СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р11 - 9725

Л.М.Сороко

ДИАДНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

1976

P11 - 9725

Л.М.Сороко

ДИАДНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Сороко Л.М. P11 - 9725

Диадная производная

Дано определение диадной производной Дж.Е.Гиббса. Показано, что оператор диадной производной, оператор классической производной на циклических группах, а также ядро интегрального преобразования Гильберта (дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига) в теории обобщенных функций имеют некоторые общие характеристики.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Soroko L.M. P11 - 9725

Dyadic Derivative

The dyadic derivative, introduced by J.E.Gibbs, is defined. It is shown that there are some common properties concerning the dyadic derivative operator on cyclic groups and also the Hilbert transform (Kramers-Kronig calculation) in the theory of distributions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

1. В последнее время появился ряд работ, в которых анализируются свойства так называемой *диадной производной.* Этот термин впервые ввел Дж.Е.Гиббс в 1966 г. /1,6/. Наиболее интересной особенностью диадной производной является то, что ее свойства тесно связаны с теорией характеров на диадных группах /2-5/ . А именно, при диадном дифференцировании сохраняется форма функций Уолша, которые, как известно, являются характерами на диадных носителях и образуют на них полную мультипликативную ортогональную последовательность. В отличие от производной в классическом математическом анализе, оператор диадного дифференцирования является нелокальным оператором. Поэтому диадная производная в данной точке определяется значениями исходной функции в нескольких, определенным образом расположенных, точках.

В работах /7,8/ описано применение диадной производной к теории аппроксимации, а в /9/ дано определение диадного дифференцирования на бесконечной диадной группе, и тем самым установлена связь между диадной производной на множестве рациональных чисел конечного отрезка и классической производной на том же множестве. В последних работах /10-12/ Дж.Е.Гиббс с сотрудниками дал анализ новых, обобщенных определений оператора диадного дифференцирования для произвольного носителя. Цель этих работ - построить такое определение гармонического дифференциального оператора, которое переходило бы, с одной стороны, в классическую производную для множества вещественных чисел, с другой - давало бы диадную производную на конечных полях с диадной структурой.

"Возраст" оператора диадной производной равен всего 1O годам, а работы, посвященные построению фундаментальных основ гармонического дифференциального исчисления, были опубликованы всего год-два тому назад. Естественно, что наибольший интерес вызывает проблема использования диадной производной в физике и технике. Здесь пока что ведутся поиски, но несомненно то, что диадная производная найдет широкое применение в теории информации, в частности, при анализе и синтезе функций алгебры логики и при обобщении теории управления дискретными системами. Были высказаны также гипотезы [13] о том, что реальное физическое пространство и время имеют диадную структуру в масштабах микромира. Однако эти гипотезы не имеют под собой серьезных оснований и их можно рассматривать всего лишь как научные спекуляции.

В данной работе дано определение диадной производной Дж.Е.Гиббса. Показано, что оператор диадной производной, оператор классической производной на циклических группах, а также ядро интегрального преобразования Гильберта /дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига/ в теории обобщенных функций имеют некоторые общие характеристики, которые должны найти свое естественное объяснение в общей теории гармонического дифференциального исчисления.

2. Диадное пространство является многомерным. Каждая точка его характеризуется n компонентами, где $N=2^n$ - число точек диадного пространства, а n -целое число, $n\geq 2$. Так, например, если число точек равно $N=8$, то $n=3$, и диадное пространство является трехмерным. Оно состоит из вершин n -мерного куба, в нашем примере - это 8 вершин трехмерного куба. Каждая компонента диадного пространства принимает одчо из двух значений, O или 1, независимо от того, какова размерность пространства. Например, точка $x=6$ задана компонентами /11O/, причем первое число соответствует старшему двоичному разряду.

Определим теперь диадную производную, воспользовавшись аналогией с классическим анализом. Пусть

функция $f(x,y,z)$ описывает некоторое скалярное поле, заданное в обычном трехмерном пространстве. Тогда приращение функции f на векторе приращения аргумента $\Delta\vec{r}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ равняется

$$\delta f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z, \qquad /1/$$

где $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ - частные производные вдоль соответствующих координатных осей. Суть /1/ состоит в том, что приращение скалярного поля $f(x,y,z)$ равно сумме частичных приращений этой функции вдоль всех трех координатных осей.

Решетчатая функция, заданная на конечной эквидистантной последовательности точек и не определенная в промежутке между точками, имеет структуру вектора-столбца с N -компонентами

$$\{f(0), f(1), \ldots, f(N-1)\}^T,$$

где N - число точек, на которых задана решетчатая функция.

Было установлено, что групповые свойства носителя исчерпывающе определяют как структуру характеров группы, так и вид оператора диадного дифференцирования. В нашем случае диадного носителя каждая его точка x задается упорядоченной последовательностью значений n двоичных чисел

$$x=x(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad x_r \in 0,1, \ 0\leq r\leq n-1,$$

где $N=2^n$ - число точек носителя. Упорядоченные свойства последовательности двоичных цифр x_r, $0\leq r\leq n-1$ определяют основные особенности оператора диадного дифференцирования.

Во-первых, решетчатая функция $f(x)$ только тогда получает приращение, когда частичное приращение аргумента равно $\delta x_r=1$ хотя бы для одного значения r, $0\leq r\leq n-1$.

Во-вторых, операция вычитания, используемая в классическом анализе при построении классической производной, заменяется для диадного пространства на операцию сложения по модулю 2. Поэтому $\delta x_r=1$ и не может быть отрицательным.

В-третьих, приращение по одному из разрядов $\delta x_r = 1$, $0 \le r \le n-1$, которое называют диадным инкрементом, дает различные сдвиги по оси x, в зависимости от индекса разряда, r. Это значит, что координатные оси в диадном пространстве не являются равноправными и имеют различный вес /*рис. 1*/.

Найдем теперь приращение решетчатой функции или диадную производную, учитывая отмеченные выше особенности диадного пространства. Суммируя частичные приращения решетчатой функции, соответствующие разным инкрементам, с учетом весов осей в диадном пространстве, получаем

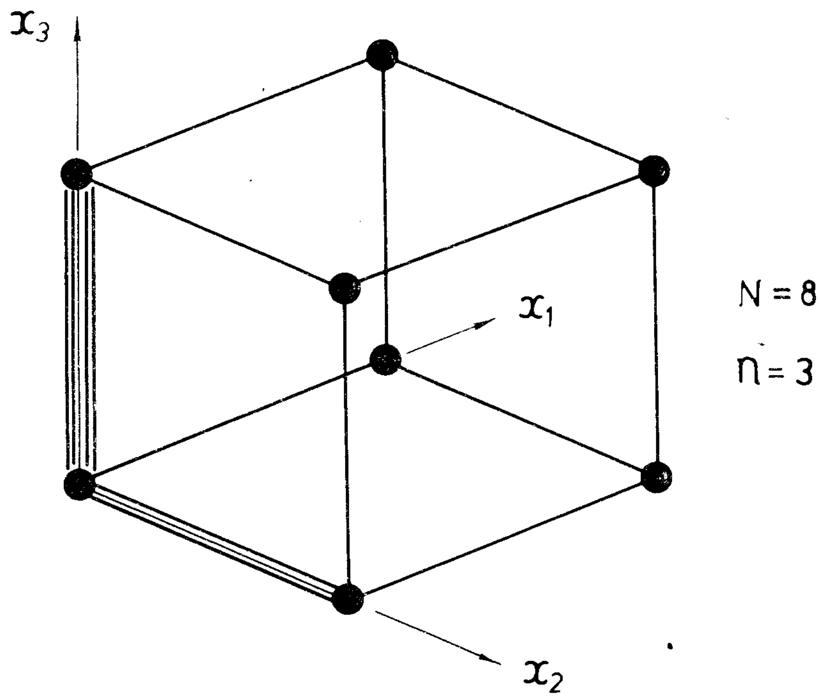

Рис. 1. Трехмерное диадное пространство, образованное вершинами трехмерного куба. $N = 8 = 2^3$. *Число дополнительных линий вдоль координатных осей совпадает с весами соответствующих координатных осей.*

$$f^{\{1\}}(x) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\delta f}{\delta x_r} \Delta x_r = \sum_{r=0}^{n-1} \delta f_r \cdot 2^r =$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} [\, f(x \oplus 2^r) - f(x)\,]\, 2^r \,. \qquad /2/$$

Из /2/ видно, что диадная производная является нелокальной функцией координаты x. Число слагаемых равно $n = \log_2 N$.

3. Построим собственные функции оператора диадной производной, т.е. найдем последовательность функций $u_k(x)$, которые удовлетворяют следующему уравнению:

$$u_k^{\{1\}}(x) + 2k \cdot u_k(x) = 0, \quad x = 0,1,\dots,N-1\,. \qquad /3/$$

Аналогом этого уравнения в классическом анализе является уравнение

$$\frac{d}{dx} g_\omega(x) + i\omega \cdot g_\omega(x) = 0\,, \qquad /4/$$

решением которого, как известно, являются экспоненты $e^{-i\omega x}$.

Найдем решение уравнения /3/, которое отвечает граничным условиям:

$$u_k(0) = 1, \quad u_k(2^n) = 1\,. \qquad /5/$$

Если записать числа x и k в двоичном представлении

$$x = \sum_{r=0}^{n-1} x_r 2^r \,, \qquad k = \sum_{r=0}^{n-1} k_r 2^r \qquad /6/$$

и воспользоваться определением диадной производной /2/, то уравнение /3/ примет вид

$$\sum_{r=0}^{n-1} [\, u_k(x \oplus 2^r) - u_k(x) + 2k_r u_k(x)\,]\, 2^r = 0\,,$$

$$x = 0,1,\dots,N-1\,. \qquad /7/$$

Для того чтобы существовало решение этого уравнения, достаточно, чтобы все коэффициенты при степенях 2^r, $0 \le r \le n-1$, обращались в нуль. Это означает, что

$$u_k(x \oplus 2^r) = [1-2k_r]\,u_k(x).$$

$$x = 0,1,\ldots,N-1$$

$$r = 0,1,\ldots,n-1, \qquad N = 2^n. \qquad /8/$$

Воспользуемся теперь граничными условиями /5/. Подставив $x=0$ и $x=2^r$ в /8/, получим, соответственно:

$$u_k(2^r) = (1-2k_r)\,u_k(0)$$

$$u_k(0) = (1-2k_r)\,u_k(2^r). \qquad /9/$$

Но поскольку

$$u_k(0) = 1,$$

то

$$u_k(2^r) = 1-2k_r = \frac{1}{1-2k_r}, \qquad /10/$$

откуда получаем

$$k_r = 0 \quad \text{или} \quad k_r = 1. \qquad /11/$$

Таким образом, коэффициент k может принимать целочисленные значения $k = 0,1,2,\ldots,2^n-1$.

Запишем первое уравнение из /9/:

$$u_k(2^r) = 1-2k_r, \qquad k_r \in 0,1 \qquad /12/$$

или, в более удобной форме,

$$u_k(2^r) = \exp[i\pi k_r], \quad k_r \in 0,1. \qquad /13/$$

Тогда уравнение /8/ запишется в виде

$$u_k(x \oplus 2^r) = u_k(x)\,u_k(2^r). \qquad /14/$$

Это - фундаментальное мультипликативное соотношение, которое связано с основным свойством характеров конечной коммутативной группы. Последнее состоит в том, что произведение двух характеров группы есть опять характер той же группы. Напомним, что, согласно теореме Л.С.Понтрягина /14/, характеры любой компактной коммутативной группы образуют на ней мультипликативную ортогональную последовательность, причем других мультипликативных систем не существует.

Если функции $u_k(x)$ записать в явном виде, то сразу станет ясно, что функции $u_k(x)$, которые являются решением уравнения /3/ и тем самым собственными функциями оператора диадной производной, образуют последовательность решетчатых функций Уолша на множестве целых чисел $x = 0,1,2,\ldots,2^n-1$, где n - целое число, $n \ge 2$.

Для того чтобы убедиться в этом, объединим вместе граничное условие $u_k(0) = 1$ и равенство /13/. Получим

$$u_k(\xi_r 2^r) = \exp[i\pi k_r \xi_r]; \quad k_r, \xi_r \in 0,1. \qquad /15/$$

При этом мультипликативное соотношение /14/ перейдет в равенства

$$u_k(x \oplus \xi_r 2^r) = u_k(x)\,u_k(\xi_r 2^r) =$$

$$= u_k(x)\exp[i\pi k_r \xi_r], \quad k_r, \xi_r \in 0,1. \qquad /16/$$

Следуя Дж.Е.Гиббсу /1/, подставим последовательно в равенства /16/ значения

$$
\begin{aligned}
x_0 &= \xi_0 2^0 \\
x_1 &= \xi_0 2^0 + \xi_1 2^1 \\
x_2 &= \xi_0 2^0 + \xi_1 2^1 + \xi_2 2^2 \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots .
\end{aligned} \qquad /17/
$$

Так как числа ξ_r расположены в различных разрядах, то сложение по модулю 2 можно заменить простым сложением. Так, например,

$$\xi_0 2^0 \oplus \xi_1 2^1 = \xi_0 2^0 + \xi_1 2^1 . \qquad /18/$$

Последовательно получаем

$$
\begin{aligned}
u_k(\xi_0 2^0) &= \exp[i\pi k_0 \xi_0] \\
u_k(\xi_0 2^0 + \xi_1 2^1) &= \exp[i\pi(\xi_0 k_0 + k_1 \xi_1)] \\
u_k(\xi_0 2^0 + \xi_1 2^1 + \xi_2 2^2) &= \exp[i\pi(k_0 \xi_0 + k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2)] \\
\dots \quad \dots \quad & \dots \quad \dots .
\end{aligned} \qquad /19/
$$

Продолжив процесс построения функций $u_k(x)$ до $r = n-1$, получаем

$$\boxed{u_k(x) = \exp\left[i\pi \sum_{r=0}^{n-1} k_r \xi_r\right]} \quad k_r\, \xi_r \in 0,1 . \qquad /20/$$

Это - адамаровски упорядоченная последовательность функций Уолша с индексом k, который имеет смысл волнового числа.

4. Пусть задана решетчатая функция $f(x)$, где $x = 0,1,2,\dots,2^n-1$. Тогда по определению ее уолш-образ $S(k)$ равен

$$S(k) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) u_k(x). \qquad /21/$$

Поскольку по определению

$$u_k^{\{1\}}(x) = -2k \cdot u_k(x), \qquad /3/$$

то диадная производная произвольной решетчатой функции может быть записана в виде

$$f^{\{1\}}(x) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} S(k) u_k^{\{1\}}(x). \qquad /22/$$

Это выражение можно обобщить на диадную производную любого порядка

$$
\begin{aligned}
f^{\{p\}}(x) &= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} S(k) u_k^{\{p\}}(x) = \\
&= \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} (-2k)^p S(k) u_k(x),
\end{aligned} \qquad /23/
$$

так как при каждом диадном дифференцировании функция $u_k(x)$ умножается на $(-2k)$. Необычная ситуация возникает при $p = 0$. А именно, диадная производная нулевого порядка совпадает с самой исходной функцией $f(x)$ только в том случае, если среднее значение функции $f(x)$ равно нулю, т.е., если

$$S(0) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{x=0}^{2^n-1} f(x) = 0. \qquad /24/$$

Выполнение этого условия оказывается достаточным для того, чтобы имело смысл диадное интегрирование, которому отвечают значения $p < 0$.

Оператор диадного дифференцирования можно записать в матричном виде. А именно

$$f^{\{1\}}(x) = \sum_{\xi=0}^{2^n-1} a(x\oplus\xi)\, f(\xi)\,, \qquad /25/$$

где

$$a(x\oplus\xi) = \frac{2^n-1}{2}\,\delta(x\oplus\xi,0) - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n-1} 2^r\cdot\delta(x\oplus\xi,\,2^r). \qquad /26/$$

Например, для $N=8$, $n=3$ оператор диадного дифференцирования имеет вид

$$a(x,\xi) = \frac{(-1)}{2}\begin{bmatrix} -7 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -7 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -7 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Матрица $a(x,\xi)$ полностью определяется элементами первой строки. Остальные получаются при помощи диадного сдвига на число, равное номеру строки $\xi = 0, 1, 2, \ldots, 2^n-1$.

5. В качестве примера вычислим первую и вторую диадные производные функции $f(x)$, $N=8$, приведенной на *рис. 2.* Используем более компактную запись диадной производной произвольной функции $f(x)$:

$$f^{\{1\}}(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \underbrace{k\cdot S(k)}\, u_k(x)\,, \qquad /27/$$

где k - волновое число, соответствующее адамаровски упорядоченной последовательности функций Уолша. Процедура вычисления диадной производной сводится к следующим операциям. Сначала находим уолш-образ исходной

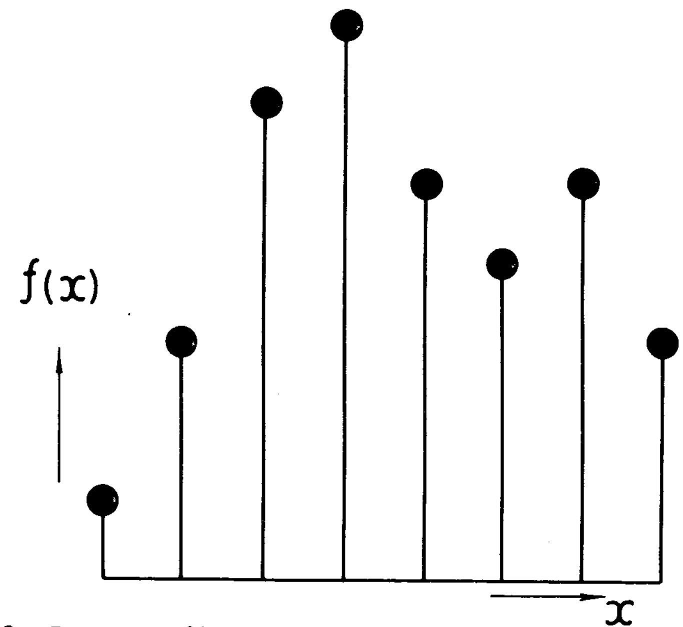

Рис. 2. Функция $f(x)$, *используемая ниже в задаче нахождения ее диадных производных первого и второго порядка.*

функции, используя адамаровски упорядоченные функции Уолша. Затем компоненты уолш-образа умножаем на соответствующие волновые числа k, возведенные в степень, которая равна порядку диадной производной. Затем возвращаемся в исходное пространство при помощи обратного преобразования Уолша.

Для заданной функции $f(x)$ имеем:

$$\begin{array}{lcccccccccl} f(x) = & 1, & 3, & 6, & 7, & 5, & 4, & 5, & 3 & & \\ S(k) = & 17, & 0, & -4, & -1, & 0, & -3, & -5, & 0 & & \cdot(+2) \\ kS(k) = & 0, & 0, & 8, & 3, & 0, & 15, & 30, & 0 & & \cdot(-1) \\ k^2S(k) = & 0, & 0, & 16, & 9, & 0, & 75, & 180, & 0 & & \cdot(-1)\;. \end{array}$$

После обратного преобразования Уолша получаем:

$f^{\{1\}}(x) = -28, \quad -10, \quad 13, \quad 25, \quad 17, \quad 5, \quad -2, \quad -10 \quad \cdot(+2)$

$f^{\{2\}}(x) = -140, \quad -56, \quad 65, \quad 131, \quad 115, \quad 49, \quad -40, \quad -124 \quad \cdot(+2).$

На *рис. 3* приведен уолш-образ $S(k)$ функций $f(x)$ /*рис. 2*/. На *рис. 4* и *5* показаны диадные производные первого и второго порядка заданной функции $f(x)$.

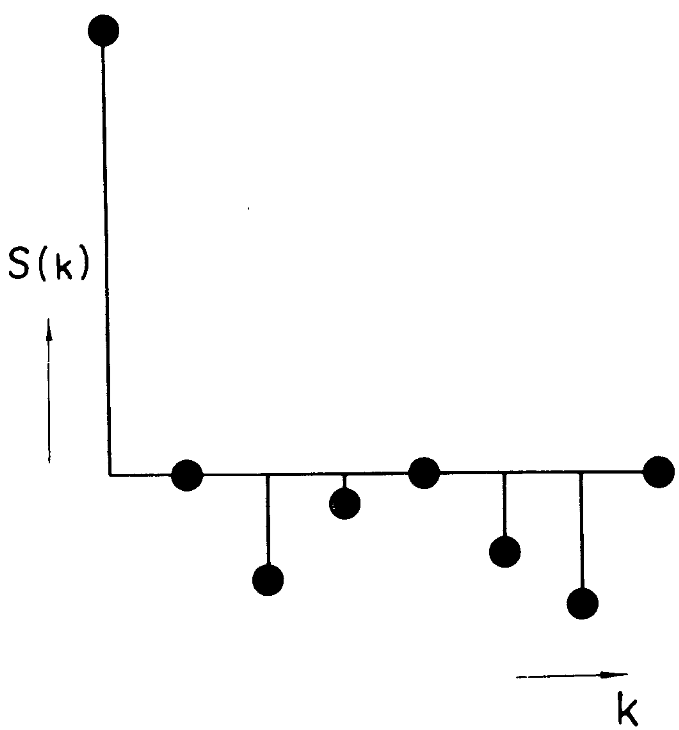

Рис. 3. Уолш-образ $S(k)$ *функции* $f(x)$ */рис. 2/.*

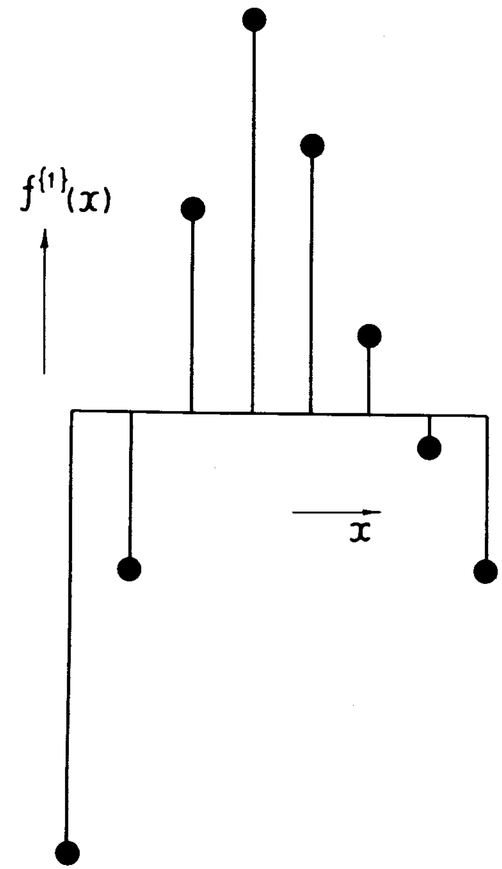

Рис. 4. Диадная производная первого порядка функции $f(x)$, *приведенной на рис. 2.*

6. Диадную производную решетчатой функции $f(x)$ можно записать в виде

$$f^{\{1\}}(x) = f(x) \overset{\circ}{\otimes} \delta^{\{1\}}(x), \qquad /28/$$

где $\overset{\circ}{\otimes}$ - оператор диадной свертки, которая по определению равна

$$a(x) \overset{\circ}{\otimes} b(x) = \sum_{\xi=0}^{2^n-1} a(\xi)\, b(\xi \oplus x), \qquad /29/$$

где $a(x)$ и $b(x)$ - две произвольные решетчатые функции, заданные в точках $x = 0,1,2,\ldots,2^n - 1$, а $\delta^{\{1\}}(x)$ - диадная производная дельта-функции Кронекера в точках x. При этом

$$\delta^{\{1\}}(x) = \frac{1}{2^{n/2}} \sum_{k=0}^{2^n-1} k \cdot u_k(x), \qquad /30/$$

а $u_k(x)$ – адамаровски упорядоченные функции Уолша.

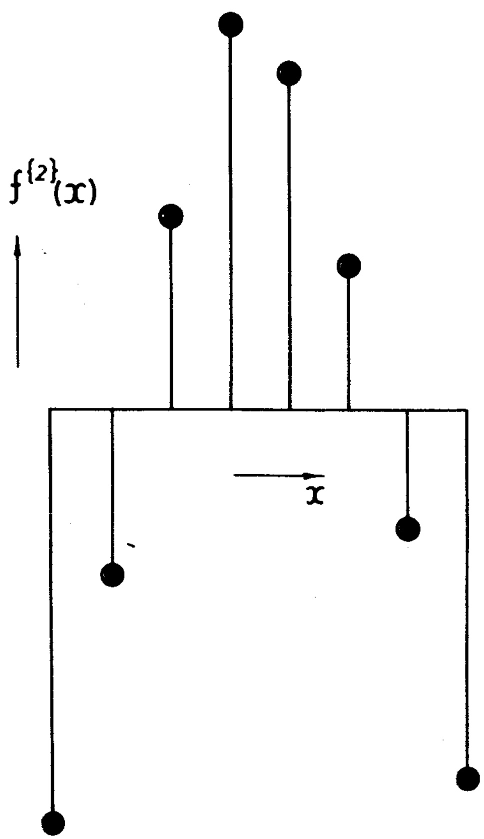

Рис. 5. Диадная производная второго порядка функции $f(x)$, *приведенной на рис. 2.*

Напомним [15], что аналогичным образом записывается производная обобщенной функции, а именно: если $f(x)$ - обобщенная функция или распределение, а $g(x)$ - функция, которая имеет непрерывные производные всех порядков и отлична от нуля только в конечной области независимого переменного x, то

$$< \frac{df(x)}{dx}, g(x) > = < f(x), - \frac{dg(x)}{dx} >, \qquad /31/$$

где

$$< \phi(x), \psi(x) > = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\psi(x)dx. \qquad /32/$$

Видно, что операция дифференцирования обобщенной функции имеет вид свертки с некоторым ядром. Процесс дифференцирования обобщенных функций сводится к построению соответствующего сверточного ядра.

Между тем, если совершить переход из исходного в обратное пространство, используя для этого обратное преобразование Фурье, то операция свертки исходной функции с соответствующим ядром перейдет в операцию умножения фурье-образа исходной функции на фурье-образ сверточного ядра. При этом для оператора классического дифференцирования $\hat{D}$ получаем:

$$\hat{D} f(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}} (-i\omega) F(\omega), \qquad /33/$$

где $\hat{\mathfrak{F}}$ - оператор преобразования Фурье, а $F(\omega)$- фурье-образ исходной функции $f(x)$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \qquad /34/$$

7. Аналогичное соотношение имеет место для решетчатых функций, заданных на циклической группе, когда $x = 0,1,2,\ldots, N-1$, а N - произвольное целое число. Операцией на циклической группе является сложение по модулю N. Аналогом преобразования Фурье здесь является дискретное преобразование Фурье

$$f(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}_N} F_N(\omega) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-i\frac{2\pi}{N}\omega x} \quad , \qquad /35/$$

где, строго говоря, следовало бы писать не ωx, а $\omega x, \mod N$. Но в силу периодичности экспоненты обе записи оказываются эквивалентными. При этом экспоненты $\exp(i\frac{2\pi}{N}\omega x)$ являются собственными функциями оператора *дискретного* дифференцирования $\hat{D}_N$:

$$\hat{D}_N[e^{i\frac{2\pi}{N}\omega x}] = (i\frac{2\pi}{N}\omega)e^{i\frac{2\pi}{N}\omega x} \quad . \qquad /36/$$

Поскольку произвольную решетчатую функцию $f(x)$, заданную на циклическом носителе, можно преобразовать в дискретный фурье-образ $F_N(\omega)$, то по аналогии с /33/ имеет место следующее соотношение:

$$\hat{D}_N f(x) \xrightarrow{\hat{\mathfrak{F}}_N} (-i\frac{2\pi}{N}\omega)F_N(\omega). \qquad /37/$$

При переходе в исходное пространство операция умножения $(-i\frac{2\pi}{N}\omega)$ на $F_N(\omega)$ перейдет в операцию свертки исходной функции $f(x)$ со сверточным ядром оператора дискретного дифференцирования, которое имеет вид

$$\delta^{\{1\}}(x) = \frac{2\pi}{N}\sum_{\omega=0}^{N-1}(-i\omega)e^{-i\frac{2\pi}{N}\omega x}$$

$$= \frac{2\pi}{N}(I_1 - iI_2), \qquad /38/$$

где

$$I_1(x) = \sum_{\omega=0}^{N-1}\omega \sin\frac{2\pi}{N}\omega x,$$

$$I_2(x) = \sum_{\omega=0}^{N-1}\omega \cos\frac{2\pi}{N}\omega x. \qquad /39/$$

На *рис. 6* приведены функции $I_2(x)$ для $N=8$ и $N=128$ при $x=0,1,\ldots,\frac{N}{2}-1$. На *рис. 7* эти же функции представлены в логарифмической шкале. Видно, что при малых значениях x функция $I_2(x)$ описывается гиперболой, стягивающейся к оси ординат по мере увеличения числа точек N. Следующее приближение для $I_2(x)$ имеет вид

$$I_2(x) \approx \frac{N^2}{2\pi}\cos\frac{\pi x}{N}\cdot\frac{1}{x} \qquad /40/$$

8. Теперь вернемся к сверточному ядру диадной производной. Если его первую строчку записать в двоично инвертированном порядке, т.е. числа (x_0, x_1, x_2) превратить в (x_2, x_1, x_0), то

$$a(\bar{x},0) = -\frac{1}{2}[-7,4,2,0,1,0,0,0].$$

На *рис. 8* приведены значения $a(\bar{x},0)$ для $N=32$, кроме точки $\bar{x}=0$.

Видно, что огибающая элементов строки в инвертированном порядке также является гиперболой $\sim 1/\bar{x}$, но сами элементы отличны от нуля лишь в тех точках, двоичные представления которых содержат только один двоичный разряд, отличный от нуля /*рис. 7*/.

9. Следует отметить, что *прямая разность* для решетчатой функции $f(x)$ в точке x, равная по определению

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \qquad /41/$$

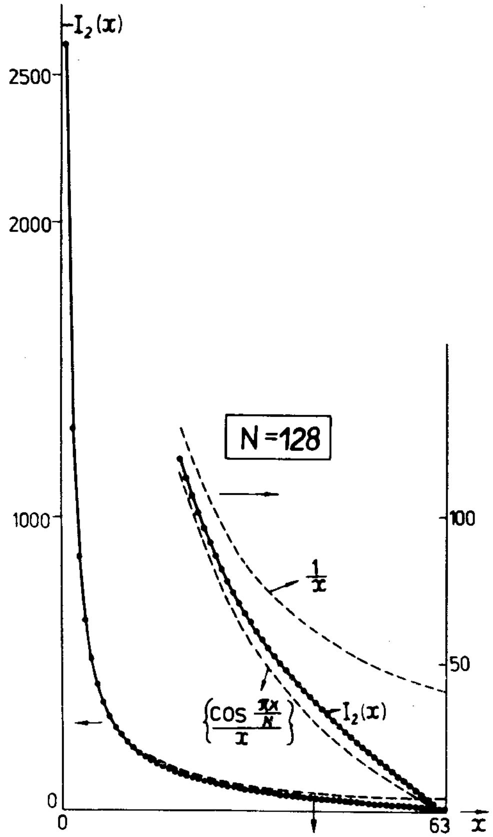

Рис. 6. Вид функции $I_2(x)$, *определяющей сверточное ядро оператора дискретного дифференцирования решетчатой функции, заданной на циклическом носителе с* $N=8$ *и* $N=128$.

не имеет смысла дискретной производной. Действительно, в обратном пространстве прямой разности соответствует множитель вида

$$\left(e^{i\frac{2\pi}{N}\omega}-1\right), \qquad /42/$$

который *не является линейной функцией* частоты ω.

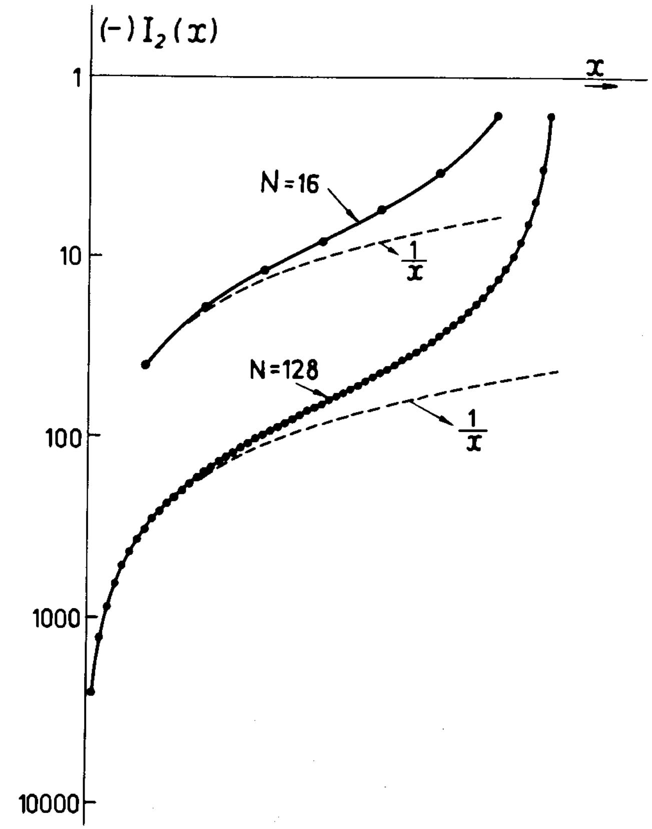

Рис. 7. Функция $I_2(x)$ *для* $N=8$ *и* $N=128$ *в логарифмическом масштабе.*

10. Отметим, наконец, что сверточное ядро $g(x)$ преобразования Гильберта

$$f(x)\xrightarrow{\hat{\mathcal{H}}}\chi(x)=f(x)*g(x)$$

также имеет вид гиперболы

$$g(x)=\frac{P}{\pi}\,\frac{1}{x}, \qquad /43/$$

где P означает, что интегрирование ведется в смысле главного значения.

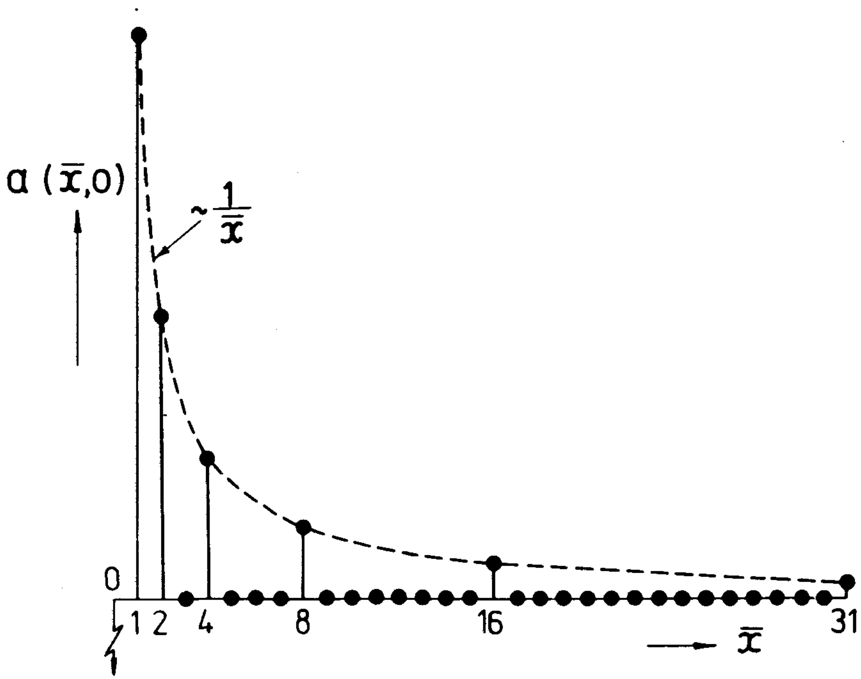

Рис. 8. Структура сверточного ядра оператора диадной производной, представленного в двоично-инвертированной системе координат для N=32, *кроме точки* $\bar{x}=0$. *Огибающая "частокола" является гиперболой. Отличны от нуля только те компоненты сверточного ядра диадной производной, координаты которой содержат только один двоичный разряд, отличный от нуля.*

11. Выводы: Оператор дифференцирования как в классическом математическом анализе, в частности, в теории обобщенных функций, так и в теории решетчатых функций, для носителя циклической или диадной структуры, является линейной функцией частоты или соответствующей переменной, имеющей смысл волнового числа, в соответствующем обратном пространстве.

Различия в групповых свойствах носителя приводят к различию в определении перехода от исходного пространства к обратному. В классическом анализе, где носителем являются вещественные числа, это - преобразование Фурье. Для решетчатых функций, носитель которых имеет циклическую структуру, это - дискретное преобразование Фурье. Для решетчатых функций, заданных на носителе с диадной структурой, это - дискретное преобразование Уолша.

Сверточное ядро операторов дифференцирования решетчатых функций на циклическом носителе в первом приближении имеет вид гиперболы, стягивающейся к оси ординат по мере увеличения числа точек. Вид гиперболы имеет огибающая сверточного оператора диадной производной решетчатой функции на носителе с диадной структурой, если ее представить в зависимости от двоично инвертированной координаты. При этом сверточный оператор диадной производной отличен от нуля только для тех точек, координата которых в двоичном представлении содержит только один двоичный разряд, отличный от нуля.

В заключение автор выражает признательность Дж.Е.Гиббсу, с которым автор поддерживает научные связи, и Н.Я.Виленкину за полезные обсуждения вопросов, затронутых в сообщении.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J.E.Gibbs. Walsh Spectroscopy, a Form of Spectral Analysis Well Suited to Binary Digital Computation. Nat. Phys. Lab., Teddington, 1966.*
2. *J.E.Gibbs and M.J.Millard. Walsh Functions as Solutions of a Logical Differential Equation. Nat. Phys. Lab., Teddington, DES Report No. 1, Dec. 1969.*
3. *J.E.Gibbs and M.J.Millard. Some Methods of Solution of Linear Ordinary Logical Differential Equations. Nat. Phys. Lab., Teddington, DES Report No. 2, Dec. 1969.*
4. *J.E.Gibbs. Functions that are Solutions of a Logical Differential Equation. Nat. Phys. Lab., Teddington, DES Report No. 4, April, 1970.*
5. *J.E.Gibbs and B.Ireland. Some Generalizations of the Logical Derivative. Nat. Phys. Lab., Teddington, DES Report No. 8, August, 1971.*
6. *J.E.Gibbs. The Diadic Group and the Second Industrial Revolution. Symp. on Theory and Appli-*

cations of Walsh Functions, Hatfield, England, June 19, 1971, p. 227-232.

7. *P.L.Butzer and H.J.Wagner. Walsh-Fourier Series and the Concept of a Derivative. Applicable Analysis an Internat. Journal, 1, No. 3, 1973, p. 29-46.*
8. *P.L.Butzer and H.J.Wagner. Approximation by Walsh Polynomials and the Concept of a Derivative. Symp. on the Applications of Walsh Functions, Washington, D.C., March 27, 1973, p. 388-392.*
9. *P.L.Butzer and H.J.Wagner. A Caculus for Walsh Functions Defined on B_+. Symp. on the Applications of Walsh Functions, Washington, D.C., April 16, 1973, pp. 75-81.*
10. *J.E.Gibbs. Differentiation and Frequency of the Dyadic Group. Nat. Phys. Lab., Teddignton, DES Report No. 18, April, 1975.*
11. *J.E.Gibbs and B.Ireland. Walsh Functions and Differentiation. Applications of Walsh Functions and Sequency Theory, Washington, D.C., 1974, p. 147-176.*
12. *S.Cohn-Sfetcu and J.E.Gibbs. Harmonic Differential Calculus and Filtering in Galois Fields. 1976 IEEE Internat. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Philadelphia, April 4, 1976, pp. 1-6.*
13. *См.* /11/, *стр. 172.*
14. *Л.С.Понтрягин. Непрерывные группы. Наука, М., 1973, стр. 243-265.*
15. *Л.М.Сороко. Основы голографии и когерентной оптики.Наука, М., 1971, стр. 85-97.*

Рукопись поступила в издательский отдел 19 апреля 1976 года.