СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11-97-67

М.В.Алешин*, И.П.Юдин

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИСКОРЕЙШЕГО СПУСКА К ЗАДАЧАМ МАГНИТОСТАТИКИ

*МГТУ им.Н.Э.Баумана

1997

1. Постановка задачи и метод ее решения

Предметом данной работы является нелинейная задача магнитостатики в интегральной постановке для магнитных полей. Побудительным мотивом к выбору ее конкретной формы и анализу послужила статья [1]. Автором последней предлагался метод решения, сходимость которого не ухудшается с ростом восприимчивости магнитной среды. Достоверная оценка ошибки метода, однако, отсутствовала. Нами доказывается разрешимость той же задачи методом наискорейшего спуска [2]. Его сходимость даже улучшается с ростом величины и однородности магнитной восприимчивости. Кроме того простой оказывается оценка погрешности каждого приближения.

Более точно рассматривается магнетик в поле катушки с током. Магнетик занимает область пространства D, обмотка катушки – D', плотность тока $\vec{j}$. Уравнение системы $\vec{f}(\vec{r}) + \vec{\nabla}(\frac{1}{4\pi}\int\limits_D (\vec{g}(\vec{r}\,',\,\vec{f}(\vec{r}\,'))\cdot\vec{\nabla}')\,\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d\vec{r}\,') = \vec{h}(\vec{r})$ с правой частью $\vec{h}(\vec{r}) = [\vec{\nabla}\times\frac{1}{4\pi}\int\limits_{D'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{j}(\vec{r}\,')\,d\vec{r}\,']$ и неизвестными $\vec{f}$ – напряженностью магнитного поля, $\vec{g}(\vec{f})$ – намагниченностью магнетика (все величины безразмерные). На D то же уравнение запишем в виде $\vec{f} + K\vec{g}(\vec{f}) = \vec{h}$. Зависимость $\vec{g}(\vec{f})$ будем предполагать абсолютно непрерывной и ограниченной, восприимчивость магнетика – положительной. Цель работы – построение $\vec{f}$ как элемента $\vec{L}_2(D)$ – пространства измеримых на D векторных функций с конечной нормой $\|\cdot\| = (\int\limits_D |\cdot|^2 d\vec{r})^{1/2}$.

В пределах $\vec{L}_2(D)$ (оно гильбертово) оператор K непрерывен, самосопряжен и неотрицателен [3]. Его область значений принадлежит $\vec{\nabla}[W_2^1(D)]$, где под $W_2^1(D)$ понимается пространство слабо дифференцируемых функций, наделенных нормой $\left(\int\limits_D |\cdot|^2 d\vec{r} + \int\limits_D |\vec{\nabla}\cdot|^2 d\vec{r}\right)^{1/2}$. Обозначим через $\vec{P}(D)$ ортогональное дополнение $\vec{\nabla}[W_2^1(D)]$ в $\vec{L}_2(D)$. Очевидно K на $\vec{P}(D)$ является нулевым, то есть $\vec{P}(D)$ – собственное подпространство K. Легко выделить еще одно собственное подпространство этого оператора. Пусть $G_2^1(D)$ – замыкание в $W_2^1(D)$ тех бесконечно дифференцируемых функций, чей носитель принадлежит D. Тогда линейное многообразие $\vec{\nabla}[G_2^1(D)]$ замкнуто по норме $\vec{L}_2(D)$, и K отображает каждый его элемент в себя [3]. Остается рассмотреть K на множестве $\vec{Q}(D) = \vec{L}_2(D) \ominus \vec{P}(D) \ominus \vec{\nabla}[G_2^1(D)]$. В работе [4] обоснована положительная определенность $K\downarrow\vec{Q}(D)$ для D с липшицевой границей S. Именно это обстоятельство позволяет воспользоваться методом наискорейшего спуска (далее S – липшицево многообразие).

Введем оператор M, обратный $K\downarrow\vec{Q}(D)$, а также ортогональные проекторы $\Pi^{(g)}$, $\Pi^{(h)}$ из $\vec{L}_2(D)$ на $\vec{\nabla}[G_2^1(D)]$ и $\vec{Q}(D)$, соответственно. Дополняя их оператором $R(\vec{f}) = \Pi^{(g)}(\vec{f}-\vec{h}) + M\Pi^{(h)}(\vec{f}-\vec{h}) + (\Pi^{(g)}+\Pi^{(h)})\vec{g}(\vec{f})$, представим исследуемую задачу системой уравнений $(1-\Pi^{(g)}-\Pi^{(h)})(\vec{f}-\vec{h}) = 0$, $R(\vec{f}) = 0$. Решение данной системы можно искать итерационной процедурой: $\vec{f}_0 = \vec{h}$, $\vec{f}_{m+1} = \vec{f}_m - t_m R(\vec{f}_m)$, в которой постоянные t_m выбираются из условия минимальности норм векторов $R(\vec{f}_{m+1}) = \Pi^{(g)}(\vec{f}_m - \vec{h}) + M\Pi^{(h)}(\vec{f}_m - \vec{h}) - t_m(\Pi^{(g)}+$

$$+M\Pi^{(h)})R(\vec{f}_m) + (\Pi^{(g)}+\Pi^{(h)})\vec{g}(\vec{f}_m - t_m R(\vec{f}_m)) = (1 - \int\limits_0^{t_m} U_m(t)\,dt)R(\vec{f}_m).$$

Здесь $U_m(t)\vec{p} = (\Pi^{(g)} + M\Pi^{(h)})\vec{p} + (\Pi^{(g)}+\Pi^{(h)})(\vec{p}\cdot\dfrac{\partial}{\partial\vec{f}})\vec{g}(\vec{f}_m - tR(\vec{f}_m))$ для любого $\vec{p}\in\vec{L}_2(D)$. Обозначим $\alpha_m(t)$, $\beta_m(t)$ – нижнюю и верхнюю грани $\|U_m(t)\vec{p}\|$ на единичной сфере пространства $\vec{\nabla}[G_2^1(D)] \oplus \vec{Q}(D)$. Благодаря положительной восприимчивости магнетика все $\alpha_m(t)$, $\beta_m(t)$ принадлежат конечному сегменту $[\alpha,\beta]$ с левой границей $\alpha > 0$. Учитывая это обстоятельство, потребуем выполнения равенства $1 - \int\limits_0^{t_m}\alpha_m(t)\,dt = \int\limits_0^{t_m}\beta_m(t)\,dt - 1$.

Выбор t_m гарантирует сходимость $\{R(\vec{f}_m)\}$ к нулю. Действительно,

$$\|R(\vec{f}_m)\| \le \eta_{m-1}\,\|R(\vec{f}_{m-1})\| \le \ldots \le \eta_{m-1}\ldots\eta_0\,\|R(\vec{f}_0)\|,$$

$$\eta_m = 1 - \int\limits_0^{t_m}\alpha_m(t)\,dt = (\int\limits_0^{t_m}(\beta_m(t)-\alpha_m(t))\,dt)/(\int\limits_0^{t_m}(\alpha_m(t)+\beta_m(t))\,dt) \le \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta} < 1.$$

С другой стороны $\|R(\vec{f}_{m'}) - R(\vec{f}_m)\| = \|(\Pi^{(g)} + M\Pi^{(h)})(\vec{f}_{m'} - \vec{f}_m) + (\Pi^{(g)}+$ $+\Pi^{(h)})\int\limits_0^1((\vec{f}_{m'}-\vec{f}_m)\cdot\dfrac{\partial}{\partial\vec{f}})\vec{g}(\vec{f}_m + t(\vec{f}_{m'}-\vec{f}_m))\,dt\| \ge \alpha\,\|\vec{f}_{m'}-\vec{f}_m\|$. Эта оценка доказывает не только существование $\lim\limits_{m\to\infty}\vec{f}_m = \vec{f}$, но и единственность $\vec{f}$ как решения уравнений $(1-\Pi^{(g)}-\Pi^{(h)})(\vec{f}-\vec{h}) = 0$, $R(\vec{f}) = 0$. Она же определяет близость $\vec{f}_m$ к решению $\|\vec{f}-\vec{f}_m\| \le \dfrac{1}{\alpha}\,\|R(\vec{f}) - R(\vec{f}_m)\| = \dfrac{1}{\alpha}\,\|R(\vec{f}_m)\|$. Что касается эффективности метода, то она повышается (η_m становятся меньше) с ростом величины и однородности магнитной восприимчивости.

2. Построение $\Pi^{(g)}$, $\Pi^{(h)}$, M для гладких векторов

Реализация описанной выше процедуры предполагает знание $\Pi^{(g)}$, $\Pi^{(h)}$, M. Докажем принципиальную возможность их итерационного построения в случае магнетика, ограниченного односвязной поверхностью Ляпунова [5]. По самому смыслу искомых операторов, какие бы ни были $u\in G_2^1(D)$, $v\in W_2^1(D)$, $\vec{p}\in\vec{L}_2(D)$ и $\vec{q}$ с компонентами из $G_2^1(D)$, выполняется

$$\int\limits_D(\vec{\nabla}u\cdot(\vec{p}-\Pi^{(g)}\vec{p}))\,d\vec{r} = 0, \quad \int\limits_D(\Pi^{(g)}\vec{p}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{q}])\,d\vec{r} = 0,$$

$$\int\limits_D(\vec{\nabla}v\cdot(\vec{p}-\Pi^{(g)}\vec{p}-\Pi^{(h)}\vec{p}))\,d\vec{r} = 0, \quad \int\limits_D(\Pi^{(h)}\vec{p}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{q}])\,d\vec{r} = 0,$$

$$\int\limits_D(\vec{\nabla}v\cdot(\Pi^{(h)}\vec{p} - K(M\Pi^{(h)}\vec{p})))\,d\vec{r} = 0, \quad \int\limits_D(M\Pi^{(h)}\vec{p}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{q}])\,d\vec{r} = 0.$$

Рассмотрим вначале те $\vec{p}$, которые непрерывно дифференцируемы на $\bar{D}$ (они образуют плотное подмножество $\vec{L}_2(D)$ [3]). Для подобных векторов

$$\int\limits_D(\vec{\nabla}u\cdot\Pi^{(g)}\vec{p})\,d\vec{r} = \int\limits_D(\vec{\nabla}u\cdot\vec{p})\,d\vec{r} = -\int\limits_D u\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})\,d\vec{r} = -\int\limits_D(\vec{\nabla}u\cdot\vec{\nabla}J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}))\,d\vec{r}$$

или $\Pi^{(g)}\vec{p} = -\vec{\nabla}J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})$, где J – оператор Грина задачи Дирихле [5]. В результате $\Pi^{(g)}\vec{p}$ обладает непрерывной нормальной производной на S и квадратично-интегрируемыми слабыми производными внутри D. Последние удовлетворяют соотношению $(\vec{\nabla}\cdot\Pi^{(g)}\vec{p}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{p})$. Воспользуемся еще плотностью в

$W_2^1(D)$ пространства непрерывно дифференцируемых на $\bar{D}$ функций $C^1(\bar{D})$ [3]. Указанные положения позволяют заменить первое соотношение на $\Pi^{(h)}\vec{p}$ эквивалентным: $\forall v \in C^1(\bar{D})$ $\int\limits_D (\vec{\nabla} v \cdot \Pi^{(h)}\vec{p})\, d\vec{r} = \int\limits_S v\,((\vec{n}\cdot\vec{p}) + \frac{\partial}{\partial n}(J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})))\, d\sigma$ ($\vec{n}$ – внешняя нормаль к S). Будем искать $\Pi^{(h)}\vec{p}$ в виде градиента потенциала простого слоя w с нормальной производной $\frac{\partial w}{\partial n} = (\vec{n}\cdot\vec{p}) + \frac{\partial}{\partial n}(J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}))$. Тогда $(K\Pi^{(h)}\vec{p})(\vec{r}) = \vec{\nabla}(\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial w}{\partial n}(\vec{r}\,')\, d\sigma')$, а $M\Pi^{(h)}\vec{p} = \vec{\nabla}\tilde{w}$ определяется равенством $\vec{\nabla}(\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial n}(\vec{r}\,')\, d\sigma') = \vec{\nabla} w(\vec{r})$.

Ради упрощения дальнейших записей введем обозначения:

$C(S)$, $C(\bar{D})$ – пространства непрерывных на S, $\bar{D}$ функций;

Γ, Υ – операторы следа и нормальной производной (на S) функций $C^1(\bar{D})$;

$$\Xi\,:\ \forall\phi \in C(S)\ \ (\Xi\phi)(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{(\vec{n}(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,'))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\phi(\vec{r}\,')\, d\sigma',\ \ \vec{r}\in D;$$

$$\Phi\,:\ \forall\psi \in C(S)\ \ (\Phi\psi)(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\psi(\vec{r}\,')\, d\sigma',\ \ \vec{r}\in \bar{D};$$

$$F\,:\ \forall f \in C(\bar{D})\ \ (Ff)(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_D \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,f(\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,',\ \ \vec{r}\in \bar{D}.$$

Помимо этого на $C(S)$ рассмотрим $A = \Gamma\Xi + 1$, $B = \Upsilon\Phi - 1$, $T = \Gamma\Phi$ (Γ, Υ имеют здесь смысл продолжений с $C^1(\bar{D})$). В соответствии с теорией потенциала $J = F - \Xi(A-1)^{-1}\Gamma F = F - \Phi(B-1)^{-1}\Upsilon F$ (второе равенство объясняется включением $F[C(\bar{D})] \subset C^1(\bar{D})$ и симметрией функции Грина по ее переменным [5]). Величины $\Pi^{(h)}\vec{p} = \vec{\nabla}\Phi\phi$, $M\Pi^{(h)}\vec{p} = \vec{\nabla}\Phi\psi$, в свою очередь, могут быть найдены из уравнений $(1+B)\phi = (\vec{n}\cdot\vec{p}) + \Upsilon(J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}))$, $(1+B)^2\psi = (1+B)\phi$. Отсюда, чтобы получить $\Pi^{(g)}\vec{p}$, $\Pi^{(h)}\vec{p}$, $M\Pi^{(h)}\vec{p}$, достаточно построить резольвенту B в точках $\lambda = \pm 1$.

Свойства оператора B хорошо известны [5]. Его спектр, будучи дискретным, содержится в полуинтервале $[-1,1)$. Собственное подпространство, отвечающее значению $\lambda = -1$, одномерно. Для любого элемента μ этого подпространства $\vec{\nabla}\Phi\mu = 0$. Условие $\int\limits_S \phi\, d\sigma = 0$ выделяет на $C(S)$ то дополнение к μ, в пределах которого спектральный радиус B меньше единицы. Функции

$(1+B)\phi$, а также $(\vec{n}\cdot\vec{p}) + \Upsilon J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})$ данному условию всегда удовлетворяют:

$$\int\limits_S ((\vec{n}\cdot\vec{p}) + \Upsilon(J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}))\, d\sigma = \int\limits_D (\vec{\nabla}\cdot(\vec{p} - \Pi^{(g)}\vec{p}))\, d\vec{r} = 0.\quad \int\limits_S B\phi\, d\sigma = -\int\limits_S \phi\, d\sigma$$

(смотрите о значении интеграла Гаусса в [5]). Учтем еще тождество

$$(1-B)(1+B)(1+B^2)\ldots(1+B^{2^m}) = 1 - B^{2^m}\cdot B^{2^m}.$$

существование $\lim\limits_{m\to\infty} B^{2^m}\phi = ((\int\limits_S \phi\, d\sigma)/(\int\limits_S \mu\, d\sigma))\mu$, равномерного на $C(S)$, и непрерывность $\Phi : C(S) \to W_2^1(D)$ [3]. Благодаря им в топологии $\vec{L}_2(D)$:

$$\Pi^{(g)}\vec{p} = -\vec{\nabla}F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) - \lim_{m\to\infty}\vec{\nabla}\Phi(1+B)(1+B^2)\ldots(1+B^{2^m})\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}).$$

$$\Pi^{(h)}\vec{p} = \lim_{m\to\infty}\vec{\nabla}\Phi(1+B^2)\ldots(1+B^{2^m})(1-B)((\vec{n}\cdot\vec{p}) + \Upsilon J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})).$$

$$M\Pi^{(h)}\vec{p} = \lim_{m\to\infty}\vec{\nabla}\Phi(1+B^2)^2\ldots(1+B^{2^m})^2(1-B)^2((\vec{n}\cdot\vec{p}) + \Upsilon J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})).$$

причем $(1-B)\Upsilon J(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) = (1-B)\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) + (1+B)\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) = 2\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})$.

3. Построение $\Pi^{(g)}$, $\Pi^{(h)}$, M на $\vec{L}_2(D)$

Действие $\vec{\nabla}$ непосредственно на $\vec{p}$ ограничивает применение полученных представлений $\Pi^{(g)}$, $\Pi^{(h)}$, M. Однако, в случае оператора $\Pi^{(g)}$ ранее упоминавшаяся симметрия функции Грина по ее переменным позволяет устранить этот недостаток: $\Pi^{(g)}\vec{p} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla}F,\vec{p}) - \vec{\nabla}\Xi(1-A)^{-1}\Gamma(\vec{\nabla}F,\vec{p})$. Преимущество данной формы проектора – существование единственных продолжений $(\vec{\nabla}F,\cdot)$ и Γ до непрерывных $(\vec{\nabla}F,\cdot) : \vec{L}_2(D) \to W_2^1(D)$, $\Gamma : W_2^1(D) \to L_2(S)$ [6]. Под $L_2(S)$ здесь понимается пространство квадратично-интегрируемых на S функций с обычным скалярным произведением $(\cdot,\cdot) = \int\limits_S (\cdot)(\cdot)\, d\sigma$. Поскольку переход от $C(S)$ к $L_2(S)$ не меняет резольвентного множества A [5], $\Xi(1-A)^{-1}\Gamma(\vec{\nabla}F,\vec{p})$ для $\vec{p}$ из $\vec{L}_2(D)$ можно определить потенциалом двойного слоя с интегрируемой плотностью. Градиент такого потенциала совпадает с $(-\Pi^{(g)}\vec{p} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla}F,\vec{p}))$ (как предел последовательности гладких векторов) на любом компакте в D. Следовательно, $\Xi(1-A)^{-1}\Gamma(\vec{\nabla}F,\vec{p})$ является элементом $W_2^1(D)$ и представление оператора $\Pi^{(g)} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla}F,\cdot) - \vec{\nabla}\Xi(1-A)^{-1}\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot)$ сохраняется на $\vec{L}_2(D)$.

Таким образом, вновь встает вопрос о построении резольвенты теперь уже оператора A на области значений $\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot)$. Топологию этой области можно индуцировать из $\vec{L}_2(D)$, введя полускалярное произведение

$$<\cdot,\cdot>=\int_D(\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}\cdot,\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}\cdot)\,d\vec{r}.$$

Соответствующая полунорма обращается в ноль только для постоянной. Учтем также положительную определенность $K=-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}F,\cdot)$ на $\vec{\nabla}[W_2^1(D)]$ – замкнутом подмножестве $\vec{L}_2(D)$ [4]. Оба обстоятельства позволяют отнести к элементам введенного топологического пространства все функции $\Gamma[W_2^1(D)]$. На множестве тех из них, которые являются граничными значениями потенциалов простого слоя с непрерывной плотностью, имеем

$$\|\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}\cdot\|^2=\int_S(\Gamma\Xi(A-1)^{-1}\cdot)(\Upsilon\Xi(A-1)^{-1}\cdot)\,d\sigma=$$

$$=\int_S(\cdot(T^{-1}(1+A)\cdot))\,d\sigma=\int_S|T^{-1/2}(1+A)^{1/2}\cdot|^2\,d\sigma,$$

$$\int_D(\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}\cdot,K\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}\cdot)d\vec{r}=\int_D(\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}\cdot,\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}\frac{1}{2}(1+A)\cdot)d\vec{r}=$$

$$=\int_S(T^{-1/2}(1+A)^{1/2}\cdot)(\frac{1}{2}(1+T^{-1/2}AT^{1/2})T^{-1/2}(1+A)^{1/2}\cdot)\,d\sigma.$$

Здесь использованы тождества Грина для гармонических функций и равенство $AT=TB$, справедливое на $L_2(S)$ для эрмитово-сопряженных A, B и положительного T [5]. Покажем, что приведенные соотношения могут служить исходным пунктом исследования A на области значений $\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot)$.

Обозначим $H_2^1(D)$ – подпространство обобщенно-гармонических функций в $W_2^1(D)$. Очевидно $\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}$ является открытым и непрерывным отображением $\Gamma[W_2^1(D)]=\Gamma[H_2^1(D)]$ на $\vec{Q}(D)=\vec{\nabla}[H_2^1(D)]$ (напомним, топология первого множества определяется произведением $<\cdot,\cdot>$). С другой стороны из тождества $\int_D(\vec{\nabla}u,\vec{\nabla}v)\,d\vec{r}=\int_S(\Gamma u)(\Upsilon v)\,d\sigma$, выполняющегося для всех функций $u\in H_2^1(D)$ и $v\in\Phi[C(S)]$, следует плотность $\vec{\nabla}\Phi[C(S)]$ в $\vec{\nabla}[H_2^1(D)]$. Естественно $T[C(S)]$ – совокупность граничных значений потенциалов простого слоя тоже плотна в $\Gamma[W_2^1(D)]$. Отсюда упомянутые интегральные соотношения свидетельствуют об унитарной эквивалентности $2K-1$ на $\vec{Q}(D)$, A на

$\Gamma[W_2^1(D)]$ и $T^{-1/2}AT^{1/2}$ на замыкании $T^{1/2}(1+B)[C(S)]$ по норме $L_2(S)$. Анализ третьего оператора оказывается наиболее простым. Будем исходить из четырех посылок. Первая – взаимосвязь операторов $T^{-1/2}AT^{1/2}$ и K. Она влечет ограниченность и эрмитовость $T^{-1/2}AT^{1/2}$ на $\overline{T^{1/2}(1+B)[C(S)]}$. Вторая посылка – представление $L_2(S)=T[\mathrm{Ker}(1+B)]\oplus(1+B)[L_2(S)]$ [7]. Согласно ей, ортогональное дополнение $T^{1/2}(1+B)[C(S)]$ исчерпывается в $L_2(S)$ линейным многообразием $T^{1/2}[\mathrm{Ker}(1+B)]$, на котором $(T^{-1/2}AT^{1/2})(T^{1/2}\mu)=-T^{1/2}\mu$ (напомним, μ – произвольный элемент $\mathrm{Ker}(1+B)$). Сопоставляя этот результат с предыдущим, получим ограниченность и эрмитовость $T^{-1/2}AT^{1/2}$ на всем $L_2(S)$. Третья посылка – непрерывность ядра интегрального оператора A^{2k} при достаточно большом k [5]. Она обуславливает конечность суммы $\sum_m(\phi_m,\,A^{2k}\phi_m)=\sum_m(\phi_m,\,(T^{-1/2}AT^{1/2})^{2k}\phi_m)$ для $\{\phi_m\}$ – системы собственных функций T. В сочетании с ограниченностью и эрмитовостью $T^{-1/2}AT^{1/2}$ последнее означает компактность данного оператора [8]. Спектры же компактных A, B, $T^{-1/2}AT^{1/2}$ (компактных на $L_2(S)$) одинаковы благодаря четвертой посылке – совпадению $\mathrm{Ker}(\lambda+A)$ и $T[\mathrm{Ker}(\lambda+B)]$ при любом комплексном λ [7]. В итоге спектральный радиус $T^{-1/2}AT^{1/2}$ меньше единицы на замыкании $\overline{T^{1/2}(1+B)[C(S)]}=(1+T^{-1/2}AT^{1/2})[\overline{T^{1/2}[C(S)]}]=(1+T^{-1/2}AT^{1/2})[L_2(S)]$.

Предшествующий анализ подготовил итерационное построение проектора $\Pi^{(g)}=-\vec{\nabla}(\vec{\nabla}F,\cdot)-\vec{\nabla}\Xi(1-A)^{-1}\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot)$. Принимая во внимание непрерывность $(\vec{\nabla}F,\cdot):\vec{L}_2(D)\to W_2^1(D)$, уточним характер множества $\Gamma[W_2^1(D)]$. Приводившееся ранее соотношение $\|\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}\cdot\|^2=\int_S|T^{-1/2}(1+A)^{1/2}\cdot|^2d\sigma$ указывает на него как на область определения $T^{-1/2}(1+A)^{1/2}$ в пространстве $L_2(S)$. Эта область совпадает с $T^{1/2}[L_2(S)]$, поскольку $T^{-1/2}(1+A)^{1/2}T^{1/2}$ гомеоморфен на своей области значений [6], а $\mathrm{Ker}(1+A)^{1/2}=\mathrm{Ker}(1+A)$ содержится в $T^{1/2}[L_2(S)]$. Из свойств $T^{-1/2}(1+A)^{1/2}$ несложно также доказать непрерывность отображения $T^{-1/2}\Gamma:W_2^1(D)\to L_2(S)$. Способ построения

$\Pi^{(g)}$ подсказывает равенство

$$\vec{\nabla}\Xi(1-A)^{-1}\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot) = \vec{\nabla}\Xi T^{1/2}(1-T^{-1/2}AT^{1/2})^{-1}T^{-1/2}\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot).$$

Оно возвращает к ситуации, ранее уже встречавшейся в случае дифференцируемых векторов (роль B теперь играет $T^{-1/2}AT^{1/2}$). Остается воспользоваться непрерывностью $\vec{\nabla}\Xi T^{1/2} : L_2(S) \to \vec{L}_2(D)$ и нулевым значением $\vec{\nabla}\Xi T^{1/2}$ на $\mathrm{Ker}(1+T^{-1/2}AT^{1/2})$ (свидетельство первого $\vec{\nabla}\Xi T^{1/2} = \vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}(A-1)T^{1/2}$). В результате $\Pi^{(g)} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla}F,\cdot) - \lim\limits_{m\to\infty}\vec{\nabla}\Xi(1+A)(1+A^2)\ldots(1+A^{2^m})\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot)$, причем сходимость равномерна на $\vec{L}_2(D)$.

Подобно $\Pi^{(g)}$ могут быть построены $\Pi^{(h)}$ и $M\Pi^{(h)}$. Вспомним представление $\Pi^{(h)}\vec{p} = \lim\limits_{m\to\infty}\vec{\nabla}\Phi(1+B^2)\ldots(1+B^{2^m})((1-B)(\vec{n}\cdot\vec{p}) + 2\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}))$ для непрерывно дифференцируемых $\vec{p}$. Его продолжение на $\vec{L}_2(D)$ становится очевидным после преобразования потенциала простого слоя в потенциал двойного слоя: $\Pi^{(h)}\vec{p} = \lim\limits_{m\to\infty}\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}T(1+B^2)\ldots(1+B^{2^m})((1-B)(\vec{n}\cdot\vec{p})+$

$$+2\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})) = \lim_{m\to\infty}\vec{\nabla}\Xi(1+A^2)\ldots(1+A^{2^m})((A-1)^{-1}T\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})+$$

$+\frac{1}{2}T(\vec{n}\cdot\vec{p}))$. По формуле Грина $\Phi\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) = \Xi\Gamma F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})$ и $T\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) = (A-1)\Gamma F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p})$. Согласно второму равенству

$$(A-1)^{-1}T\Upsilon F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) + \frac{1}{2}T(\vec{n}\cdot\vec{p}) = \Gamma(F(\vec{\nabla}\cdot\vec{p}) - \frac{1}{2}\Phi(\vec{n}\cdot\vec{p})) = \Gamma(\vec{\nabla}F,\vec{p}).$$

Отсюда $\Pi^{(h)} = \lim\limits_{m\to\infty}2\vec{\nabla}\Xi(1+A^2)\ldots(1+A^{2^m})\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot)$. Аналогично

$$M\Pi^{(h)} = \lim_{m\to\infty}2\vec{\nabla}\Xi(1+A^2)^2\ldots(1+A^{2^m})^2(1-A)\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot).$$

Обе предельные процедуры сходятся на $\vec{L}_2(D)$ равномерно.

4. Случай кусочно-ляпуновской границы S

Полученные представления $\Pi^{(g)}$, $\Pi^{(h)}$, $M\Pi^{(h)}$ объясняются, по существу, тем, что норма A на $\Gamma[H_2^1(D)]$ с топологией произведения $<\cdot,\cdot>$ меньше единицы. Попробуем описать эту топологию в общепринятых терминах. Прежде

всего Γ и $\Xi(A-1)^{-1}$ (они обратны по отношению друг к другу) устанавливают гомеоморфизм между пространствами $H_2^1(D)$ и $W_2^{1/2}(S)$ [9]. нормой же $W_2^1(D)$ можно выбрать $|\int\limits_S\mu(\Gamma\cdot)\,d\sigma| + (\int\limits_D|\vec{\nabla}\cdot|^2d\vec{r})^{1/2}$ [10]. Ограничимся элементами $H_2^1(D)$, подчиняющимися требованию $\int\limits_S\mu(\Gamma\cdot)\,d\sigma = 0$. Если $\tilde{H}_2^1(D)$ - их подпространство в $W_2^1(D)$, то $\vec{\nabla}$ гомеоморфно отображает $\tilde{H}_2^1(D)$ на $\vec{Q}(D)$. Данное положение означает эквивалентность $\|\vec{\nabla}\Xi(A-1)^{-1}\cdot\|$ обычной норме $W_2^{1/2}(S)$ на элементах, ортогональных μ в смысле $L_2(S)$. Следовательно. выше доказана компактность A на $W_2^{1/2}(S)$, причем $W_2^{1/2}(S)$ как топологическое пространство совпадает с $T^{1/2}[L_2(S)]$, наделенным нормой $(\int\limits_S|T^{-1/2}\cdot|^2)^{1/2}$. Для произвольной ляпуновской поверхности компактность A на $W_2^{1/2}(S)$ - результат нетривиальный, поскольку он не вытекает из общих свойств интегральных операторов со слабой особенностью.

В заключение заметим, требования на гладкость границы магнетика можно ослабить. Чтобы сохранить равномерную сходимость пределов

$$\Pi^{(g)} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla}F,\cdot) - \lim_{m\to\infty}\vec{\nabla}\Xi(1+A)(1+A^2)\ldots(1+A^{2^m})\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot).$$

$$\Pi^{(h)} = \lim_{m\to\infty}2\vec{\nabla}\Xi(1+A^2)\ldots(1+A^{2^m})\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot).$$

$$M\Pi^{(h)} = \lim_{m\to\infty}2\vec{\nabla}\Xi(1+A^2)^2\ldots(1+A^{2^m})^2(1-A)\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot).$$

достаточно иметь S односвязной липшицевой поверхностью. образованной конечным числом ляпуновских кусков. В этом случае остаются неизменными разложение $\vec{L}_2(D) = \vec{P}(D)\oplus\vec{\nabla}[G_2^1(D)]\oplus\vec{\nabla}[H_2^1(D)]$, свойства K [4]. гомеоморфность следа Γ из $H_2^1(D)$ на $W_2^{1/2}(S)$ [9]. С другой стороны для D выполняются формула Остроградского — Гаусса и теорема о разрыве потенциала двойного слоя [5]. Область значений $\Gamma(\vec{\nabla}F,\cdot)$ на $\vec{L}_2(D)$ по-прежнему совпадает с областью значений $\Gamma(\vec{\nabla}F,\vec{\nabla}\cdot) = -\frac{1}{2}(1+A)\Gamma$ на $H_2^1(D)$. Поэтому через $\tilde{H}_2^1(D)$ можно обозначить образ $H_2^1(D)$ при действии оператора $(\vec{\nabla}F,\vec{\nabla}\cdot)$. Гомеоморфность отображения $\vec{\nabla} : \tilde{H}_2^1(D) \to \vec{Q}(D)$ обусловлена теперь положительной определенностью $K\downarrow\vec{Q}(D)$. Данный гомеоморфизм вместе с Γ устанавливает эквивалентность A на $\Gamma[\tilde{H}_2^1(D)]$ как подпространстве $W_2^{1/2}(S)$ и $(2K-1)$

на $\vec{Q}(D)$. Спектральный же радиус второго оператора меньше единицы [4]. Остается заметить, что из тождества $(\vec{\nabla} F, \vec{\nabla}\cdot) = -1 - \frac{1}{2}\Xi\Gamma$ следует непрерывность $\vec{\nabla}\Xi : W_2^{1/2}(S) \to \vec{Q}(D)$. Таким образом, итерационное построение $\Pi^{(g)}$, $\Pi^{(h)}$, $M\Pi^{(h)}$ действительно возможно для липшицевых областей с кусочно-ляпуновской границей. К подобным областям относятся, в частности, многогранники.

Литература

[1] Pasciak J. E. A New Scalar Potential Formulation of the Magnetostatic Field Problem. - Math. Comp. 1984, v. 43, no. 168, p. 415-431.

[2] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. - М.: ГИТТЛ. 1957.

[3] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. - М.: Наука. 1989.

[4] Friedman M. J., Pasciak J. E. Spectral Properties for the Magnetization Integral Operator. - Math. Comp. 1984, v. 43, no. 168, p. 447-453.

[5] Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. - М.: ГИТТЛ. 1953.

[6] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. - М.: Мир. 1977.

[7] Дьедонне Ж. Основы современного анализа. - М.: Мир. 1964.

[8] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. - М.: Мир. 1977. Т. 1.

[9] Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. - М.: Наука. 1975.

[10] Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 февраля 1997 года.