



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

98-103

P11-98-103

М.Д.Шафранов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ  
ВАРИАЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД  
РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ  
ПРОИЗВОЛЬНЫХ СИСТЕМ,  
УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УРАВНЕНИЮ ЛАПЛАСА

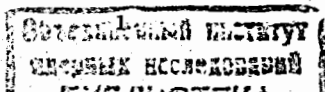
1998

## 1. Введение

Конечная цель решения основной задачи электростатики - определение потенциала  $\varphi(r)$  и электрического поля  $E(r)$  в пространстве. Найденное решение  $\varphi(r)$  должно принимать заранее задаваемое значение во всех точках на каждой из поверхностей проводников. По сути дела решается граничная, или краевая задача, в которой значение функции определено на заданных границах. Нахождение потенциалов и электрических полей при заданном распределении электрических зарядов в пространстве легко решается только в простейших случаях, когда положения всех зарядов фиксированы. Решение задач электростатики в таком случае сводится к применению закона Кулона и нескольким интегрированиям. Но для реальных практических электростатических задач не всегда известно действительное распределение зарядов. Положение, которое принимают заряды, зависит от напряженности электрического поля  $E$ , а оно, в свою очередь, определяется самим распределением зарядов. Внесение любого проводника или изолятора в поле других зарядов, расположение которых известно, приводит к движению всех зарядов и, тем самым, к изменению плотности распределения зарядов на каждом теле независимо от того, является ли оно проводником или диэлектриком. Решение некоторых простейших задач можно найти в вузовских учебниках по электростатике и электромагнетизму [1-5]. Для практических задач были разработаны специальные методы приближенного вычисления полей, графические и полуграфические способы. Более сложные задачи разрешимы при применении ряда приемов и специального математического аппарата, позволяющего в отдельных случаях получать решение в аналитическом виде [6,7]. Нахождение решения в общем виде представляет значительные математические трудности. Эти задачи часто очень далеки от практики.

Реально в основном приходится иметь дело с решением задач, для которых не известны распределения зарядов, но заданы формы проводников, их относительное расположение в пространстве и потенциалы. Поиск решения в аналитической форме для таких систем, как правило, является сложной математической задачей.

Мы стараемся найти такую конфигурацию зарядов, которая создает требуемую конфигурацию электрического поля или потенциальное распределение в интересующей нас части пространства. Применение теоремы единственности существенно облегчает нахождение решений. Если каким - либо способом (хотя бы путем догадки) удалось найти выражение для потенциала  $\varphi(r)$ , удовлетворяющее поставленным условиям, тогда теорема единственности позволяет сделать заключение, что найденное выражение является единственным и истинным решением задачи [7]. Такой вывод очевиден с физической точки зрения. Если решение не одно, то будет не один потенциальный рельеф. В этом случае в каждой точке поле  $E$  будет неоднозначным, что является физическим абсурдом. В соответствии с



теоремой единственности заряд на поверхности проводника распределен единственным образом. Это следует из соотношения, определяющего связь поверхностной плотности зарядов и нормальной составляющей электрического поля  $\sigma = \epsilon_0 E_n$ . Единственность поля  $E$  определяет единственность распределения заряда на поверхности проводника.

Напомним некоторые положения электростатики, которые нам будут полезны в дальнейшем. Рассмотрим произвольную систему заряженных проводников, находящихся в некотором ограниченном пространстве, свободном от других зарядов. Пусть полный заряд  $k$ -проводника равен  $Q(k)$ , а каждый  $k$ -проводник характеризуется определенным значением потенциала  $\phi(k)$ . В подобной системе целесообразно приписать бесконечно удаленным точкам пространства потенциал, равный нулю. Поверхность каждого проводника является эквипотенциальной, электрическое поле  $E$  на его поверхности выражается через градиент скалярной функции  $\phi(r)$ , определяющей потенциал электрического поля

$$E = -grad \phi(r). \quad (1)$$

Вектор напряженности электрического поля в любой точке поверхности проводника направлен по нормали к плоскости, которая является касательной к поверхности проводника в этой точке. При этом нормальная составляющая поля  $E_n$  связана с поверхностной плотностью зарядов  $\sigma$  следующим соотношением:

$$\sigma = \epsilon_0 E_n, \quad (2)$$

где  $\epsilon_0$  - электрическая постоянная. Поверхностный интеграл от  $\sigma$  равен полному заряду  $Q(k)$  этого проводника. Соотношение (2) единственным образом связывает  $E$  и  $\sigma$ , но это совсем не означает, что только  $\sigma$  является источником поля  $E$ . Электрическое поле  $E$  создается всеми зарядами системы, а поверхностный заряд является лишь частью зарядов, создающих это поле. Так как связь между полем и потенциалом выражается соотношением  $E = -grad \phi(r)$ , то потенциал на поверхности данного проводника так же, как и напряженность поля, определяется всеми зарядами всех проводников.

## 2. Обзор существующих методов решения задач электронной оптики

Ниже дается краткий обзор существующих методов решения задач электростатики в электронной оптике для их сравнения с методом, предложенным в этой работе.

В настоящее время наиболее продвинутыми методами в нахождении решений задач электростатики являются методы решений задач электронной оптики. Это напрямую связано с широким применением электронно-оптических приборов в науке, технике и быту. В первую очередь, к ним следует отнести электронно-лучевые и телевизионные трубки, системы транспортировки пучков ионов для исследований по физике твердого тела

и в ускорительной технике, фотоумножители, электронные микроскопы.

В зависимости от назначения приборы включают в себя фокусирующие элементы (линзы), отклоняющие системы (дефлекторы), анализаторы. В связи с мощным развитием вычислительной техники открылись широкие возможности для компьютерного расчета и нахождения полей. В некоторых случаях компьютерные расчетные методы дают возможность применить и аналитические способы решений задач. Но основное направление - применение численных методов математического моделирования, которые в каждом конкретном случае позволяют найти оптимальную конструкцию электростатических устройств.

Для определения траектории движения электронов через электронно-оптическую систему, вычисления аббераций и ряда других ее характеристик необходимо знать распределения электрических потенциалов и полей в межэлектродном пространстве, которые определяются потенциалами на электродах оптической системы. Потенциальная функция  $\phi(r)$  при отсутствии свободных зарядов в пространстве подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta \phi(r) = 0. \quad (3)$$

Функция  $\phi(r)$  должна удовлетворять задаваемым граничным условиям. При этом в случае однозначного определения граничных значений производной  $d\phi(r)/dn$ , где  $n$  - нормаль к поверхности на ее границе, имеем дело с решением задачи Неймана. При однозначном определении граничных значений функции  $\phi(r)$  решается краевая задача Дирихле [8]. В соответствии с классической электродинамикой, эта краевая задача сводится к интегральному уравнению или системе интегральных уравнений. Как правило, для большинства электронно-оптических задач приходится решать именно задачу Дирихле. Для задач электронной оптики разработаны и используются три метода решения: метод граничных элементов (МГЭ), метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Более подробную информацию об этих методах можно получить в [9] и цитируемой там литературе. Здесь же эти методы рассматриваются кратко лишь с целью обратить внимание читателя на сложность решения задач электростатики даже с применением компьютерных вычислительных методов. Поэтому при вычислениях стараются трехмерную задачу свести к плоской. Это становится возможным при решении ряда задач электронной оптики осесимметричных систем [9].

Подобный подход сведения трехмерной задачи к плоской применяется и при решении ряда задач магнитостатики [10].

### 2.1. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Физическая идея, лежащая в основе метода граничных элементов (метода интегральных уравнений, метода зарядовой плотности), заключается в расчете распределения плотности зарядов на поверхностях элементов электростатической системы, которое соответствует потенциалам, приложенным к электродам. На основании этих результатов проводится

расчет пространственного распределения потенциала, создаваемого совокупностью этих зарядов. По этому распределению в дальнейшем могут быть вычислены в необходимых точках потенциалы и другие характеристики.

Метод базируется на хорошо известной формуле для потенциала от точечного заряда  $Q$  в некоторой точке пространства  $P$  :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r},$$

где  $\epsilon$  - диэлектрическая постоянная,  $r$  - расстояние от заряда до точки  $P$ . Для электрода, поверхность которого равна  $S$ ,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_S \frac{\sigma}{r} dS,$$

где  $dS$  - элемент поверхности  $S$ ,  $\sigma$  - поверхностная плотность зарядов элементов, соседних с элементом  $dS$ . Сложность метода напрямую связана со сложным характером граничных условий.

Методом зарядовой плотности потенциальные распределения на выбранных границах аппроксимируются некоторой суммой аналитических функций - точными решениями уравнений Лапласа. Точность решения с увеличением расстояния от электрода увеличивается. Величина электрического поля в этом случае является также суммой аналитических функций, поэтому возможно применение методов численного дифференцирования. Это в конечном итоге позволяет вести расчет траекторий заряженных частиц. В электронной оптике этот метод используется для решения задач как аксиально-симметричных систем, так и более сложных [11].

## 2.2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Основная идея метода конечных разностей (МКР) состоит в том, что вся область решения краевой задачи покрывается конечной прямоугольной сеткой. Для простоты используется квадратная сетка, в узлах которой и вычисляются значения потенциалов. Возможны два способа решений с использованием МКР: метод рядов Тейлора и интегральный метод. Эти способы можно реализовать только численными методами решения. Метод конечных разностей, хотя и используется для решения сложных задач [12], в последнее время применяется все реже.

Основные идеи и формулы МКР очень просты, но практическое применение этого метода к решению краевых задач может оказаться чрезвычайно трудоемким, если границы имеют сложную форму. Эта трудность устранена в методе конечных элементов (МКЭ) благодаря использованию треугольных сеток. Такие сетки могут быть построены при любой форме границы, если ее можно приближенно представить многогранником.

## 2.3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При нахождении решений методом конечных элементов интересующая

область делится с помощью решетки на отдельные элементы. Потенциал в нужных точках сетки вычисляется с помощью некоторой процедуры в зависимости от потенциала соседних точек. Точность метода зависит от выбора ячейки решетки, положения точек, в которых ведется расчет, формы и размеров ячейки сетки. Точность метода снижается с увеличением расстояния от места, для которого ищется решение, до электрода. В электронной оптике метод используется для определения потенциалов аксиально-симметричных систем, парааксиальных лучей и aberrаций. Вне парааксиальной области метод не позволяет получить удовлетворительные результаты из-за невозможности применить численное дифференцирование.

В методе конечных элементов постулируется вариационный принцип, при применении которого проводится минимизация некоторого функционала, физический смысл которого соответствует энергии, запасенной системой [10,13]. В качестве такого функционала для аксиально-симметричного дефлектора [10] взят следующий:

$$J_m = \iint_S \frac{1}{2} \epsilon_0 \left[ \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right)^2 + \left( m \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} \right)^2 + \left( m \frac{\partial \Phi_m}{r} \right)^2 \right] \pi r dr dz.$$

Такой выбор связан с тем, что из-за условий симметрии потенциал  $\Phi(r, \theta, z)$  можно выразить через сумму членов бесконечного ряда Фурье.

Интегрирование по поверхности  $S$  проводится для всех значений  $r \geq 0$ . Предположим, что  $U(\vartheta)$  - потенциал на поверхности вращения, включающей поверхность электродов дефлектора. Тогда  $U(\vartheta)$  можно выразить через сумму членов ряда Фурье

$$U(\vartheta) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} U_m \cos m\vartheta,$$

где

$$U_m = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} U(\vartheta) \cos m\vartheta d\vartheta.$$

Если принять, что потенциал в зазоре между электродами изменяется в зависимости от угла  $\vartheta$  линейно, то член ряда  $U_m$  можно представить в виде некоторой суммы, что существенно упрощает компьютерные расчеты.

В [13] вместо решетки с постоянным шагом [10] используется решетка с переменным шагом. Поскольку в МКР даже численное решение становится очень сложным, дифференциальные уравнения в частных производных не используются.

Очень важной проблемой в этом методе является выбор сетки. На практике индивидуальный выбор положения каждого узла слишком трудоемок для пользователя программы. Различными авторами предложены удобные алгоритмы для автоматической генерации сетки [9]. Тот, кто приобрел готовую конечно-элементную программу, обычно получает и какой-либо метод генерирования сетки, но составление собственной программы, как правило, очень трудная задача. Рассмотренные выше методы широко

используются при решении задач электронной оптики. У каждого метода есть свои разработчики и приверженцы, активно продолжающие работы по их совершенствованию.

#### 2.4. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ

Проведем краткий анализ этих трех методов решения задач электростатики электронной оптики. МКР эффективен только тогда, когда границы совпадают с линиями какой-либо регулярной сетки, так как включение в рассмотрение нерегулярностей, встречающихся при расчетах, чрезвычайно громоздко.

МКЭ теоретически применим к решению любого типа краевых задач, даже к трехмерным. Этот метод может быть очень эффективен, если пользователю доступен апробированный работающий пакет программ. В противном случае предпочтителен МГЭ, поскольку последний легко программируется силами одного ученого, по крайней мере в одномерном варианте.

Как МКР, так и метод граничных элементов дают значения потенциалов в узлах дискретной сетки. Для вычислений траекторий частиц необходимо знать напряженность поля в любой произвольной точке пространства. Для решения этой задачи в МГЭ напряженность электрического поля может быть вычислена как непрерывная суперпозиция аналитических функций при известном распределении поверхностных источников. Эта же задача решается вполне удовлетворительно и в методе конечных разностей. Нерегулярность же сетки, применяемой в методе конечных элементов, приводит к тому, что точный расчет напряженности поля становится практически невозможным. Практика использования МКЭ вынуждает ограничиваться интерполяцией и дифференцированием в окрестности оптической оси.

Использование любого из трех методов требует соответствующего программного обеспечения. Для этого разработаны пакеты программ, которые по мере развития вычислительной техники совершенствуются уже в течение двух десятилетий [9].

Совершенствование программ позволяет сократить время счета, но основной проблемой является разработка программ. Во всех конкретных случаях численного решения необходим разумный компромисс между затратами времени на написание соответствующей компьютерной программы (или стоимостью ее приобретения) и сэкономленным временем счета.

### 3. Предлагаемый алгебраический метод

#### 3.1. АЛГОРИТМ ПРЕДЛАГАЕМОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

Целью дальнейшего изложения является обоснование и описание нового метода решения задач электростатики для систем, потенциалы элементов

которых подчиняются уравнению Лапласа  $\Delta\phi(r)=0$ . Предлагаемый итеративный метод основан на алгоритме, не требующем решения задачи Дирихле или Неймана, поэтому при его применении нет необходимости использовать сложные методы математической физики, используемые для решения задач электростатики. Например, даже при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа *на плоскости* в областях с границей, состоящей из конечного числа гладких кривых, был использован метод граничных интегральных уравнений [14]. Предлагаемый алгоритм строится на формуле электростатики для точечного заряда  $\Phi=Q/4\pi\epsilon r$ , а решения задач электростатики проводятся исключительно алгебраически.

Точные решения уравнений физики могут быть получены только для ограниченного круга задач. На практике всегда имеют дело с приближенным решением. При решениях задач в методах математической физики применяются три разных метода: метод теории возмущений, вариационный и вариационно-итерационный (В-И - метод). Последний обладает многими преимуществами, в частности, он позволяет по ходу расчетов делать оценку погрешности на каждой стадии вычислений. Это свойство В-И - метода, пожалуй, является наиболее ценным [15]. В-И - метод позволяет также при необходимости проводить коррекцию в процессе счета.

В предлагаемом методе В-И - метод применяется для решения основной задачи электростатики для проводников произвольной формы и расположению, находящихся под заданными потенциалами. Предлагаемый метод основан на теореме единственности, утверждающей, что если найдено какое-либо решение задачи о потенциале, удовлетворяющее граничным условиям, то оно единственно. Граничным условиям должен удовлетворять потенциал или его нормальная производная на границе рассматриваемой области.

Теорема единственности позволяет провести замену реальных зарядов, находящихся на поверхности заряженного проводника, вспомогательными линейными или точечными зарядами, но размещаемыми в объеме проводника на некотором расстоянии  $d$  от его поверхности. Если в результате такой замены удастся найти величины вспомогательных зарядов, создающих заданные значения потенциалов на поверхности проводников, то тем самым поставленная задача будет решена. Замена реальных зарядов точечными, линейными, размещаемыми в объеме проводника, позволяет существенно упростить математические расчеты при решении задач электростатики, а также избежать появления неопределенностей, возникающих при  $r \rightarrow 0$ . Способ размещения зарядов внутри проводника применялся ранее для расчетов электрических полей, потенциалов и некоторых других характеристик многопроводочных детекторов частиц [16,17]. На этом же способе основана программа расчетов характеристик многопроводочных детекторов для экспериментов по физике высоких энергий [18]. Применялся этот способ и при решении отдельных задач электронной оптики [19].

Если распределение вспомогательных зарядов носит дискретный характер, то вблизи самой поверхности, на которой размещены заряды, эквипотенциальные поверхности имеют волнообразную структуру (рис. 2). Эта структура связана с расположением зарядов, но начиная с некоторого расстояния эквипотенциальной поверхностью является гладкая поверхность без каких-либо особенностей. Это расстояние зависит от расстояния между зарядами, размещаемыми в узлах сетки, или расстояний между линиями, на которых расположены заряды.

Рассмотрим сетку, состоящую из заряженных проволочек бесконечной длины, расположенных в одной плоскости и параллельных между собой на расстоянии  $a$  друг от друга. Для этого случая эквипотенциальные поверхности вблизи сетки с зарядами имеют периодическую структуру. Следовательно, функцию зависимости потенциала  $\phi(z)$ , где  $z$  - расстояние от сетки до точки наблюдения, можно разложить в ряд Фурье. Подстановка в уравнение Лапласа разложения  $\phi(z)$  в ряд Фурье дает для потенциала значение амплитуды в виде  $n$ -й гармоники поля  $\phi_n(z) = A_n \exp(-z/z_0)$ . Коэффициент  $A_n$  определяется плотностью зарядов проволочек. Из выражения для характерного расстояния  $z_0 = a/2\pi n$  следует, что на расстоянии  $a$  амплитуда первой гармоники уменьшается в  $\exp(2\pi)$  раз. При расстоянии от сетки до точки наблюдения, равном характерному, эквипотенциальная поверхность является практически плоскостью [20].

Для сетки из заряженных параллельных между собой проволочек, размещенных друг от друга на расстоянии  $a$  и между двумя проводящими поверхностями с нулевым потенциалом (система многопроволочной пропорциональной камеры), это расстояние примерно равно  $a/2$  [17,21].

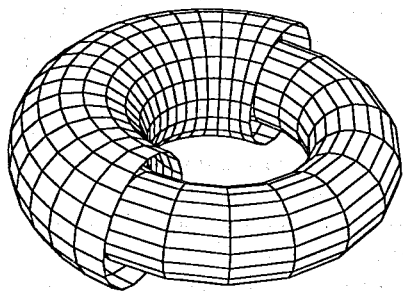


Рис. 1. Элемент заряженного проводящего тора, на поверхности которого задан потенциал. На внутренней вспомогательной тороидальной поверхности в узлах сетки размещаются заряды, создающие заданный потенциал на поверхности внешнего тора

На практике реальные проводники имеют конечные размеры, а сам проводник может иметь самую разнообразную форму. Поэтому поставленную задачу возможно решить только в случае использования системы точечных зарядов, расположенных внутри проводника в узлах некоторой сетки. Форма сетки определяется формой самого проводника, и чем ближе она располагается к поверхности проводника, тем точнее найденная при решении потенциальная поверхность будет совпадать с реальной поверхностью проводника. На рис. 1 в качестве заряженного проводящего тела показана часть тора, его поверхность является эквипотенциальной с заданным потенциалом. Внутри тора размещена тороидальная поверхность, несущая на себе в соответствии с принятым методом точечные заряды, создающие заданное значение потенциала.

### 3.2. ВЫБОР АЛГОРИТМА

Поясним методику выбора алгоритма и решения на его основе. Первоначально рассмотрим некоторую абстрактную задачу, поясняющую суть метода и его возможности. Пусть мы имеем некоторую (основную) поверхность или ее часть, например, плоскость квадратной формы, которая

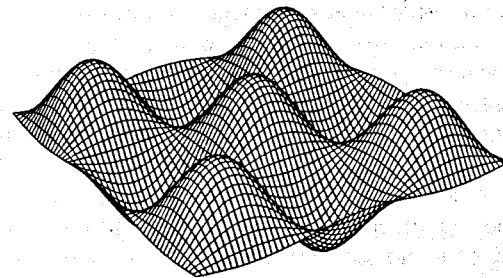


Рис. 2. Фрагмент потенциальной поверхности, образованной точечными зарядами, расположенными под соответствующими максимумами по узлам сетки с квадратными ячейками. Расстояние между зарядом и поверхностью равно  $d$ , расстояние между соседними зарядами -  $a$ . Волнообразные особенности потенциальной поверхности связаны соотношением между  $a$  и  $d$ . Рисунок соответствует случаю  $a > d$

является эквипотенциальной с потенциалом  $U$ . Этот потенциал создается за счет зарядов, расположенных на другой (вспомогательной) поверхности, находящейся на некотором расстоянии от основной. Пусть эти заряды занимают фиксированное положение. Определим величины зарядов, задавшись величиной потенциала основной поверхности и расположением зарядов на вспомогательной. Решение поставленной задачи выполним методом последовательных приближений (В-И - метод).

В формуле для потенциала точечного заряда при расчете опустим системный коэффициент. При этом формула запишется как  $U=q/r$ . Покроем выбранную потенциальную поверхность сеткой, образованной взаимно перпендикулярными линиями. Пусть число ячеек сетки равно  $m \times m$ . В общем случае размер ячейки сетки или ее шаг *зависит от формы поверхности*. Значения потенциалов будем рассчитывать в узлах сетки. В нашем случае число узлов, в которых размещаются заряды, равно  $p=(m+1)(m+1)$ . Заряды расположим в узлах такой же сетки, которую мы разместим на фиксированном расстоянии  $d$  от потенциальной поверхности. От выбора величины  $d$  зависит, насколько точно эквипотенциальная поверхность, полученная путем расчета, будет совпадать с поверхностью заряженного проводника. Если расстояние  $d$  меньше некоторого оптимального значения, вместо плоскости или безрельефной поверхности получим эквипотенциальную поверхность с волнообразными особенностями, подобную той, что изображена на рис. 2.

В соответствии с принципом суперпозиции потенциал в каждом узле сетки потенциальной поверхности равен сумме потенциалов от каждого точечного заряда. Выбор величины  $d$ , большей ее оптимального значения, ведет к увеличению числа итераций и времени счета из-за необходимости увеличения числа зарядов. Поясним этот случай. Пусть  $d \ll a$ , где  $a$  - расстояние между соседними зарядами. В этом случае потенциал в выбранном узле зависит практически только от соответствующего заряда. Если в результате первой итерации, в соответствии с зависимостью потенциала от точечного заряда  $U=q/r$ , мы получили его значение  $U=0,5U(x,y)$ .  $U(x,y)$  - заданное граничное значение потенциала поверхности. Тогда достаточно вместо заряда, равного  $q$ , взять заряд, равный  $2q$ , и на этом вся процедура расчета будет закончена. Таким образом, число итераций определяется соотношением между шагом сетки  $a$  и расстоянием  $d$  между поверхностью, на которой мы расположим заряды, и поверхностью проводника. Об этом речь пойдет впереди при рассмотрении конкретных примеров.

Каким способом определять величины зарядов для каждого следующего шага итерации? Из простых соображений следует, что величина заряда следующего шага итерации  $q(i+1)$  должна сравниваться с величиной заряда предыдущего шага итерации  $q(i)$ . Значит, можно предположить прямую пропорциональную зависимость  $q(i+1) \sim q(i)$ . Посмотрим, как связать полученное значение потенциала и величину заряда для следующего шага итерации. Пусть в результате расчета получено значение потенциала  $U(i+1) > U(i)$  или  $U(i+1) < U(i)$ , из этих неравенств следует, что величина заряда для следующего шага итерации  $q(i+1)$  должна иметь обратную зависимость от полученного значения потенциала  $q(i+1)=q(i)/U(i)$ . Это положение приводит к уменьшению заряда для следующего шага итерации, если  $U(i+1) > U(i)$ , и к его увеличению для случая  $U(i+1) < U(i)$ . Итерационный процесс завершается при достижении равенства зарядов  $q(i+1)=q(i)$ . Из

выражения  $q(i+1)=q(i)/U(i)$  следует, что это равенство, в конечной степени определяющее завершение итерационного процесса, возможно только при  $U(i)=1$ . Для итерационного процесса это означает, что граничное значение потенциала в процессе итераций необходимо положить равным 1. Только в этом случае все заряды во всех контрольных точках вычисляются единым способом. Отсюда возникает необходимость нормировки потенциала в данной контрольной точке по опорному и нормировки получаемых значений зарядов также по значению опорного заряда.

Расчет начнем с того, что в качестве начального приближения потребуем равенства вспомогательных зарядов между собой:  $q(1)=q(2)=\dots=q(p)=1$ . Подсчитав потенциал в каждом узле потенциальной поверхности как сумму потенциалов от каждого из  $p$  зарядов, получим  $p$  значений потенциалов  $U(1), U(2), \dots, U(p)$ . Каким образом выбрать величины зарядов для следующих приближений? Сравним вклад от каждого индивидуального заряда в потенциал какого - либо узла сетки потенциальной поверхности. Пусть этот узел имеет номер  $k$ , наибольший вклад в его потенциал по сравнению с вкладом любого другого заряда, как правило, дает заряд, находящийся на самом близком расстоянии. В нашем конкретном случае он расположен в ближайшем узле сетки зарядов и равен  $q(k)$ . Потенциал центрального узла, а также заряд, ему соответствующий, примем для всех шагов итераций в качестве опорного. После первого шага в расчетах потенциал в центральном узле будет иметь максимальное значение. Ограничимся для простоты анализа рассмотрением только диагональных узлов, зарядов и потенциалов. Пусть потенциал центрального узла равен  $U(m+1)$ . Соотношение между потенциалами диагональных узлов будет выглядеть следующим образом:  $U(1) < U(2) < \dots < U(m) < U(m+1)$ . Разделим полученные значения потенциалов всех узлов сетки на значение опорного. После этой операции относительные, нормированные по опорному значения потенциалов диагональных узлов запишутся следующим образом:  $U(1,1) < U(2,1) < \dots < U(m,1) < U(m+1,1)$ , а  $U(m+1,1)=1$ . Первая цифра в скобках обозначает номер узла, вторая - номер шага итерации. В дальнейшем всегда будем использовать только нормированные значения потенциалов во всех узлах и нормированные же значения всех зарядов. В соответствии с выше приведенными рассуждениями примем следующий способ выбора величин зарядов для каждого последующего  $i+1$ -го приближения:

$$q(k, i+1) = q(k, i) / U(k, i). \quad (4)$$

Мы видели, что такой способ определения зарядов для всех следующих шагов универсален и не зависит от соотношения потенциалов по отношению к опорному. Проведем нормировку значений зарядов по опорному. В результате для диагональных зарядов получим следующее соотношение:  $q(1,1) > q(2,1) > \dots > q(m+1,1)$ , а  $q(m+1,1)=1$ . Рассмотрим результат первого шага последовательных приближений. Если  $U(k,1) < U(m+1,1)$ , тогда необходимо увеличить потенциал в узле с номером  $k$  при следующем приближении, следовательно, необходимо увеличить  $k$ -й заряд.

В случае  $U(k,1) > U(m+1,1)$  для уменьшения потенциала при следующем приближении необходимо уменьшить  $k$ -й заряд. Легко видеть, что в соответствии с соотношением (4) процедура изменения величины зарядов происходит автоматически. При этом опорный заряд и опорный потенциал всегда принимают единичное значение, а значения остальных потенциалов автоматически будут стремиться к значению опорного за счет изменения величины соответствующего заряда в сторону увеличения или уменьшения при каждом следующем шаге итерации. Расчеты заканчиваются при достижении необходимой точности. Например, если для всех значений потенциалов выполняется условие  $\Delta U < \varepsilon$ , где  $\Delta U = (U(k,i) - U(1,i))/U(1,i)$ , а  $\varepsilon$  является некоторой наперед заданной величиной, то итеративный счет можно закончить. Умножение же величин, полученных после счета, на соответствующий коэффициент позволит выразить полученные результаты в числах и соответствующих электрических единицах. Принятая процедура существенно упрощает контроль за ходом расчетов.

### 3.3. ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Таким образом, процесс решения задачи, или его алгоритм, для *одного заряженного проводника* состоит из 8 этапов и выглядит следующим образом:

1). Расчет координат размещения вспомогательных зарядов, создающих на поверхности проводника заданный потенциал. Расчет координат контрольных точек, расположенных на кратчайшем расстоянии от соответствующих вспомогательных зарядов на поверхности заряженного проводника. В контрольных точках проводится сравнение найденных значений потенциала с заданным, т.е. проверка выполнения граничных условий.

2). Присвоение начального значения величины заряда  $q=1$  всем вспомогательным зарядам.

3). Вычисление потенциалов на поверхности проводника в контрольных точках.

4). Нормировка всех вновь получаемых значений потенциалов после каждого  $i$ -го шага итерации  $U(k,i)$  по опорному  $U_n(k,i) = U(k,i)/U(1,i)$ .

5). Вычисление новых значений зарядов для следующего шага итерации по соотношению  $q(k,i+1) = q(k,i) / U_n(k,i)^m$  ( $m \geq 1$ ).

6). Нормировка всех вычисленных промежуточных значений зарядов по величине опорного.

7). Выполнение дальнейших расчетов, начиная с третьего этапа до момента достижения нормированного значения потенциала  $U_n(k,i) = 1 \pm \delta U$  для всех точек поверхности, где  $\delta U$  - заданная нами точность.

8). Расчет новых значений зарядов  $q(k) = q(k,i)/U(k,i)$ , которые создадут потенциал  $u \cong 1$  на всей поверхности при заданной погрешности  $\delta U$ .

Далее по полученному распределению зарядов решается основная задача электростатики: определяются величины электрических полей, потенциалов,

эквипотенциали, карта силовых линий электрического поля, поверхностная плотность зарядов из соотношения  $\sigma = \varepsilon E_n$ , а также другие характеристики системы. Задача решается в пространстве или на плоскости в зависимости от поставленной задачи.

## 4. Применение предложенного метода к решению конкретных задач

### 4.1. ЗАРЯДЫ НА ПЛОСКОЙ СЕТКЕ

Для проверки и отработки метода возьмем в качестве основной потенциальной поверхности плоскую квадратную поверхность с сеткой, образованной взаимно перпендикулярными линиями с равным шагом. Вспомогательной поверхностью для этого случая служит точно такая же поверхность, размещенная от основной поверхности на расстоянии  $d$ . В узлах вспомогательной поверхности размещаются точечные заряды. Почему выбрана плоская квадратная поверхность проводника? Этому есть по крайней мере три причины.

- Ограниченная в пространстве плоскость, несущая заряды, в отличие от замкнутой криволинейной поверхности, поможет проследить влияние краев и ее угла. В этих местах плоскости в соответствии с законом электростатики по сравнению с центром наблюдается увеличение поверхностной плотности зарядов и увеличение электрического поля, достигающего максимального значения в углах.

- На любой потенциальной поверхности нормальная составляющая электрического поля должна быть равна полному значению поля в соответствии с выражением  $E = -grad \phi$ . На плоской поверхности это положение легче поддается проверке.

- Результаты, представленные в прямоугольной системе координат, являются хорошей наглядной иллюстрацией и позволяют судить о правильности предложенного метода.

Эти три фактора должны облегчить проверку выбранного алгоритма, определить оптимальное соотношение между расстоянием от поверхности с зарядами до поверхности заряженного проводника  $d$  и шагом сетки  $a$ , а также разработать приемы решения задач.

Разместим плоскость зарядов на расстоянии  $d=1$  мм от потенциальной плоскости. Покроем выбранную потенциальную плоскость сеткой из 900 ячеек (рис.3), образованной взаимно перпендикулярными линиями с шагом  $a$ , равным 1 мм, (случай  $a=d$ ). Из условий симметрии нет необходимости рассчитывать потенциал для всех  $31 \times 31$  узлов потенциальной плоскости. Достаточно сделать расчет для узла в начале координат, находящегося в центре сетки, для узлов на горизонтальной линии  $od$ , исключая центр, до границы сетки (15 узлов). Далее нужно выполнить расчет для узлов, лежащих на диагонали  $os$ , отсекающей вместе с горизонтальной линией примерно  $1/8$  площади квадрата (15 узлов). И работа заканчивается



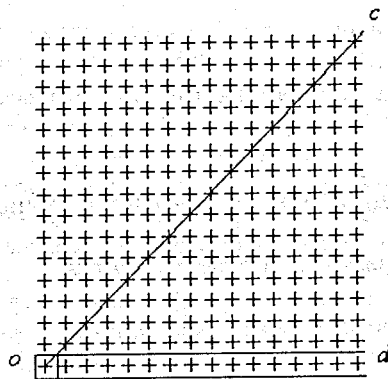


Рис. 3. Часть квадратной плоскости, на которой заданы краевые условия: потенциал вычисляется в контрольных точках, обозначенных крестиками. Точечные заряды, создающие задаваемую величину потенциала, размещены по узлам точно такой же сетки

расчетами для остальных 105 узлов, лежащих между горизонтальной линией  $od$  и диагональю  $oc$  (рис. 3). Общее число точек для расчета составит  $m=136$ . Таким образом, из-за симметрии в данном конкретном случае удается сократить время счета в 7 раз. Подсчитав потенциал в каждом из  $m=136$  узлов потенциальной плоскости как сумму потенциалов от каждого из 961 зарядов, получим  $m$  значений потенциалов  $U(1), U(2), \dots, U(m)$ . Присвоим остальным узлам сетки соответствующие значения потенциалов и продолжим расчет.

Результаты представлены на рис. 4. На нем показана зависимость потенциала вдоль диагонали плоскости, предполагаемой в качестве

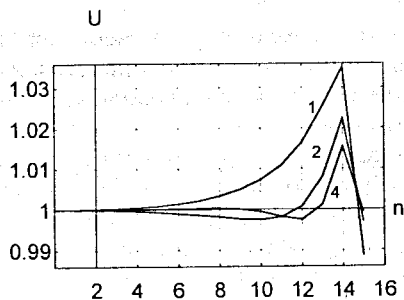


Рис. 4. Зависимость потенциала вдоль диагонали  $oc$  (рис. 3) после 25 шагов итераций. Величина  $k$ -го заряда для следующего  $i+1$  шага итерации рассчитывалась по соотношению  $q(k, i+1) = q(k, i) / U^m(k, i)$ . Значение степени  $m$  указано около соответствующих кривых,  $n$  - номер узла

потенциальной. По оси абсцисс отложен номер узла сетки, первый номер соответствует 1-му узлу, следующему после центрального. Результат дан после 25 итераций.

Вычисления зарядов были выполнены в соответствии с выражением  $q(k, i+1) = q(k, i) / U(k, i)^m$ . На рисунке значения степени  $m$  обозначены цифрами около соответствующего распределения. Из рисунка следует, что только в области из  $18 \times 18$  ячеек потенциал  $U(x, y) \approx 1$ . Во всей остальной области на потенциальные распределения оказывают большое влияние края поверхности. Применение для вычисления заряда выражения  $q(k, i+1) = q(k, i) / U(k, i)^m$  вместо выражения  $q(k, i+1) = q(k, i) / U(k, i)$  привело к сокращению итеративного процесса.

На рис. 5 показано относительное распределение зарядов в одном из квадрантов сетки, несущей точечные заряды в своих узлах. На левом рисунке показана полная картина, на правом приведено распределение в

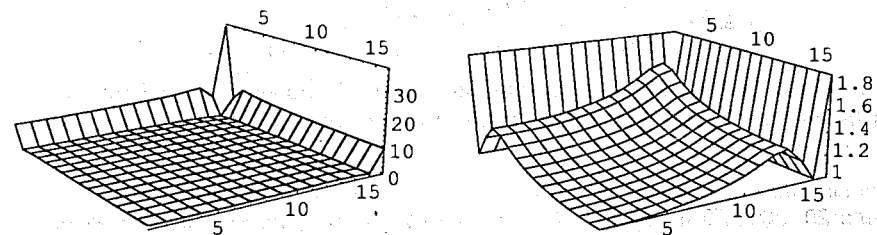


Рис. 5. Распределение величин точечных зарядов на четверти плоскости после 25 итераций. Полное распределение показано слева, справа показано распределение в увеличенном масштабе

более крупном масштабе. Заряд и потенциал в центре сетки приняты равными единице. Из рисунка видно, что происходит увеличение зарядов от центра к краям в соответствии с законами электростатики. Затем наблюдается уменьшение величин зарядов, а затем снова их рост. Наибольшее значение величин зарядов приходится на периметр сетки, а максимальное значение имеют заряды в углах сетки (левая часть рис. 5).

Требование равенства потенциала вдоль периметра сетки потенциалу центра приводит к росту величины зарядов периметра. Заряды, расположенные вдоль периметра, из-за своей большой величины определяют потенциал не только по периметру сетки, но и в области, примыкающей к периметру. Поэтому из-за равенства потенциала в области периметра потенциалу центра автоматически при каждом шаге итераций вместе с увеличением зарядов периметра происходит уменьшение величины зарядов вдоль ближайших линий к периметру, что и отражено на рис. 5.

Из результатов расчетов ясно, что взятая плоская поверхность по своим размерам недостаточна для выполнения качественного анализа. Поэтому

для дальнейших расчетов была взята плоская квадратная поверхность размером  $50 \times 50$  ячеек с теми же значениями  $a$  и  $d$ , т.е. по 1 мм.

**Потенциальные распределения.** Результат счета вдоль части диагонали приведен на рис. 6. На нем показана зависимость потенциала от номера

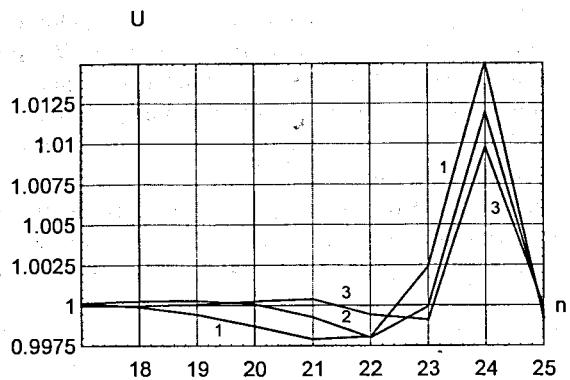


Рис. 6. Потенциальные распределения в узлах диагонали прямоугольной сетки размером  $50 \times 50$  ячеек, после 20, 30 и 50 шагов итераций, графики 1, 2 и 3 соответственно

узла для 20, 30 и 50 итераций, 1-е, 2-е и 3-е распределения соответственно. Видно, что после 50 итераций часть плоскости размером  $23 \times 23$  ячеек практически является эквипотенциальной и размер сетки вполне приемлем для дальнейшего анализа. На рис. 7 показано потенциальное распределение

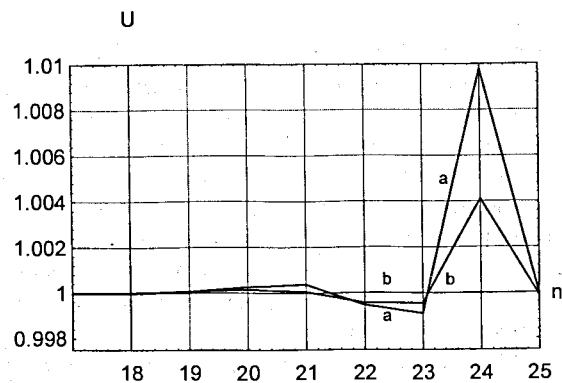


Рис. 7. Потенциальные распределения, рассчитанные в узлах диагонали (а) и оси абсцисс (б) прямоугольной сетки размером  $50 \times 50$  ячеек, после 50 шагов итераций. Заряды рассчитывались из соотношения  $q(k, i+1) = q(k, i) / U^m(k, i)$  с показателем степени  $m=6$

по узлам сетки вдоль ее диагонали (обозначено буквой а) и распределение вдоль оси  $x$  (б). Величина потенциала в 24 узле оси, равная 1,004, меньше значения в таком же узле на диагонали, равном  $\sim 1,01$ . Эта разница вызвана тем обстоятельством, что величина последнего заряда на диагонали, который в основном определяет потенциал в 24 узле, более чем на порядок превышает величину последнего заряда на оси сетки. На рис. 8, 9 а и б показано, как изменяется потенциал в зависимости от числа итераций, соответственно, в 25-м и 24-м узлах диагонали, приближаясь к предельной величине.

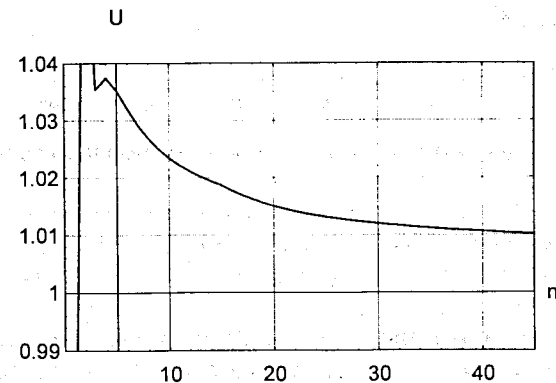


Рис. 8. Потенциал в предпоследнем - 24 узле диагонали в зависимости от числа итераций  $n$

На расстояниях, во много раз превышающих размер занимаемой зарядами области, в соответствии с законом Кулона, эквипотенциальной поверхностью будет сферическая. При приближении к системе зарядов замкнутая потенциальная поверхность изменяет свою конфигурацию, и в

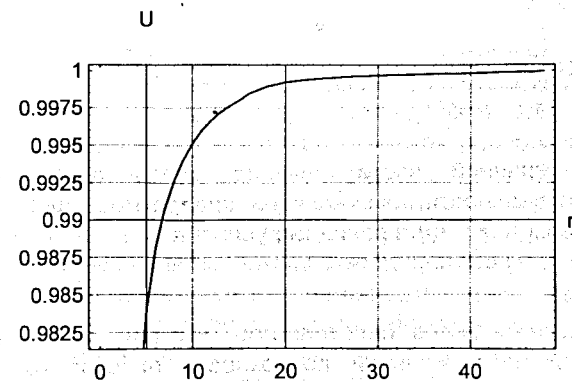


Рис. 9 а. Потенциал в последнем - 25 узле диагонали в зависимости от числа итераций  $n$

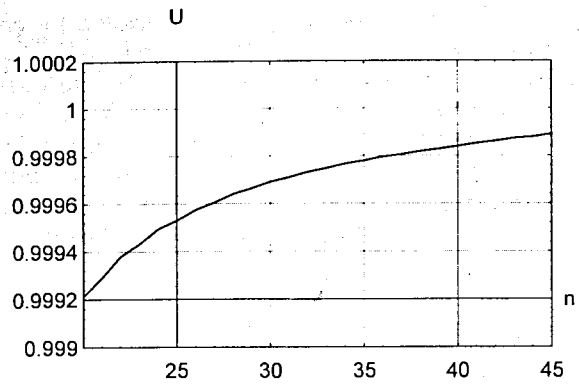


Рис. 9 б. Та же зависимость, что и на рис. 9 а, но в более крупном масштабе  
нашем конкретном случае некоторые ее участки становятся плоскими. Таким образом, фактически мы рассматриваем некоторую замкнутую потенциальную поверхность, образованную зарядами, размещенными на квадратной плоскости.

Посмотрим, как эта поверхность выглядит в сечении вдоль диагонали. Часть сечения вдоль диагонали показана на рис. 10, на нем 100 делений по

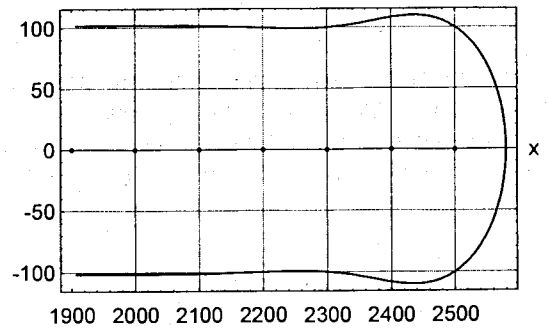


Рис. 10. Вид крайней части сечения вдоль диагонали основной потенциальной поверхности, окружающей квадратную сетку с точечными зарядами (показаны точки). Граничные условия  $u=1$ .  
100 делений шкалы соответствуют 1 мм

осям соответствуют 1 мм в пространстве. На рис. 11а показана часть сечения основной потенциальной поверхности плоскостью  $x-z$ . Там же показаны 2 сечения еще двух потенциальных поверхностей, расположенных выше и ниже основной. В сечении потенциальной поверхности, находящейся

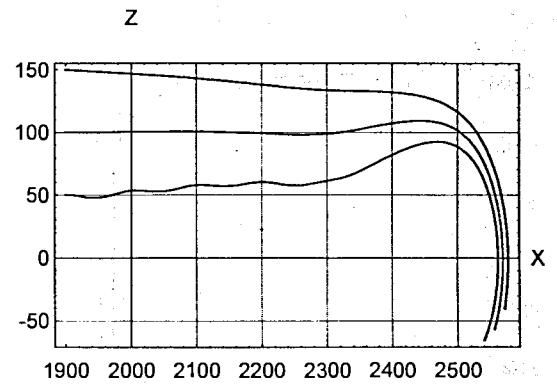


Рис. 11а. Вид части сечения основной потенциальной поверхности (средняя кривая) и потенциальных поверхностей, находящихся выше и ниже основной  
100 делений шкалы соответствуют 1 мм

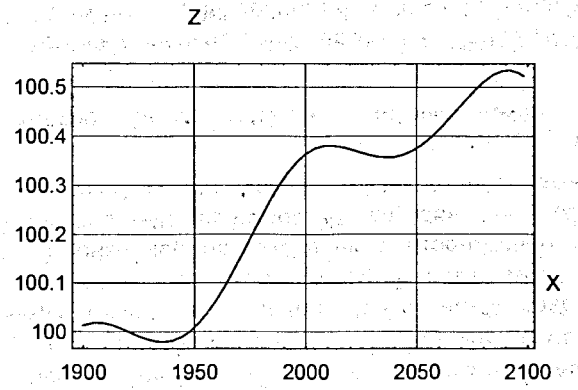


Рис. 11 б. Часть сечения основной поверхности в увеличенном масштабе. Пики волнистой структуры соответствуют расположению зарядов

ниже основной, периодическая структура в местах расположения точечных зарядов менее выражена, чем вдоль диагонали. Часть сечения основной потенциальной поверхности в увеличенном масштабе показана на рис. 11б. На эквипотенциали наблюдается периодическая структура, определяемая соответствующими точечными зарядами, потенциальная кривая удаляется от плоскости зарядов, следовательно, происходит рост потенциала при постоянном значении  $z$ . Этот рост вызван общим увеличением точечных зарядов к краям сетки (рис. 5). На рис. 12 показано сечение основной потенциальной поверхности плоскостью  $z=0$ . На основании рисунков 10-12 вполне можно представить форму основной потенциальной поверхности для системы точечных зарядов, размещенных по узлам прямоугольной сетки и

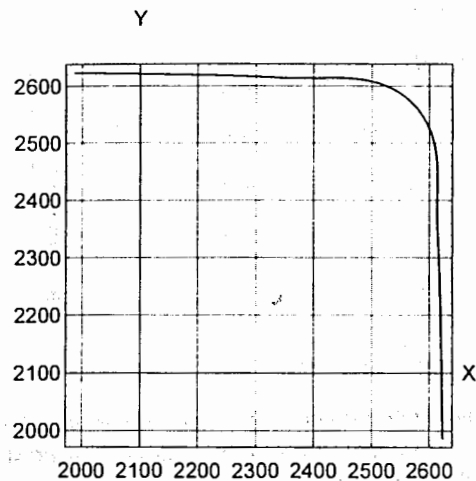


Рис. 12. Часть сечения основной потенциальной поверхности плоскостью  $z=0$ , в которой расположены вспомогательные точечные заряды

обеспечивающих плоский участок эквипотенциальной поверхности в ее центральной части.

**Распределения электрических полей.** Рассмотрим как влияет на электрическое поле и его нормальную составляющую соотношение между расстоянием  $d$  от поверхности с зарядами до поверхности заряженного проводника  $d$  и шагом сетки  $a$ . Зависимости электрического поля  $E$  и потенциала  $\phi$  от расстояния между зарядом и местом наблюдения для точечного заряда определяются соотношениями:  $E \sim 1/r^2$  и  $\phi \sim 1/r$ . Вблизи самого заряда электрическое поле быстрее спадает в зависимости от расстояния  $r$ , чем потенциал. Удаленные заряды оказывают большее влияние на величину потенциала в точке наблюдения, чем на величину электрического поля. Поэтому использование для анализа зависимости  $E(r)$  позволяет избрать более чувствительный способ проверки результатов итеративного процесса, чем зависимость  $\phi(r)$ . По анализу поведения электрического поля на предполагаемой потенциальной поверхности можно более точно обосновать соотношение между расстоянием зарядов друг от друга и расстоянием между поверхностью вспомогательных зарядов и поверхностью проводника. В нашем частном случае поверхность проводника должна быть плоской. Если потенциальная поверхность или ее сечение не имеют заметных волнообразных особенностей, то это еще не означает, что их нет в распределениях поля. Электрическое поле вдоль любой линии на плоской потенциальной поверхности не должно иметь указанных особенностей. Нормальная составляющая электрического поля должна быть

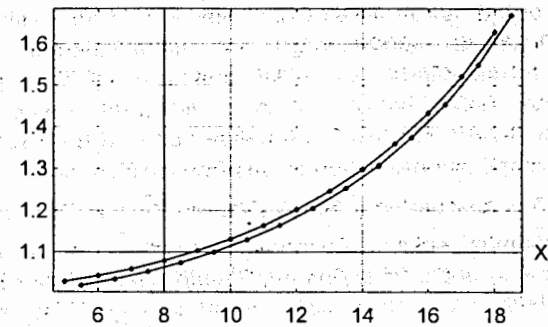


Рис. 13. Зависимость полной величины электрического поля, вычисленной в узлах диагонали сетки (верхняя кривая) и между ее узлами (нижняя кривая)

в точности равна полной величине поля. Таковы два требования к эквипотенциальной поверхности, вытекающие из поведения электрического поля на поверхности проводника. На рис. 13 показано распределение полной величины поля  $E$ , вычисленной вдоль диагонали в узлах плоскости (верхняя кривая) и между узлами. Ось абсцисс - проекция расстояния между узлами. Несмотря на равенство полной величины поля и его нормальной составляющей в указанных точках расчета, в промежутках между узлами электрическое поле меньше, чем в узлах. На рис. 14 представлена зависимость полной величины поля  $E$ , вдоль оси  $x$  в узлах и между ними. Распределение представляет собой монотонную функцию без видимых особенностей.

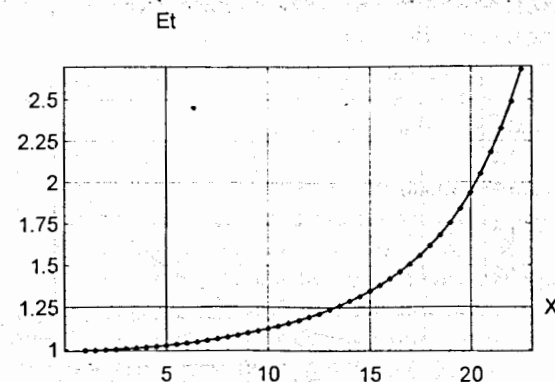


Рис. 14. Зависимость полной величины электрического поля, вычисленной в узлах оси ординат (верхняя кривая) и между ее узлами

Расчет для сетки 50x50 ячеек с  $a=1$  мм и  $d=1,4a$  показал, что в этом случае волнообразные особенности не наблюдаются не только в распределении потенциалов на всей плоской части предполагаемой эквипотенциальной поверхности, но и в распределениях электрических полей по этой плоскости, как это было ранее при  $a=d$  (рис.13). Ограничимся показом зависимости напряженности электрического поля  $E_x$  для случая  $d=1,4a$  только вдоль диагонали. Распределение  $E_x$  представлено на рис. 15, на котором сплошная кривая проведена через узлы сетки, в месте размещения точечных зарядов вдоль диагонали. Точками показаны значения поля в промежутках, на равном расстоянии между соседними зарядами. Полностью это распределение показано на рис. 15а, его начальный участок в

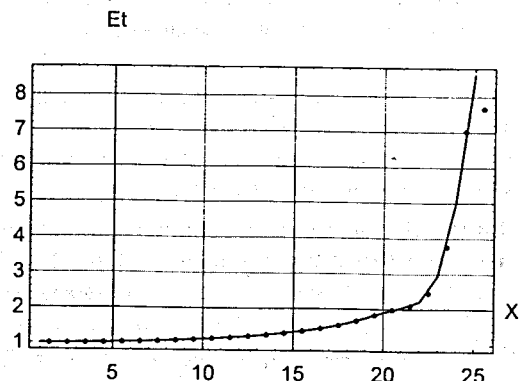


Рис. 15а. Зависимость полной величины электрического поля, вычисленной в узлах диагонали (сплошная кривая) и между ее узлами (точки на кривой). Расстояние между основной плоскостью с заданными граничными условиями  $u=1$  и плоскостью с вспомогательными зарядами равно расстоянию между соседними зарядами на диагонали ( $d=1,4 a$ )

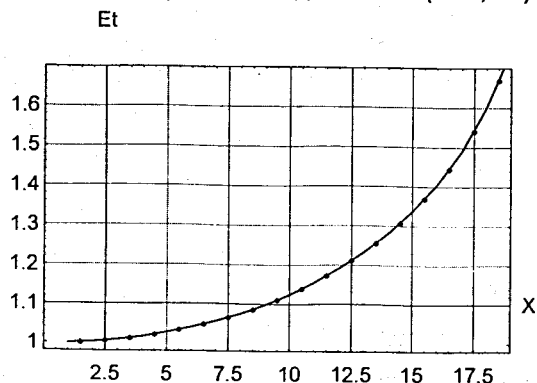


Рис. 15 б. Начальный участок распределения, показанного на рис. 15 а, в более крупном масштабе

более крупном масштабе - на рис. 15б. Эти распределения показывают правильность сделанных выводов о соотношениях расстояния между поверхностью с зарядами и имитирующей поверхностью заряженного тела. Это расстояние не должно быть меньше расстояния между соседними диагональными зарядами.

**Анализ и выводы.** Основным результатом - правильность предложенных алгоритма и методики решения основной задачи электростатики для *единственного заряженного проводника*. Подбор места размещения зарядов и их величин позволяют по форме проводника и заданному на нем потенциалу получить искомое решение. Это решение вследствие теоремы единственности будет правильным.

Другие результаты: минимальное расстояние между поверхностью, несущей точечные заряды, и поверхностью, имитирующей поверхность проводника, расстояние между соседними точечными зарядами. Для более точных расчетов это расстояние  $d \cong 1,41a$ , что следует из приведенного выше примера с сеткой, состоящей из квадратных ячеек размером  $a$ .

Потенциальные распределения на предполагаемой эквипотенциальной поверхности с максимумом вблизи периметра плоской части (рис. 4,6) свидетельствуют о том, что выбор контрольных точек вблизи краев поверхности для расчета потенциалов сделан не совсем корректно. Это привело к краевым эффектам вдоль всего периметра, но проблема легко разрешима, как это будет показано ниже. Возникшие эффекты несколько не мешают установить необходимое оптимальное расстояние между зарядами и имитатором заряженного проводника, для этого используется центральная область.

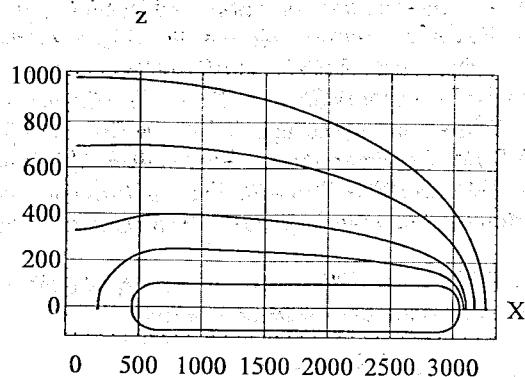
Рассмотрим конкретные примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода к более сложным системам.

#### 4.2. ДИАФРАГМА

Диафрагмы с круглым отверстием в центре достаточно широко применяются при формировании пучков ионов и электронов ионных источников. В [22] диафрагма с круглым отверстием рассматривается в качестве анода электронной пушки. Она является одним из элементов электростатической системы электронной оптики, формирующей пучки частиц ионного источника [23].

Первым пробным камнем для предложенного выше метода является его применение к расчету потенциала диафрагмы и некоторых эквипотенциалей. Вспомогательные заряды размещались только в одной плоскости по окружностям. Расстояние между зарядами по радиусу выбиралось равным расстоянию между зарядами на наибольшей по диаметру окружности. Диаметры внутренней и внешней окружностей равны 5 и 30 мм соответственно. Плоские части эквипотенциальной поверхности ограничены окружностями с радиусами в 6 и 29 мм. Расстояние между плоскостью зарядов и потенциальной плоскостью  $d=1$  мм. Контрольные точки для расчета потенциала плоской части размещались на плоских участках

поверхности против соответствующих зарядов, за исключением краевых по радиусу зарядов. Для сведения к минимуму краевых эффектов около внутренней и внешней границ диафрагмы контрольные точки были взяты в плоскости зарядов. Они размещались на том же радиусе, что и вспомогательные заряды, на расстоянии, равном  $d/2$  от последних. Уменьшение расстояния в этом случае по сравнению с подобными расстояниями для плоской части диафрагмы существенно уменьшает величину крайних зарядов. Этим самым устраняется краевой эффект границ плоского электрода, рассмотренный ранее (рис. 4). После первого шага расчета, соответствующего случаю, когда все вспомогательные заряды равны между собой, наибольшее значение полученного потенциала приходится на внутреннюю часть диафрагмы. На плоскость зарядов этой части диафрагмы приходится их наибольшая концентрация. Поэтому первый заряд от центра на оси  $x$  принят в качестве опорного. В качестве опорного взят и потенциал контрольной точки для этого заряда. Результаты расчета представлены на рис. 16. На нем изображена часть сечения диафрагмы



16. Часть сечения потенциальной поверхности круглой диафрагмы (замкнутая кривая), на которой заданы граничные условия  $u=1$ , плоскостью  $y=0$ . Показаны и некоторые эквипотенциали в плоскости сечения.

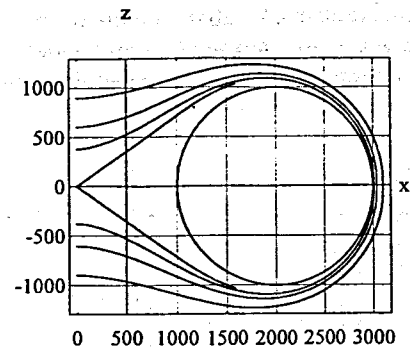
100 делений шкал соответствуют 1 мм

плоскостью  $y=0$  (замкнутая кривая) и эквипотенциали в плоскости сечения. Эквипотенциали проведены через точки с координатами  $z=200, 300, 500, 700$  и  $x=2400$  для всех кривых. 100 делений шкал вдоль осей  $x$  и  $z$  соответствуют 1 мм. При потенциале опорной точки  $U=1$  относительное значение потенциала в контрольных точках поверхности равно  $1 \pm 0,0003$ .

#### 4.3. ТОРОИД

Следующим объектом для расчета служил тороид (рис.1). Его геометрические характеристики: расстояние от центра тора до его осевой линии равно 20 мм, радиус окружности в сечении тора -10 мм. Радиус

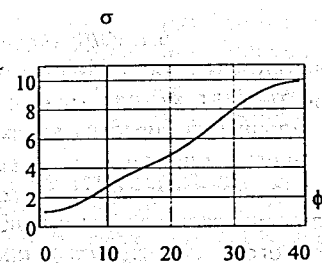
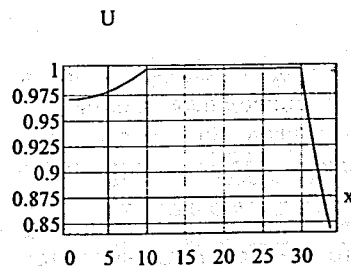
окружности, по которой размещены заряды, равен 9 мм. На рис. 17 показаны некоторые потенциалы в сечении тора плоскостью  $x-z$ , 100 делений шкалы вдоль осей  $x$  и  $z$  соответствуют 1 мм.



17. Сечение эквипотенциальной поверхности тора и других эквипотенциальных поверхностей плоскостью  $y=0$ .

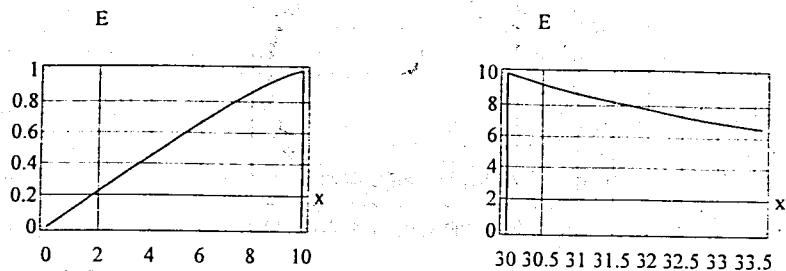
100 делений шкал соответствуют 1 мм.

На рис.18 (слева) показано распределение потенциала начиная от центра тора вдоль оси  $x$ . Часть распределения в диапазоне от 10 до 30 мм соответствует поверхности тора. На этом же рисунке (справа) в относительных единицах показана зависимость поверхностной плотности зарядов  $\sigma$  от угла вдоль части окружности, образующей тор. Весь диапазон углов от  $\varphi=0$  до  $\varphi=\pi$  разбит на 40 интервалов. Примем плотность зарядов  $\sigma$  в точках поверхности тора, ближайших к его оси и расположенных по внутренней окружности сечения тора плоскостью  $x,y$ , равной 1. На рис. 17 такая точка расположена при  $z=0, x=1000$ .



18. Потенциальное распределение вдоль оси абсцисс и поверхности тора (левый рис.) Справа - угловое распределение поверхностной плотности зарядов тора в относительных единицах. 40 делений по углу  $\varphi$  соответствуют  $\pi$ - радианам,  $\varphi$  - угол в плоскости  $y=0$

На рис. 19 показано распределение электрического поля в плоскости главного сечения, в которой нормальные составляющие поля из-за симметрии равны нулю. Если поверхность тора имеет отрицательный потенциал, то вектор поля направлен по радиусу от центра к поверхности тора для его внутренних областей. Для внешних участков в секущей плоскости он направлен в противоположном направлении. О распределении электрического поля по поверхности тора можно судить по рисунку 18



19. Распределение электрического поля в плоскости главного сечения тора вдоль радиуса. Слева показано распределение от центра до поверхности тора, справа - распределение с внешней стороны

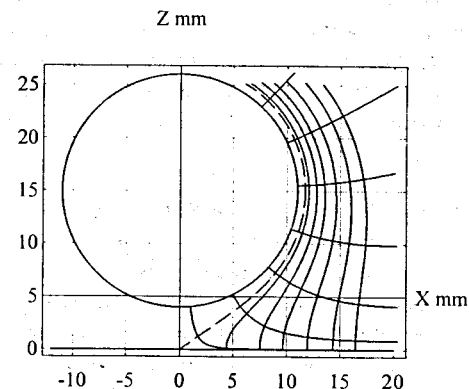
(справа). Напоминаем, что на поверхности нормальная составляющая поля  $E_n$  равна его полному значению  $E$ . Тогда в соответствии с выражением (2)  $\sigma = \epsilon_0 E_n$  и величина  $E_n$  пропорциональна поверхностной плотности зарядов тора  $\sigma$ . Рис. 18 отражает распределение поля по поверхности тора.

## 5. Электростатика нескольких заряженных проводников

### 5.1. ОДИНАКОВЫЕ СФЕРЫ

До сих пор мы рассматривали применение метода к решению основной задачи электростатики для одного заряженного проводника. Перейдем к решению задачи для системы заряженных проводников. Начнем с простого примера двух одинаковых сфер, имеющих равные потенциалы, образованные зарядами одинакового знака. Эти две сферы в данном методе можно рассматривать как одно тело. Задача решается точно так же, как и для одиночного заряженного проводника, например, подобного тору. Внутри каждой из сфер располагается сфера с вспомогательными зарядами. Вспомогательные заряды размещаются на пересечении радиусов, проходящих через контрольные точки сфер-проводников, со сферой с вспомогательными зарядами. Диаметр каждой сферы равен 22 мм, их центры расположены вдоль оси z. Расстояние между центрами -30 мм.

Расчет проводится с использованием зарядов обеих сфер. На рис. 20 показано сечение одной из сфер плоскостью  $y=0$ . На рисунке кроме эквипотенциалей показаны силовые линии, начинающиеся на сфере. Зеркальное отражение относительно линии  $z=0$  дает положение второй сферы. В соответствии с законами электростатики для этих сфер одна из потенциальных поверхностей переходит в коническую поверхность и смыкается в точку, которой в рассматриваемом случае является начало координат. На рисунке след такой поверхности показан штриховой линией.



20. Эквипотенциали и силовые линии одной из двух сфер с равными потенциалами в плоскости осевого сечения, проходящего через центры сфер

Для сфер, имеющих те же геометрические характеристики, заряженных до равных потенциалов, но противоположных знаков, решение задачи строится аналогичным способом с учетом разницы в знаках зарядов. При переходе от сферы с зарядами одного знака к сфере с зарядами противоположного знака необходимо своевременно менять знаки зарядов. Заряды в обоих случаях размещаются вдоль параллелей, проводимых на вспомогательной сфере через равные угловые интервалы. Заряды вдоль параллелей располагаются на расстоянии друг от друга примерно равном расстоянию между параллелями.

Для сфер с одинаковыми по знаку зарядами в качестве опорного заряда берется заряд одной из сфер, размещенный на оси на кратчайшем расстоянии от второй сферы. И как опорный используется заряд наиболее удаленный от второй сферы для случая потенциалов разных по знаку. После первого шага расчета, соответствующего равенству всех вспомогательных зарядов между собой, наибольшее значение полученного потенциала приходится именно на контрольную точку, соответствующую опорному заряду. Это объясняется тем, что в самом начале расчета в величину

потенциала в районе контрольной точки дают вклад ближайшие заряды одного знака.

Аналогичным образом решаются задачи многих заряженных проводников, при условии равенства потенциалов проводников между собой по абсолютной величине. Одинаковые сферы были выбраны для наглядности представления получаемых результатов.

В расчетах вспомогательных зарядов для каждого следующего шага приближения мы использовали следующее соотношение между зарядами и потенциалом:  $q(k, i+1) = q(k, i) / U(k, i)^m$ . Из этого выражения следует, что оно *полностью неприменимо* для систем нескольких заряженных проводников, среди которых находится хотя бы один проводник с нулевым потенциалом. Решению этой задачи, а также решению задач со многими заряженными проводниками, имеющими различные потенциалы, посвящен следующий раздел.

### 5.2. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДНИКОВ

Как и в предыдущих примерах, сначала рассмотрим две сферы, одна из которых находится под заданным потенциалом, а потенциал второй сферы равен нулю. Для решения задачи в этом случае применим принцип суперпозиции. Решение ищем в два этапа: на первом для случая равных потенциалов и одинаковых по знаку зарядов обеих сфер  $u=u(1,1)=u(2,1)=1$ , на втором этапе для тех же сфер, с тем же самым расположением зарядов, но с противоположными по знаку потенциалами  $u(1,2)=-u(2,2)=1$ . Первые индексы 1 и 2 - обозначают первую и вторую сферы. Вторые индексы 1 и 2 соответствуют этим двум этапам. В результате расчетов получим систему зарядов  $q(1,1)$  и  $q(2,1)$  для случая равных потенциалов и одинаковых по знаку зарядов обеих сфер и вторую систему зарядов  $q(1,2)$  и  $-q(2,2)$  для случая равных потенциалов сфер по абсолютной величине, но противоположных по знаку.

Просуммируем попарно заряды, соответствующие каждой из этих сфер. Тогда в результате суммирования зарядов первой сферы создается система зарядов для первой сферы  $q(1) = q(1,1) + q(1,2)$ . Попарное суммирование зарядов второй сферы создает систему  $q(2)=q(2,1)-q(2,2)$  для второй сферы. На основе принципа суперпозиции эти системы зарядов создают потенциал равный  $2u$  ( $u=1$ ) на первой сфере и нулевой потенциал на второй сфере. Умножая все заряды на соответствующий коэффициент  $k$ , получим значения зарядов, создающих требуемый потенциал первой сферы  $U(1)=ku(1)$  и  $U(2)=0$ . Для решения задачи с произвольным соотношением потенциалов между сферами рассмотрим комбинацию зарядов для первой сферы  $q(1)$  и  $q(2)$  - для второй.

$$\begin{aligned} q(1) &= \alpha q(1,1) + \beta q(1,2) \\ q(2) &= \alpha q(2,1) - \beta q(2,2). \end{aligned} \quad (5)$$

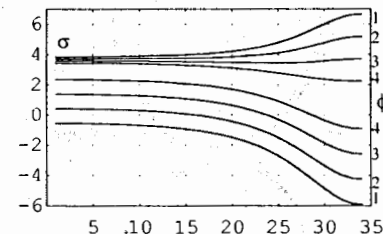
Эта комбинация зарядов  $q(1)$  и  $q(2)$  создает потенциалы первой сферы и второй сферы соответственно

$$U(1)=(\alpha+\beta)u \quad U(2)=(\alpha-\beta)u. \quad (6)$$

Случай  $\alpha=\beta=1$  нами рассмотрен выше. Рассмотрим еще один численный пример. Предположим, мы хотим знать распределение зарядов для потенциала первой сферы, равного  $12,5u$ , и потенциала второй сферы, равного  $-3,5u$ . Для этого решим очень простую систему уравнений  $(\alpha+\beta)u=12,5u$  и  $(\alpha-\beta)u=-3,5u$ . В результате получаем значения  $\alpha=4,5$ ,  $\beta=8$ .

Таким образом, для решения задачи, подобной рассмотренной, необходимо знать базисное распределение зарядов, создающих:

- равные единичные потенциалы двух сфер или вообще двух тел произвольной формы,
- равные по абсолютной величине единичные потенциалы двух сфер (двух тел произвольной формы).



21. Распределения поверхностной плотности зарядов для двух сфер вдоль меридианов. Потенциал первой сферы постоянен и равен  $4u$ . Кривые 1-4 соответствуют случаю равенства потенциала второй сферы  $3u$ ,  $2u$ ,  $u$ ,  $0$  соответственно. Нижние кривые относятся ко второй сфере

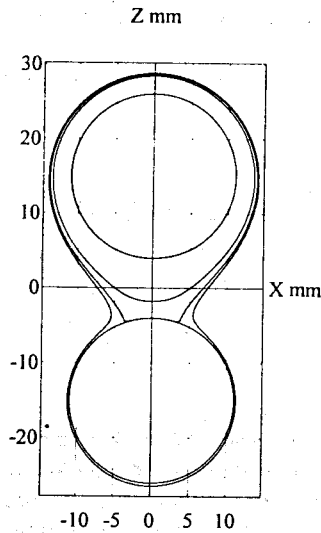
Для рассмотренного случая соответствующие базисные заряды образуют базисную комбинацию потенциалов  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ . Тогда на основе базисных распределений зарядов можно выполнить вычисления электрических полей и потенциалов и других характеристик в пространстве, окружающем систему двух сфер (двух тел произвольной формы). Для этого достаточно воспользоваться соотношениями (5), из которых можно получить распределения зарядов, обеспечивающих задаваемые потенциалы (заданные граничные условия) для этой системы, и выполнить все необходимые расчеты.

Покажем это на следующих примерах. На рис. 21 даны распределения плотности зарядов для двух сфер. Геометрические характеристики этой системы такие же, как в примере с двумя сферами, рассмотренном ранее. На четырех верхних кривых показаны распределения плотности зарядов  $\sigma$  вдоль меридиана первой сферы для случаев, когда положительные потенциалы второй сферы равны  $3u$ ,  $2u$ ,  $u$ , и случай нулевого потенциала.



Потенциал первой сферы имеет постоянное положительное значение  $u(1)=4u$ . На четырех нижних кривых приведены распределения плотностей зарядов для второй сферы. В случае  $u(2)=0$  все заряды второй сферы отрицательны (нижняя кривая). Для  $u(2)=u$  отрицательные заряды занимают ближайшую полусферу к первой сфере. По мере увеличения потенциала второй сферы площадь, занимаемая отрицательными зарядами, сокращается (кривые 3 и 4 рис. 21).

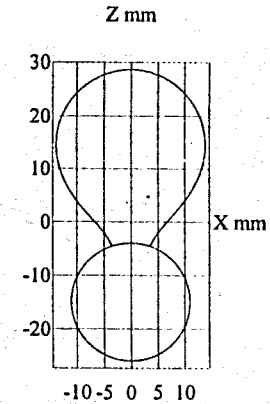
На рис. 22 показаны потенциальные кривые в плоскости сечения  $y=0$  тех же двух сфер с соотношением потенциалов  $4 : 3,3$ . О несколько необычной



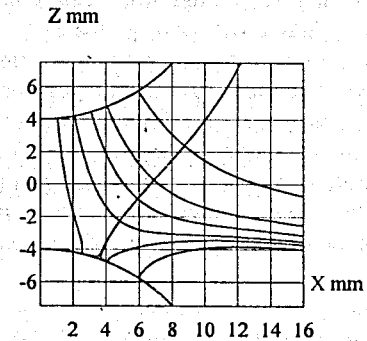
22. Вид эквипотенциалей системы двух сфер в плоскости  $y=0$ . Потенциал верхней сферы равен  $4u$ , потенциал нижней равен  $3,3u$

форме эквипотенциальной поверхности с потенциалом  $u(2)=3,3u$  можно судить по рис. 23, на котором представлено сечение этой эквипотенциальной поверхности. На верхней части нижней сферы, ограниченной грушевидной усеченной поверхностью, находятся отрицательные заряды. Остальная часть сферы занята положительными зарядами. В увеличенном виде часть сечения с силовыми линиями электрического поля показана на рис. 24 и 25. Цифрой 5 обозначена часть нижней сферы (рис. 25), а цифрами 1-4 - эквипотенциали. Сливающиеся кривые 2 и 3 имеют потенциал, близкий потенциалу сферы. При значении потенциала, равного потенциалу сферы, кривые полностью сливаются и образуют эквипотенциаль, показанную на рис. 23.

Для решения задачи трех заряженных проводников необходимо предварительно составить и решить систему уже трех уравнений.

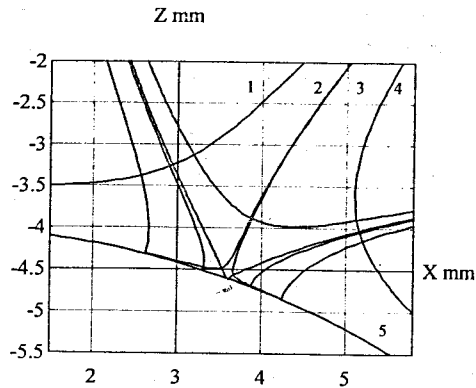


23. Вид эквипотенциали системы двух сфер при значении потенциала, равного  $3,3u$ , в плоскости  $y=0$ . Потенциал верхней сферы равен  $4u$ , потенциал нижней сферы равен  $3,3u$



24. Вид части сечения потенциальных поверхностей системы двух сфер (рис. 22) плоскостью  $y=0$ . На рис. также изображены силовые линии электрического поля

Рассмотрим следующий пример. Предположим, нам необходимо определить для трех проводников величины зарядов, создающих на них потенциалы в соотношении  $6:4:2$ . Составим систему трех простых уравнений:  $x+y+z=6$ ;  $x+y-z=4$ ;  $x-y-z=2$ . Этим уравнениям соответствуют три базисных распределения зарядов, создающих потенциалы, определяемые коэффициентами перед переменными  $x, y, z$ . Коэффициентам перед переменной  $x$ :  $1, 1, 1$ ; коэффициентам перед переменной  $y$ :  $1, 1, -1$ ; коэффициентам перед переменной  $z$ :  $1, -1, -1$  соответствуют три базисных комбинации потенциалов. Первая базисная комбинация - равные единичные потенциалы  $u, u, u$ ; вторая - потенциалы  $u, u, -u$  и третьей комбинации



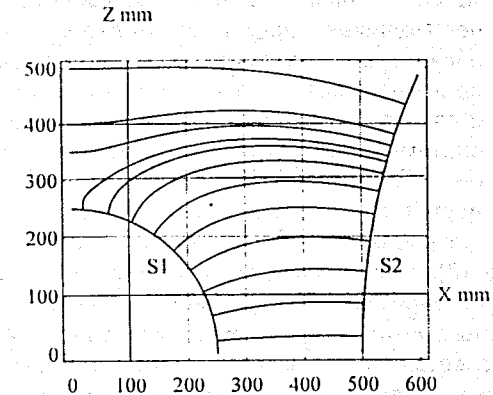
25. Часть рис. 24 в окрестности нижней сферы. 5 - эквипотенциальная поверхность нижней сферы (ее потенциал равен  $3,305u$ ); 2 и 3 - эквипотенциали, соответствующие потенциалу  $3,3005u$ ; 1 и 4 - силовые линии электрического поля

соответствуют потенциалы  $u, -u, -u$ . Решение, приведенной выше системы уравнений, дает следующий результат:  $x=4, y=1$  и  $z=1$ .

В качестве примера применения метода к задаче трех тел была решена задача определения величин зарядов для трех сфер, находящихся на одной оси. Две крайние сферы диаметром по 25 мм размещены на расстоянии между центрами 35 мм, третья сфера с диаметром 5 мм находится точно между двумя первыми. Задаваемые величины потенциалов: нулевой для средней сферы, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку единичные потенциалы больших сфер. Поскольку по определению  $u=1$ , из (6) следует

$$U(1)=1=x+y+z, U(2)=0=x+y-z, U(3)=-1=x-y-z. \quad (7)$$

Из первого и третьего уравнений получаем  $x=0$ . Из второго и третьего уравнений следует  $y=z=0,5$ . Этими значениями  $x=0, y=0,5$  и  $z=0,5$  система уравнений удовлетворяется. Коэффициенты при  $y$  и  $z$  в системе (7) при  $x=0$  показывают, что для решения поставленной задачи необходимо найти две базисные системы зарядов, создающие только две базисных системы потенциалов ( $x=0$ ). Потенциалы сфер при этом следуют соотношениям 1: 1: -1 и 1: -1: -1. На рис. 26 показана часть осевого сечения малой  $s1$  и большой  $s2$  сфер, а также некоторые силовые линии электрического поля, начинающиеся на большей сфере. Как показали расчеты, между большими сферами в области, которую займет маленькая сфера, электрическое поле практически постоянно. Поэтому представилась возможность сравнить полученное зарядовое распределение на поверхности малой сферы и величину электрического поля с теоретическим предсказанием. По теории заряды вдоль меридиана малой сферы должны быть распределены в соответствии с  $\cos\phi$ , где  $\phi$  - угол между радиусом - вектором сферы и осью.



26. Осевое сечение системы из трех сфер. Показаны только части сечения двух сфер системы  $S1$  и  $S2$ , а также силовые линии электрического поля. 100 делений шкал соответствуют 1 мм

системы трех сфер. При этом напряженность поля на поверхности малой сферы при  $\phi=0$  должна в три раза превышать напряженность в отсутствие этой сферы. Расчеты, выполненные в соответствии с предложенным методом, показали хорошее (в пределах 1,5%-2%) согласие с теорией. Расхождение вызвано существующей неоднородностью электрического поля в области расположения малой сферы.

По аналогии с системой уравнений (6) и (7) для двух и трех проводников система уравнений

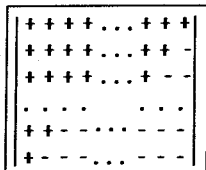
$$U(1)=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)u, U(2)=(\alpha+\beta+\gamma-\delta)u, U(3)=(\alpha+\beta-\gamma-\delta)u, U(4)=(\alpha+\beta-\gamma+\delta)u \quad (8)$$

является основой для определения неизвестных величин  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\delta$ , а по ним и зарядов, создающих заданные потенциалы четырех заряженных проводников. По аналогии с (5) заряды определяются из соотношений

$$\begin{aligned} q(1) &= \alpha q(1,1) + \beta q(2,1) + \gamma q(3,1) + \delta q(4,1), \\ q(2) &= \alpha q(1,2) + \beta q(2,2) + \gamma q(3,2) - \delta q(4,2), \\ q(3) &= \alpha q(1,3) + \beta q(2,3) - \gamma q(3,3) - \delta q(4,3), \\ q(4) &= \alpha q(1,3) - \beta q(2,3) - \gamma q(3,3) - \delta q(4,3). \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим численный пример. Возьмем пять заряженных проводников, например, с соотношением потенциалов 20; 12; 0; -8; -24. Решив систему уравнений, подобную системе (8), для этого конкретного случая получаем  $\alpha=-1/2, \beta=13/2, \gamma=4, \delta=6, \mu=4$ .

На основании рассмотрения приведенных примеров ясен принцип составления системы уравнений (8,9) и схема решения задач систем с  $n$  проводниками. Составим матрицу из знаков + и - для систем, подобных (8) и (9), но для случая  $n$  проводников. Знаки в  $i$ -й строке определяют знаки членов  $i$ -го уравнения систем, подобных (8), для нахождения его корней, а



также знаки членов уравнения, определяющего необходимые заряды (9). Далее необходимо выполнить расчеты для нахождения  $m$  систем зарядов, создающих единичные потенциалы системы из  $m$  элементов. Знаки, стоящие перед единичными потенциалами элементов системы, соответствуют знакам матрицы. Для первой системы берутся знаки первой строки матрицы, для второй системы берутся знаки второй строки матрицы и т.д. С учетом заданных величин потенциалов на элементах составляется и решается система уравнений (8), тем самым решается поставленная краевая задача для системы из  $m$  заряженных проводников. Таким образом, этап от составления матрицы до окончания вычисления величин зарядов системы из  $m$  элементов является 9-м заключительным этапом предложенного алгоритма решения задач электростатики систем, удовлетворяющих уравнению Лапласа.

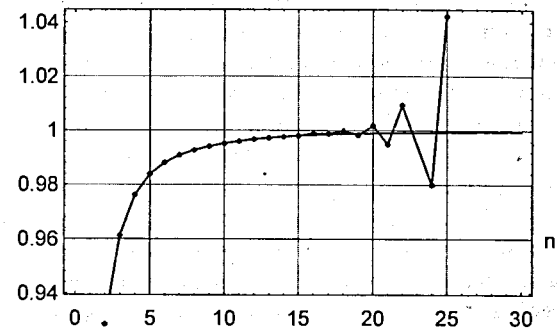
## 6. Оптимизация итеративного процесса

Один из способов сокращения времени расчетов при решении задачи использования симметрий заряженных проводников. Примером тому могут служить выполненные расчеты для плоской квадратной сетки, имеющей четыре оси симметрии. Использование симметрии позволило сократить время счета каждой итерации примерно в семь раз.

Можно ли сократить само число итераций, используя описанный выше поэтапный вариационно-итерационный способ? Анализ показывает, что сократить число итераций можно только на втором этапе вычислений, если вместо выражения  $q(k, i+1) = q(k, i) / U(k, i)$  использовать другое, в котором потенциал  $U(k, i)$  входит в некоторой степени  $m$ :  $q(k, i+1) = q(k, i) / U(k, i)^m$ . Результат этого подхода уже был показан на рис. 4, на котором приведена зависимость изменения расчетного потенциала от числа итераций для  $m=1, 2$  и 4. На конкретных примерах расчетов выясним, каким образом можно выбрать оптимальное значение  $m$  как в начале итеративного процесса, так и в его конце.

На рис. 27 показано изменение потенциала последней угловой точки на диагонали от числа итераций. Сплошная гладкая кривая представляет зависимость потенциала в этой точке от числа итераций ( $m=4$ ). Точками показана зависимость для двух значений  $m$ . Для первых 15 итераций  $m=4$ . Для последующих расчетов бралось  $m=6$ . При этом все последующие итерации приводят к разбросу получаемых значений вокруг гладкой кривой. В соответствии с зависимостью  $q(k, i+1) = q(k, i) / U(k, i)^m$  при значениях потенциала, меньших чем  $U=1$ , но близких к этой величине, знаменатель становится существенно меньше единицы. Это приводит к резкому увеличению соответствующего потенциала для следующего шага итерации  $U(k, i+1) > U(k, i)$ . Следствием этого, в свою очередь, при следующем шаге

U

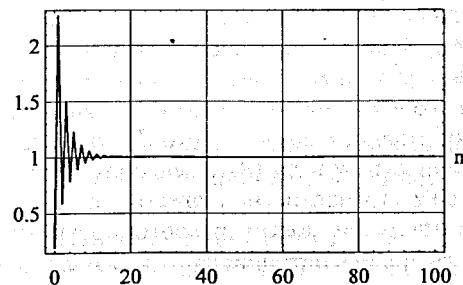


27. Изменение потенциала в последней точке диагонали (рис. 3) в зависимости от числа итераций. Сплошная кривая соответствует расчетам зарядов по соотношению  $q(k, i+1) = q(k, i) / U^m(k, i)$  с показателем степени  $m=4$ . Точками показано изменение потенциала для двух значений  $m$ . Для первых 15 итераций  $m=4$  и  $m=6$  - для последующих

получается еще меньшее значение заряда по сравнению с исходным. При продолжении процесса картина повторяется: происходит дальнейшее увеличение разброса вокруг плавной кривой и т.д., идет "раскачка".

Иная картина складывается, если расчет проводить в соответствии с уравнением  $q(k, i+1) = q(k, i) / U(k, i)^m$  в самом начале итерационного процесса для  $m > 1$ . В этом случае происходит процесс прямо противоположный: с каждым следующим шагом итерации резкие скачки получаемых значений потенциалов уменьшаются и через некоторое число

U



28. Зависимость потенциала от числа итераций в одной из контрольных точек электростатической двухэлектродной линзы. Показатель степени  $m=2$  для всех 100 итераций

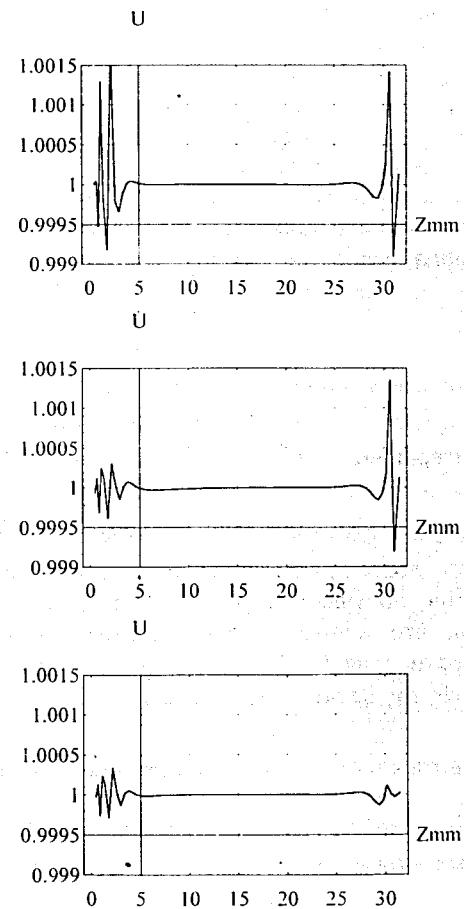
итераций полностью прекращаются. На рис. 28 показана зависимость потенциала от числа итераций для двухэлектродной симметричной электростатической линзы, состоящей из двух тонкостенных цилиндров с равными по величине, но противоположными по знаку потенциалами. Приведено значение потенциала в произвольно выбранной контрольной точке. Заряды для всех 100 итераций рассчитывались по уравнению  $q(k,i+1) = q(k,i) / U(k,i)^m$  при  $m=2$ . При этом точность, получаемая после 100 итераций для этой же системы при  $m=1$ , равна точности после 50 итераций с  $m=2$ . Использование степеней  $m > 2$  в начале итерационного процесса в некоторых случаях сразу же приводит к "раскачке", поэтому оптимальный вариант выбора степени  $m$  зависит от конкретной задачи. При решении некоторых задач для элементов с плавными границами можно брать даже  $m=2+8$ .

При решении краевой задачи систем, элементы которых имеют резкие границы, возможно появление локальных отклонений полученных значений потенциала от заданного. На рис. 7 это отклонение составляет 1% для 24-й точки диагонали и 0,4% для 24-й точки на оси абсцисс. Предложенный метод решения позволяет после завершения итерационного процесса провести коррекцию расположения соответствующих вспомогательных точечных зарядов или их величин, чтобы уменьшить величину отклонения в этих локальных точках.

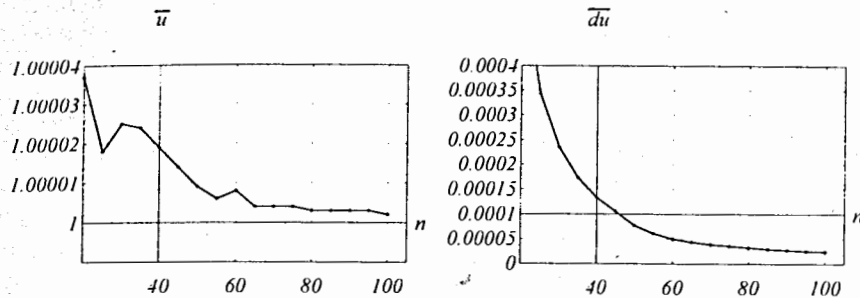
На рис. 29 показано распределение потенциала вдоль образующей для двухэлектродной симметричной электростатической линзы, состоящей из двух тонкостенных цилиндров с равными по величине, но противоположными по знаку потенциалами. Ее внутренний радиус  $R=5$  мм, а зазор между цилиндрами - 1 мм, длина цилиндра - 30 мм. На верхнем рисунке показано распределение после завершения итерационного процесса. Средний рисунок представляет это же распределение, но после коррекции положения зарядов вблизи зазора. На нижнем рисунке показано распределение после проведения всех коррекций.

При проведении коррекции положения и величины всех зарядов, кроме корректируемых, фиксируются и не изменяются. Поскольку необходимо получить изменение потенциала локальной точки на малую величину (в рассмотренном случае это изменение составляет  $\sim 0,1\%$ ), изменить положение заряда или его величину нужно также на очень малую величину.

Составной частью предложенного метода является использование вариационно - итерационного метода (В-И- метода). Он позволяет по ходу расчетов делать оценку точности на каждой стадии вычислений. В настоящей работе контроль за ходом расчетов осуществлялся по двум величинам: среднему значению потенциала  $\bar{u}$  и среднему отклонению  $d\bar{u}$ , рассчитанных по всем контрольным точкам. На рис. 30 показаны зависимости величин  $\bar{u}$  и  $d\bar{u}$  от числа итераций для электростатической линзы. Появление нерегулярностей в зависимости  $\bar{u}$  от числа итераций



29. Потенциальное распределение вдоль поверхности одного из элементов электростатической двухэлектродной линзы. На верхнем рисунке приведено распределение после завершения итерационного процесса. На среднем рисунке - после коррекции положения зарядов вблизи зазора линзы. Нижний рисунок представляет потенциальное распределение после всех коррекций положения зарядов



30. Среднее значения потенциала  $\bar{u}$  и отклонения от среднего  $\bar{d}u$  в зависимости от числа итераций для электростатической двухэлектродной линзы

связано с изменениями степени  $m$  в процессе вычислений по формуле  $q(k, i+1) = q(k, i) / U_n(k, i)^m$ , определяющей величины зарядов для следующего шага итераций.

## 7. Способ построения силовых линий поля и эквипотенциалей

Поясним способ построения силовых линий электрического поля и эквипотенциалей. Для получения аналитических уравнений силовых линий необходимо учесть, что элемент длины силовой линии  $ds$  параллелен вектору напряженности поля  $E$ . Это означает, что слагающие элемента  $ds$  по осям координат  $dx, dy, dz$  пропорциональны составляющим вектора  $E$ :

$$dx / E_x = dy / E_y = dz / E_z.$$

Уравнения эквивалентны системе двух дифференциальных уравнений:

$$dx / dz = E_x / E_z, \quad dy / dz = E_y / E_z,$$

интегралы от которых имеют вид

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2.$$

Константы, стоящие в правой части - постоянные интегрирования. Совокупность двух последних уравнений представляет собой уравнение силовой линии. Выбор этих констант соответствует возможности произвольного выбора координат точки пространства, через которую мы хотим провести силовую линию поля. Линии поля, проходящие через выбранную точку, строятся методом численного интегрирования дифференциальных уравнений, например методом Рунге - Кутты [24].

В настоящей работе использовался простой и наглядный способ построения силовых линий поля [1]. Он описан ниже. Рассмотрим случай, когда распределение всех проводников в пространстве нами задано. В

результате процесса вычислений мы знаем поверхностное распределение и величины зарядов каждого проводника. В этом случае мы можем определить составляющие электрического поля и потенциал в каждой точке пространства, в том числе для любой плоскости пространства. Силовые линии электрического поля наглядно демонстрируют векторный характер электрического поля. Силовые линии представляют собой пространственные кривые, касательные к которым в любой точке пространства совпадают с направлением поля в этой точке. Силовая линия поля, проведенная через любую точку пространства, и эквипотенциальная поверхность в этой точке взаимно перпендикулярны. На основании этих общих свойств силовых линий и эквипотенциальных поверхностей мы можем построить карты силовых линий и эквипотенциалей методом замены участка кривой линии отрезком касательной. Воспользуемся тем, что слагающие элемента  $ds$  силовой линии поля по осям координат  $dx, dy, dz$  пропорциональны составляющим вектора поля  $E$ :

$$dx / E_x = dy / E_y = dz / E_z.$$

Пусть необходимо провести силовую линию поля через точку  $A$ . Отложим из этой точки произвольно малый отрезок  $\epsilon$  в направлении вектора поля  $E$ , мы приходим в точку  $A'$ . В этой точке вектор поля  $E$  может иметь уже другое направление. Продолжив последовательно указанные операции, в результате получим ломаную пространственную линию. В пределе при бесконечном уменьшении составляющих ее отрезков ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) ломаная линия совпадет с искомой силовой линией, проходящей через фиксированную точку  $A$ .

Каким образом проводится эквипотенциаль в пространстве? Метод тот же, что и для построения силовых линий поля. Вернемся к общему свойству линий поля и эквипотенциалей, в силу которого эквипотенциальная поверхность перпендикулярна вектору электрического поля. На этой поверхности любая произвольная по форме кривая является эквипотенциалью. Поэтому можно говорить об эквипотенциали только как о линии на поверхности или плоскости, которая выбирается в зависимости от решаемой задачи.

Рассмотрим некоторую плоскость. Пусть вектор электрического поля лежит в этой плоскости и совпадает с некоторым отрезком, начинающимся в некоторой точке  $B$ . Тогда отрезок, также начинающийся в этой точке и перпендикулярный первому, является частью касательной к эквипотенциали в точке  $B$ . Таким образом, для нахождения направления касательной к эквипотенциали вектор электрического поля необходимо повернуть на угол  $\pi/2$ . Если углы между вектором поля и осями  $x$  и  $y$  равны соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ , то координаты следующей точки на эквипотенциали будут равны  $x_1 = x_0 + s \cos\beta$  и  $y_1 = y_0 - s \cos\alpha$  для направления вдоль касательной линии от точки  $B$ . Заменой знаков  $+$  и  $-$  на противоположные получим

координаты для эквипотенциали в противоположном направлении. Вычисляя направляющие косинусы вектора поля в этой точке и проводя дальнейшие вычисления, как это указано, мы можем построить эквипотенциаль. Подробное описание применения метода построения силовых линий поля и эквипотенциалей дано в [25].

Рассмотренным способом были рассчитаны конфигурация силовых линий поля и эквипотенциали, показанные на рисунках, приведенных в тексте.

## 8. Выводы

Разработан алгоритм для чисто алгебраического метода решения краевых задач электростатики произвольных систем, удовлетворяющих уравнению Лапласа  $\Delta\phi(r)=0$ . Обоснован, а также разработан и численный итеративный метод решения задач на основе предложенного алгоритма.

Предложенный метод решения краевых задач электростатики прост и доступен, не требует применения методов математической физики, используемых для решения подобных задач. Подготовка соответствующих компьютерных программ доступна как физику-экспериментатору, так и начинающему программисту.

Точность решения поставленных краевых задач определяется числом шагов итераций, в приведенных в работе примерах точность находится на уровне  $10^{-4} - 10^{-6}$ .

Применение метода не ограничено приведенными примерами расчета систем простой конфигурации.

Метод требует нахождения столько базисных систем зарядов, для скольких электродов или проводников решается задача. Это может привести к увеличению времени численных расчетов. Но если неизменна геометрическая конфигурация проводников системы и при этом необходимо варьировать на них напряжение, полученные базисные конфигурации зарядов позволяют вычислить электрические поля, поверхностные распределения зарядов, потенциалы на всех элементах системы. Это достигается вычислениями после простого сложения полученных величин зарядов при каждом изменении краевых условий. В конечном счете найденные базисные системы зарядов позволяют выбрать оптимальные условия для данной геометрической конфигурации заряженных элементов системы.

Метод применим для решения задач электронной оптики. Для иллюстрации его возможностей была решена краевая задача для двухэлектродной симметричной электростатической линзы. Результаты вместе с некоторыми другими примерами будут опубликованы. В отличие от методов решения краевых задач электронной оптики - метода конечных разностей (МКР), метода граничных элементов (МГР) и метода конечных элементов (МКЭ) - предложенный метод универсален и его применение не зависит от типа поставленной задачи.

В первоначальном варианте программы были написаны на языке GW-BASIC, затем были реализованы на языке С. Полное время счета для 100 итераций на РС с 486 процессором при тактовой частоте 66 МГц в восьмидесяти контрольных точках от 10000 зарядов (80 000 000 расчетов) составляет 30 минут.

## Заключение

Автор приносит сердечную благодарность М.Г. Шафрановой, взявшей на себя труд внимательно прочитать рукопись в процессе ее подготовки и сделавшей целый ряд полезных замечаний, учтенных автором. Автору приятно поблагодарить своих коллег по работе за поддержку и помощь в техническом обеспечении работы. Особенно признателен автор А.Л. Уринцеву, ознакомившему автора с многочисленными системами современного программного обеспечения.

## Список литературы

- [1] И.Е. Тамм, Основы теории электричества, Наука, М., 1966.
- [2] Р. Фейнман, К. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, т.5, Мир, М., 1966.  
R.P. Feynmann, R.B. Leighton, M. Sands, The Feynmann Lectures on Physics, volume 2, Addison-Wesley Publ. comp., London, 1964.
- [3] Э. Парселл, Электричество и магнетизм, Наука, М., 1983.
- [4] А.Н. Матвеев, Электричество и магнетизм, М. Высшая школа, 1983.
- [5] И.Е. Иродов, Основные законы электромагнетизма, М. Высшая школа, 1983
- [6] P.M. Mors, H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, part II, chapter 10. McGraw Hill, 1953.  
Ф.М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. II, глава 10. М. ИЛ, 1960.
- [7] В. Пановский, М. Филиппс. Классическая электродинамика. М.Ф.-М. 1963.
- [8] P.M. Mors, H. Feshbach, Methods of Theoretical Physics, part I, chapter 6. McGraw Hill, 1953.  
Ф.М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. I, глава 6. М. ИЛ, 1960.
- [9] P.W. Hawkes and E. Kasper, Principles of Electron Optics. Volume 1, Basic Geometrical Optics, Academic Press, 1989. П. Хокс, Э. Каспер, Основы электронной оптики. Т. 1, Основы геометрической оптики, Мир, 1993.
- [10] Э. А. Айрян, Е. П. Жидков и др. Численные алгоритмы расчета магнитных систем ускорителей заряженных частиц, ЭЧАЯ, т. 21. вып. 1 (1990) 251.

- [11] E. Munro and H.C.Chu, *Optik*, 61, 1, p. 1-16, 1982.  
E. Munro, *Nucl. Instr. and Meth. A* 258 (1987) 447.  
E. Munro, *Proc. Of Computer Assisted Design in Particle Optics Instrumentation*, Delft, The Neterlands (1994).
- [12] В.А. Груздев и др., *ПТЭ*, № 1 (1997) 114.
- [13] B. Lencova, *Nucl. Inctr. and Meth. A* 363 (1995) 190.
- [14] Е.П. Жидков и др. Решение двумерного уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений, *Сообщения ОИЯИ*, 11-81-398, Дубна, 1981.
- [15] Ф.М. Морс и Г. Фешбах. *Методы теоретической физики*. Часть 1, (Москва, 1960), 406.
- [16] G.A. Erskine, *Nucl. Instr. and Meth.*, 105 (1972) 565.
- [17] M.D. Shafranov, *Nucl. Instr. and Meth.*, A 367 (1995), 125.  
М.Д. Шафранов, Краевые эффекты в многопроволочных пропорциональных камерах, *Краткие сообщения ОИЯИ*, 6, Дубна, 1995, 21.
- [18] R. Veenhof, GARFIELD, a Drift Chamber Simulation Program, GARFIELD Manual, May 31.CERN, 1990.
- [19] H.Hoch, E. Kasper and D.Kern, *Optik*, 50 (1978) 413.  
E. Kasper, *Optik*, 54 (1979) 135.
- [20] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М., *Фейнмановские лекции по физике*, т.5, с. 148, Мир, М., 1966.
- [21] Sauli F. Principles of operation of multiwire proportional and drift chambers, CERN 77-09, Geneva, 1997.
- [22] E. Kasper, *Optick*, 54, (1979), 135.
- [23] R. Keller, *Nucl. Instr. And Meth. A* 298 (1990) 247.
- [24] Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. М. Наука. Ф.-М. 1989
- [25] М.Д. Шафранов, *Сообщение ОИЯИ*, P13-96-355, Дубна, 1996.

Рукопись поступила в издательский отдел  
27 апреля 1998 года.