и каждый из них равен $(\sqrt{2}-1)V_0$.

Потенциалы 3-го и 5-го электрода также равны между собой. Их величина равна $-(\sqrt{2}-1)V_0$. Для решения задачи использовалась система уравнений, подобная системе, применяемой в решении задачи для линзы с точечными зарядами. В математической модели линейная плотность зарядов σ предполагалась постоянной вдоль конечного по длине линейного заряда. Это предположение далеко от реального случая. Пример решения носит только демонстрационный характер, поясняющий сам принцип решения подобных задач, поэтому такое предположение в данном случае вполне допустимо. Для этого в уравнениях (1) вместо выражения потенциала для точечного заряда вида $U=q/r$ необходимо использовать следующее выражение для потенциала: $U=2\sigma(\ln(L+\sqrt{r^2+L^2})/r)$. Это выражение описывает зависимость потенциала, создаваемого линейным зарядом с постоянной линейной плотностью в точках, лежащих на плоскости, проходящей через середину линейного заряда. Здесь $2L$ — длина этого заряда, r — расстояние между средней точкой линейного заряда и контрольной точкой. Реально в расчетах принималось, как и в [6], $2L=10$ мм. Система уравнений в соответствии с выражением для потенциала решалась только в медианном сечении дефлектора. Число линейных зарядов для каждого 2,3,5 и 6 электрода бралось равным 27. Для 1 и 4 электродов число линейных зарядов бралось по 108. Из условий симметрии в контрольных точках использовался только 81 (27+54) линейный заряд одной четверти. Различие в значениях потенциалов между соседними электродами V_0 и $(\sqrt{2}-1)V_0$ требует составления 162 уравнений с 162 неизвестными. Это приводит к необходимости четырехкратного увеличения объема памяти для системы с 162 неизвестными по сравнению с объемом памяти для системы из 81 уравнения, необходимым для решения. Соответственно увеличится и время выполнения численного решения задачи.

Применение принципа суперпозиции к решению задач системы с разными по абсолютной величине потенциалами, изложенного в [2], позволяет ограничиться решением двух систем из 81 уравнения с 81 неизвестным (двукратное увеличение объема памяти). Искомые потенциалы элементов дефлектора можно рассматривать как образуемые двумя наборами зарядов. Каждый из наборов зарядов создает на электродах дефлектора свою систему потенциалов, равных по абсолютной величине. Пусть первый набор зарядов образует потенциал $u_1=\alpha V_0$, а второй набор создает потенциал $u_2=\beta V_0$.

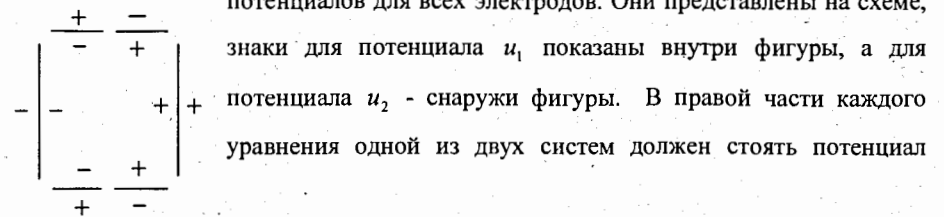
Составим систему двух уравнений для первого и второго электрода:

$$\alpha V_0 + \beta V_0 = V_0 \quad \text{и} \quad \alpha V_0 - \beta V_0 = (\sqrt{2}-1)V_0. \quad (2)$$

Решение этой системы дает $\alpha = \sqrt{2}/2$ и $\beta = 1 - \sqrt{2}/2$, следовательно потенциалы

$$u_1 = \sqrt{2}V_0/2 \quad \text{и} \quad u_2 = (1 - \sqrt{2}/2)V_0.$$

Легко убедиться, что, применяя подобный подход, можно найти знаки потенциалов для всех электродов. Они представлены на схеме,



$u_1 = \sqrt{2}V_0/2$ и во второй системе уравнений — потенциал $u_2 = (1 - \sqrt{2}/2)V_0$. V_0 — задаваемое по условию задачи численное значение потенциала.

Некоторые результаты расчетов после решения краевой задачи показаны на рисунках 11 и 12. На рис.11 показана часть поверхности дефлектора, а также 9 эквипотенциалей, соответствующих потенциалам в долях Вольта, в интервале от 0,1 до 0,9 В. Последняя правая потенциал вблизи электродов соответствует потенциалу 0,95 В при напряжении дефлектора $V_0=1$ В. Рис. 12 (слева) представляет эквипотенциали в плоскости $Y=0$. Они соответствуют потенциалам от -5 В до 5 В с интервалом в 1 В. Правый рисунок представляет зависимость составляющей E_x вдоль оси X и оси Y . В принятых предположениях о постоянстве линейной плотности зарядов наблюдается достаточно хорошее

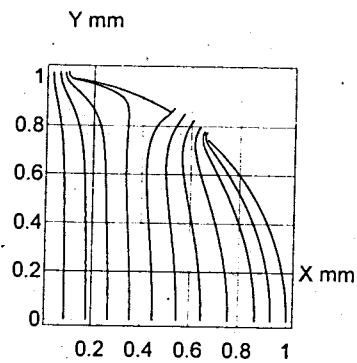


Рис. 11. Часть медианного сечения дефлектора. Линии эквипотенциалей соответствуют значениям потенциала от 0,1 до 0,9 В. Последняя правая эквипотенциаль рисунка соответствует потенциалу 0,95 В. Значение потенциала дефлектора $V_0 = 1$ В

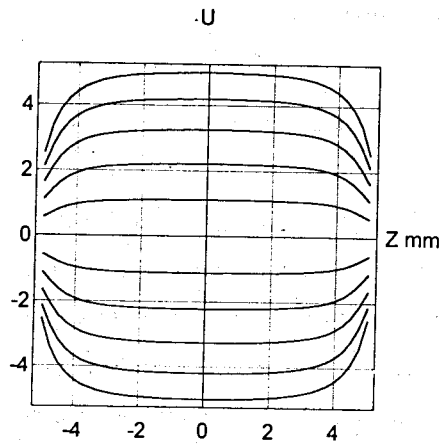
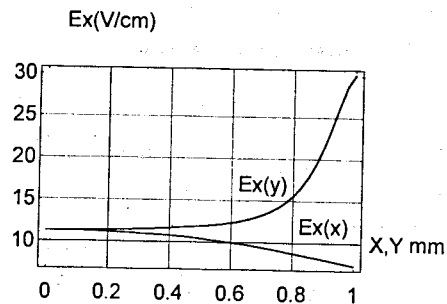


Рис. 12. Эквипотенциальные кривые в $x - z$ плоскости электростатического дефлектора. Потенциал дефлектора $V_0 = 5$ В. Кривые соответствуют значениям потенциалов с шагом 1 В (слева).

Зависимость отклоняющего компонента электрического поля дефлектора E_x вдоль осей x и y (справа)



количественное согласие с подобным распределением, приведенным в цитируемой выше работе [6]. Время численного решения системы уравнений (1) с применением персонального компьютера РС 486 (66 МГц) составляет около 25 с.

3. Выводы

Для решения задач электростатики электронно-оптических систем разработаны и широко применяются два типа методов численного решения задач. Подробное описание методов решения задач электронной оптики дано в монографии [7].

К первому типу относятся метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Их применение связано с использованием некоторого функционала:

$$J_m = \iint_S \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[\left(\frac{d\Phi_m}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\Phi_m}{dz} \right)^2 + \left(\frac{m\Phi_m}{r} \right)^2 \right] \pi r dr dz, \quad (3)$$

выражающего энергию, запасенную электростатической системой [4,5].

Ко второму типу методов решения относится метод зарядовой плотности, или метод интегральных уравнений (МИУ). Само название метода отражает и способы решения задач электронной оптики. Они, как правило, связаны с решением задачи Дирихле методом интегральных уравнений типа Фредгольма:

$$\int_S K(r, r') Y(r') d^2 r' = U(r) \quad (r \in S). \quad (4)$$

В этом уравнении $U(r)$ – заданное значение потенциала, $Y(r)$ – неизвестная искомая функция, а $K(r, r')$ является ядром этого уравнения. МИУ применялся и для решения задачи в [6]. Предложенный метод алгебраических уравнений по сравнению с широко применяемыми методами МКР, МКЭ и МИУ очень выгодно от них отличается. Метод прост в программировании, его применение не требует использования сложных методов математической физики. Он доступен не только высококвалифицированным специалистам, посвятившим не одно десятилетие на создание и развитие стандартных методов решения краевых задач электростатики, но и широкому кругу начинающих исследователей.

Литература

- [1] М.Д. Шафранов, Метод решения основной задачи электростатики для многопроволочных пропорциональных и дрейфовых камер. Сообщение ОИЯИ, P13-96-355, Дубна, 1996.
- [2] М.Д. Шафранов, Алгебраический вариационно-итерационный метод решения краевых задач электростатики произвольных систем, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Сообщение ОИЯИ, P11-98-103, Дубна, 1998.

[3]. G.A. Korn, T.M. Korn, Mathematical Handbook for scientist and engineers. Second, enlarged and revised edition. Mc Crow-Hill, 1968. Ch 20.3-5

Г.А. Корн, Т.М.Корн, Справочник по математике для научных сотрудников и инженеров. Ф.М., Наука. М. 1974. Гл. 20.3-5

[4] E.Munro and H.C.Chu, Optik, 61,1, p 1-17,1982.

[5] B. Lencova, Nucl. Instr. and Meth. A 363 (1995) 190.

[6] Zhixiong Liu and Jiye Ximen, Nucl. Instr. and Meth. A 363 (1995) 225.

[7] P.W. Hawkes and E. Kasper, Principles of Electron Optics, Vols 1 and 2 Academic Press, London, 1989. П. Хокс и Э. Каспер, Основы электронной оптики, Мир, 1993.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1998 года.

Метод линейных уравнений для решения краевых задач электростатики и примеры его применения в электронной оптике

Разработан новый подход к решению краевых задач электростатики систем, удовлетворяющих уравнению Лапласа $\Delta \varphi = 0$. Он основан на решении краевой задачи методом линейных алгебраических уравнений, чем выгодно отличается от широко применяемых методов решения задач электронной оптики, таких как метод конечных элементов, метод конечных разностей и метод интегральных уравнений.

Искомые потенциалы (краевые условия), электрические поля, необходимые потенциальные распределения получаются линейной суперпозицией потенциалов и полей, создаваемых зарядами одного типа, например точечными.

В качестве примера рассмотрено применение метода линейных уравнений (МЛУ) к решению двух краевых задач электронной оптики.

Работа выполнена в Лаборатории сверхвысоких энергий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1998

Перевод авторов

The Linear Equations Method to Solve Boundary Problems of Electrostatics and Examples of Its Application to Electron Optics

A new algorithm to solve boundary problems of electrostatic systems satisfying the Laplace equation $\Delta \varphi = 0$ is developed. The algorithm is based on the linear equations method. And this is the advantage in comparison with the methods of electron optics which are widely used: the finite-element method, the finite-difference method, and the integral-equation method.

The required potentials (boundary conditions), electric fields, and so on, are obtained by linear superposition of potentials and electrical fields created by the system of point charges.

For example, the application of the linear equations method to solve two boundary problems of electron optics is considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Particle Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1998