ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11-97-62

Е.П.Жидков, А.Г.Соловьев*

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Направлено в Оргкомитет I Открытой научной конференции УНЦ ОИЯИ, 24 — 26 февраля 1997 г., Дубна

*Московский государственный университет

1997

Введение

В настоящей работе[1] предлагается алгоритм, позволяющий с заданной точностью получить приближенное решение краевой задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Подобные задачи на полубесконечном интервале встречаются в ряде разделов теоретической физики. Далеко не всегда их решение может быть получено аналитически. В связи с этим актуальной является проблема численного решения таких задач. При этом интервал $[x_0, \infty)$ заменяется отрезком $[x_0, R]$, условие на бесконечности определенным образом заменяется условием в точке R, и краевая задача решается на этом конечном отрезке.

Вопрос о переносе граничного условия из бесконечности рассмотрен в работах Абрамова [1], Биргера [2] и др. Применительно к изучаемой нами задаче полученный ими результат состоит в следующем. Условие ограниченности решения на бесконечности эквивалентно выполнению некоторого линейного соотношения между решением задачи и его производной в достаточно удаленной точке. Как правило, это соотношение удается получить лишь приближенно. В работах [1 – 2] получены оценки погрешности такой аппроксимации.

Далее, это полученное приближенно соотношение используется как граничное условие для задачи на конечном отрезке. Ее решение будет отличаться от решения исходной задачи. В литературе отсутствуют четкие критерии априорного выбора R таким, чтобы решение задачи на $[x_0, R]$ приближало решение исходной задачи на $[x_0, \infty)$ с заданной точностью. Поэтому задачу на $[x_0, R]$ часто приходится решать повторно с бóльшим R. Сравнение полученных решений дает информацию об их точности. Если точность оказывается недостаточной (решения сильно различаются), то необходимо дальнейшее увеличение отрезка интегрирования.

Однако, имея в своем распоряжении два решения задачи на различных отрезках, можно построить их линейную комбинацию, которая будет приближать решение исходной задачи с погрешностью, существенно меньшей, чем погрешности каждого из решений по-отдельности. Этот вопрос исследован в работе авторов [3], где обоснован метод уточнения по двум решениям и получена оценка погрешности получаемого уточненного решения. О том, как можно продолжить процесс уточнения, говорится в работе [4]. Высказанная в этой работе идея алгоритма получения приближенного решения с заданной точностью проверяется путем численных экспериментов. В настоящей работе дается описание и строгое обоснование предложенного алгоритма, а также оценка скорости его сходимости.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект $95-01-01467_а$).

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача на полупрямой:

$$\begin{cases} u'' - \left(1 + \dfrac{c_1}{x} + \psi(x)\right) u = 0, \\ u(x_0) = A, \\ u(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\psi(x)$ – непрерывная на интервале $[x_0, \infty)$ функция, такая что $\psi(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$, а заданная постоянная $A \neq 0$. Эта задача имеет единственное решение (см. [5], с. 282), и это решение имеет асимптотику (см. [6], с. 157)

$$u(x) = e^{-x} x^{-\frac{c_1}{2}} (1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

Для численного решения задачи (1) интервал $[x_0, \infty)$ заменяется отрезком $[x_0, R]$. Исходя из асимптотического разложения (см. [6], с. 155)

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = -\left(1 + \frac{c_1}{2x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty$$

осуществляется перенос граничного условия из бесконечности в точку R, и решается следующая краевая задача на конечном отрезке:

$$\begin{cases} y'' - \left(1 + \dfrac{c_1}{x} + \psi(x)\right) y = 0, \\ y(x_0) = A, \\ y'(R) + \left(1 + \dfrac{c_1}{2R}\right) y(R) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

В работе [3] показано, что она имеет единственное решение при достаточно больших R.

Решение $y(x)$ задачи (2), как решение однородного дифференциального уравнения второго порядка, единственным образом представимо в виде линейной комбинации двух его линейно независимых решений. Одним из них выберем решение $u(x)$ исходной задачи (1), тогда (см. [6], с. 129) функция

$$v(x) = u(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{u^2(t)}$$

представляет собой другое, линейно независимое от него решение этого уравнения. Таким образом, представим решение $y(x)$ задачи (2) в виде

$$y(x) = u(x) + \lambda(R) \cdot v(x). \tag{3}$$

Величина $\lambda(R) \cdot v(x)$ представляет собой погрешность, вызванную заменой задачи (1) задачей (2). В работе [3] доказано, что $\lambda(R) \to 0$ при $R \to \infty$, т.е. решение задачи (2) на отрезке $[x_0, R]$ тем ближе к решению задачи (1), чем

больше R. (Близость решений понимается в смысле их близости в равномерной норме: $\|\cdot\|_{C[x_0,R]} = \max\limits_{x\in[x_0,R]} |\cdot(x)|$).

Изложим метод получения приближенного решения задачи (1) с заданной точностью, не требующий существенного увеличения отрезка интегрирования.

2. Уточнение по двум решениям

В этом пункте доказываются теоремы, являющиеся обобщениями соответствующих теорем, полученных в работе [3].

Теорема 1. Пусть функция $\psi(x)$ имеет асимптотику

$$\psi(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to \infty.$$

Пусть, далее, $y(x)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{cases} y'' - \left(1 + \dfrac{c_1}{x} + \psi(x)\right) y = 0, \\ y(x_0) = A, \end{cases}$$

определенное на отрезке $[x_0, R]$.

Тогда $y(x)$ единственным образом представимо в виде (3), причем

$$\begin{aligned} \lambda(R) &= e^{-R} R^{-\frac{c_1}{2}} \left\{ y'(R) + \left(1 + \frac{c_1}{2R}\right) y(R) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}\left[\psi(R) - \frac{c_1(c_1+2)}{4R^2}\right] y(R) \right\} \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right), \quad R \to \infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство. Представление $y(x)$ в виде линейной комбинации (3) очевидно. Получим асимптотическое разложение (4). Поскольку $uv' - u'v = 1$, то

$$\lambda(R) = u(x)y'(x) - u'(x)y(x), \quad \forall x \in [x_0, R]. \tag{5}$$

Далее, имеют место следующие асимптотические разложения (см. [3]):

$$u(x) = e^{-x} x^{-\frac{c_1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \to \infty$$

и

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = -\left(1 + \frac{c_1}{2x}\right) - \frac{1}{2}\left[\psi(x) - \frac{c_1(c_1+2)}{4x^2}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \to \infty.$$

Подставляя их в (5), где $x = R$, получим искомую асимптотику (5). Теорема доказана.

Замечание. Если $y(x)$ – решение задачи (2), то $y'(R)+\left(1+\frac{c_1}{2R}\right)y(R)=0$, и вместо (4) получаем

$$\lambda(R)=\frac{1}{2}y(R)\mathrm{e}^{-R}R^{-\frac{c_1}{2}}\left[\psi(R)-\frac{c_1(c_1+2)}{4R^2}\right]\left(1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right),\quad R\to\infty,$$

что соответствует полученному в работе [3] разложению.

Если имеются два решения задачи (2) на различных отрезках, то можно построить их линейную комбинацию (уточненное решение), которая будет приближать искомое решение задачи (1) с большей точностью, чем каждое из решений по - отдельности (см. [3]). Теорема 1 дает возможность проделать ту же процедуру с двумя уточненными решениями (получающимися, например, если имеются три решения задачи (2) на различных отрезках).

Теорема 2. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения задачи (2) на отрезках $[x_0,R_1]$ и $[x_0,R_2]$ соответственно ($R_2>R_1$) или уточненные решения на этих орезках. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть, кроме того, R_1 и R_2 выбраны таким образом, чтобы параметр

$$\begin{aligned}\alpha\ =\ &\mathrm{e}^{-(R_2-R_1)}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^{-\frac{c_1}{2}}\times\\ \times\ &\frac{y_2{}'(R_2)+\left(1+\frac{c_1}{2R_2}+\frac{1}{2}\left[\psi(R_2)-\frac{c_1(c_1+2)}{4R_2^2}\right]\right)y_2(R_2)}{y_1{}'(R_1)+\left(1+\frac{c_1}{2R_1}+\frac{1}{2}\left[\psi(R_1)-\frac{c_1(c_1+2)}{4R_1^2}\right]\right)y_1(R_1)}\end{aligned}\tag{6}$$

удовлетворял условию $0<|\alpha|<1-\delta$, где $0<\delta<1$ и не зависит от R_1 и R_2.

Тогда линейная комбинация

$$\Psi(x)=\frac{y_2(x)-\alpha\cdot y_1(x)}{1-\alpha},\quad x\in[x_0,R_1]\tag{7}$$

приближает искомое решение $u(x)$ с погрешностью

$$||\Psi-u||=O\left(\frac{||y_2-u||}{R_1}\right).\tag{8}$$

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству соответствующей ей теоремы в работе [3].

Теоремы 1 и 2 описывают один шаг уточнения и позволяют продолжать процесс до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

3. Алгоритм

В этом пункте описан алгоритм нахождения приближенного решения с заданной точностью. Удобно ввести следующие обозначения. Решения задачи (2) на отрезках $[x_0,R_1]$, $[x_0,R_2]$, ... будем обозначать $y_1^1(x)$, $y_2^1(x)$, ... Решение, уточненное по $y_n^1(x)$ и $y_{n+1}^1(x)$ будем обозначать $y_n^2(x)$, $n=1,2,\ldots$ Наконец, решение, уточненное по $y_n^k(x)$ и $y_{n+1}^k(x)$ будем обозначать $y_n^{k+1}(x)$, $n=1,2,\ldots$, $k=1,2\ldots$ Пусть заданы число ϵ – допустимая погрешность решения, а также числа $R_1<R_2<\ldots$ Предлагаемый алгоритм организован следующим образом:

I. Решается задача (2) на отрезке $[x_0,R_1]$. Полученное решение есть $y_1^1(x)$.

II. Решается задача (2) на отрезке $[x_0,R_2]$. Полученное решение есть $y_2^1(x)$.

III. Вычисляется параметр α_1^1 по формуле (6) с использованием решений $y_1^1(x)$ и $y_2^1(x)$ и находится уточненное решение

$$y_1^2(x)=\frac{y_2^1(x)-\alpha_1^1\cdot y_1^1(x)}{1-\alpha_1^1}.$$

IV. Проверяется некоторый критерий остановки. Например, такой: если

$$\max_{x\in[x_0,R_1]}|y_1^2(x)-y_1^1(x)|<\epsilon,$$

то решение $y_1^2(x)$ принимается за искомое приближение решения $u(x)$ задачи (1) на отрезке $[x_0,R_1]$. В противном случае задача (2) решается на следующем отрезке – $[x_0,R_3]$.

Допустим, задача (2) решалась $(n-1)$ раз. Имеем следующую цепочку решений:

$y_{n-1}^1(x)$ – решение задачи (2) на отрезке $[x_0,R_{n-1}]$,
$y_{n-2}^2(x)$ – решение, уточненное по $y_{n-2}^1(x)$ и $y_{n-1}^1(x)$,
$\vdots$
$y_{n-k}^k(x)$ – решение, уточненное по $y_{n-k-1}^{k-1}(x)$ и $y_{n-k}^{k-1}(x)$,
$\vdots$
$y_1^{n-1}(x)$ – решение, уточненное по $y_1^{n-2}(x)$ и $y_2^{n-2}(x)$.

Допустим, заданная точность не достигнута.

V. Решается задача (2) на отрезке $[x_0,R_n]$. Полученное решение есть $y_n^1(x)$.

VI. Вычисляются параметры α_{n-k}^k, $k=1,\ldots,n-1$ по формуле (6) с использованием решений $y_{n-k}^k(x)$ и $y_{n-k+1}^k(x)$ и находятся уточненные решения

$$y_{n-k}^{k+1}(x)=\frac{y_{n-k+1}^k(x)-\alpha_{n-k}^k\cdot y_{n-k}^k(x)}{1-\alpha_{n-k}^k},\quad k=1,\ldots,n-1.$$

VII. Сравниваются решения $y_1^n(x)$ и $y_1^{n-1}(x)$. Если

$$\max_{x\in[x_0,R_1]}|y_1^n(x)-y_1^{n-1}(x)|<\epsilon,$$

то решение $y_1^n(x)$ принимается за искомое приближение, причем для достижения заданной точности задача (2) решалась n раз. В противном случае процедура V – VII повторяется.

Вопрос о сходимости этого алгоритма решает следующая

Теорема 3. Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – решения задачи (2) на соответствующих отрезках $[x_0, R_1], \dots, [x_0, R_n]$ $(R_n > \dots > R_1)$, и выполнены условия теоремы 1. Пусть $\Psi(x)$ – уточненное решение, построенное из них по описанной выше схеме, причем на каждом шаге уточнения выполнены условия теоремы 2.

Тогда на отрезке $[x_0, R_1]$ $\Psi(x)$ приближает искомое решение $u(x)$ с погрешностью

$$||\Psi - u||_{C[x_0,R_1]} = O\left(||y_n - u||_{C[x_0,R_{n-1}]} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{R_k}\right). \tag{9}$$

Доказательство. Полученное в результате выполнения описанного выше алгоритма, решение $\Psi(x)$ есть

$$\Psi(x) \equiv y_1^n(x) = \frac{y_2^{n-1}(x) - \alpha_1^{n-1} \cdot y_1^{n-1}(x)}{1 - \alpha_1^{n-1}}, \quad x \in [x_0, R_1],$$

поэтому, в силу теоремы 2,

$$||\Psi - u||_{C[x_0,R_1]} = O\left(\frac{||y_2^{n-1} - u||_{C[x_0,R_1]}}{R_1}\right).$$

Аналогично

$$||y_2^{n-1} - u||_{C[x_0,R_2]} = O\left(\frac{||y_3^{n-2} - u||_{C[x_0,R_2]}}{R_2}\right).$$

Т.к.

$$||y_2^{n-1} - u||_{C[x_0,R_1]} \le ||y_2^{n-1} - u||_{C[x_0,R_2]},$$

то

$$||\Psi - u||_{C[x_0,R_1]} = O\left(\frac{||y_3^{n-2} - u||_{C[x_0,R_2]}}{R_1 \cdot R_2}\right),$$

и т.д. Окончательно получаем оценку (9). Теорема доказана.

Таким образом, доказана сходимость предложенного алгоритма к искомому решению. Скорость сходимости дается оценкой (9).

4. Пример

В качестве примера рассмотрим уточнение по трем решениям применительно к следующей задаче:

$$\begin{cases} u'' - \left(1 - \dfrac{8}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) u = 0, \\ u(1) = \dfrac{1}{5e}, \\ u(\infty) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

решение которой известно:

$$u(x) = e^{-x} x^4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right). \tag{11}$$

Заменим исходную задачу (10) задачей на конечном отрезке $[1, R]$:

$$\begin{cases} y'' - \left(1 - \dfrac{8}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) y = 0, \\ y(1) = u(1), \\ y'(R) + \left(1 - \dfrac{4}{R}\right) y(R) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

которую будем решать численно методом сеток с шагом $h = 0.05$ (см. [3]).

Выберем $R_1 = 11$, $R_2 = 12$ и $R_3 = 13$. В следующей ниже таблице приведены точное решение (11) исходной задачи (10), решение задачи (12) на отрезке $[1, R_3]$, уточненное решение, построенное по решениям на отрезках $[1, R_2]$ и $[1, R_3]$, и уточненное решение, для построения которого использованы все три имеющихся решения.

x	$u(x)$	$y_3^1(x)$	$y_2^2(x)$	$y_1^3(x)$
1.00	0.0735759	0.0735759	0.0735759	0.0735759
2.00	-0.1082682	-0.1082863	-0.1082685	-0.1082681
3.00	-0.0896167	-0.0896145	-0.0896167	-0.0896167
4.00	0.0586100	0.0586325	0.0586104	0.0586099
5.00	0.1684487	0.1684737	0.1684491	0.1684485
6.00	0.1963172	0.1963318	0.1963174	0.1963171
7.00	0.1697924	0.1697922	0.1697924	0.1697924
8.00	0.1245237	0.1245083	0.1245234	0.1245237
9.00	0.0819688	0.0819373	0.0819682	0.0819689
10.00	0.0499399	0.0498880	0.0499390	0.0499401
11.00	0.0286969	0.0286125	0.0286953	0.0286971

Для погрешностей получаются следующие значения:

$$\begin{aligned} ||y_3^1 - u||_{C[1,R_1]} &= 0.0000844, \\ ||y_2^2 - u||_{C[1,R_1]} &= 0.0000016, \\ ||y_1^3 - u||_{C[1,R_1]} &= 0.0000002. \end{aligned}$$

Отсюда и из таблицы видно, что решение $y_1^3(x)$ более чем на два порядка точнее, чем $y_3^1(x)$, что прекрасно согласуется с оценкой (9).

5. Заключение

В работе предложен и обоснован метод повышения точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Основными результатами являются:

- алгоритм получения приближенного решения с *любой* наперед заданной точностью;
- оценки погрешности уточненного решения;
- оценка скорости сходимости предложенного алгоритма.

Отметим, что предложенный алгоритм практически не требует дополнительных затрат, поскольку, как правило, задачу на конечном отрезке приходится решать несколько раз, и, следовательно, *имеются* несколько ее решений на различных отрезках. А алгоритм, основанный на описанном методе, позволяет, используя эти решения, построить уточненное решение, приближающее искомое решение существенно точнее, чем каждое из них по - отдельности.

Численные эксперименты, поставленные с целью проверки установленных теоретически фактов, показали высокую эффективность предложенного метода.

Литература

[1] *А.А.Абрамов.* Сравнение решений прогоночных уравнений при переносе граничных условий из бесконечности для гамильтоновых линейных систем. – ЖВМ и МФ, 1995, **35**, N12, 1808 - 1818.

А.А.Абрамов. О приближенных решениях, основанных на теоремах сравнения, скалярных и матричных уравнений Риккати на бесконечном интервале. – ЖВМ и МФ, 1993, **33**, N1, 35 - 51.

[2] *Е.С.Биргер.* Об оценке погрешности замены условия ограниченности решения линейного дифференциального уравнения на бесконечном интервале. – ЖВМ и МФ, 1968, **8**, N3, 674 - 678.

[3] *Е.П.Жидков, А.Г.Соловьев.* Уточнение приближенных решений краевой задачи на полупрямой. – Препринт, 1996, Дубна, ОИЯИ, Р11-96-480.

[4] *Е.П.Жидков, А.Г.Соловьев.* Повышение точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой. – 1996, Дубна, ОИЯИ, Р11-96-153.

[5] *Э.Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.:Наука, 1971.

[6] *Р.Беллман.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.:Издательство иностранной литературы, 1954.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 февраля 1997 года.