СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

414-97

P11-97-414

Е.В.Земляная, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина

PROGS2H4 — ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

*Работа поддержана РФФИ, грант 97-01-01040

1997

1. Введение

В данной работе представлено описание разностной схемы точности $O(h^4)$ на равномерной сетке с шагом h, реализующей метод прогонки для решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{cases} y'' + P_1 y' + F_1 y + P_2 \widetilde{y}' + F_2 \widetilde{y} = K, \\ \widetilde{y}'' + \widetilde{P}_1 \widetilde{y}' + \widetilde{F}_1, \widetilde{y} + \widetilde{P}_2 y' + \widetilde{F}_2 y = \widetilde{K}, \end{cases} \tag{1}$$

$a \le x \le b$, с краевыми условиями на функцию y

$$\begin{cases} D_1 y' + E_1 y = g_1 \text{ на левом конце,} \\ D_2 y' + E_2 y = g_2 \text{ на правом конце интервала} \end{cases} \tag{2}$$

и на функцию $\widetilde{y}$

$$\begin{cases} \widetilde{D}_1 \widetilde{y}' + \widetilde{E}_1 \widetilde{y} = \widetilde{g}_1 \text{ на левом конце,} \\ \widetilde{D}_2 \widetilde{y}' + \widetilde{E}_2 \widetilde{y} = \widetilde{g}_2 \text{ на правом конце интервала.} \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $D_i^2 + E_i^2 > 0, \widetilde{D}_i^2 + \widetilde{E}_i^2 > 0, P_i, F_i, K_i, \widetilde{P}_i, \widetilde{F}_i, \widetilde{K}_i$– достаточно гладкие функции от переменной x и, возможно, от некоторых физических параметров, такие, что существует единственное нетривиальное решение $y^*, \widetilde{y}^*$.
Используется разностная аппроксимация порядка $O(h^4)$ на равномерной сетке узлов с шагом h

$$M_h = \{x_i = a + (i-1)h, i = 1,\bar{N}, x_N = b, h = (b-a)/(N-1)\}. \tag{4}$$

Представленная работа является продолжением работ по созданию комплексов программ [1] для решения различных нелинейных задач, возникающих в физических моделях.

Данная программа прогонки может быть использована при решении многих задач в разных разделах физики. В частности, она была успешно использована в расчетах уровней энергии и волновых функций мезомолекул и задачи рассеяния мезоатомов в двухуровневом приближении адиабатического представления задачи трех тел с кулоновским взаимодействием [2], в поляронной проблеме [3], в обратной задаче рассеяния в рамках баргмановского потенциала [4], в проблеме антипротонного гелия [5], в проблеме устойчивости локализованных решений нелинейного уравнения Шредингера [6] и др.

Известно [8] (стр. 188-191), что устойчивость и сходимость разностного решения нелинейной граничной задачи тесно связаны со свойствами аппроксимации соответствующей линеаризованной задачи. В рамках ньютоновских итераций мы строим почти предельно компактную точности $O(h^4)$ аппроксимацию линейной задачи (1)-(3), что позволяет ожидать устойчивость такой схемы. Тогда при условиях достаточной гладкости (условия Липшица) коэффициентов линеаризованной задачи соответствующая конечно - разностная схема для нелинейной граничной задачи имеет в окрестности точного изолированного решения дифференциальной задачи единственное решение при достаточно малых h, которое сходится к этому решению. Для построения почти предельно компактной разностной схемы используется обобщение метода Нумерова.

2. Повышение точности вычислительных схем

Представим из системы (1) y'' и $\tilde{y}''$:

$$\begin{cases} y'' = \omega = K - P_1 y' - F_1 y - P_2 \tilde{y}' - F_2 \tilde{y}, \\ \tilde{y}'' = \tilde{\omega} = \tilde{K} - \tilde{P}_1 \tilde{y}' - \tilde{F}_1 \tilde{y} - \tilde{P}_2 y' - \tilde{F}_2 y. \end{cases} \tag{5}$$

Если взять разностные схемы точности $O(h^2)$ [7] для вторых производных y_i'' и $\tilde{y}_i''$ во внутренних узлах ($i = 3, ..., N-2$) сетки M_h

$$\begin{cases} y_i'' = \omega_i = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi), \\ \tilde{y}_i'' = \tilde{\omega}_i = \frac{1}{h^2}(\tilde{y}_{i-1} - 2\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i+1}) - \frac{h^2}{12}\tilde{y}^{(4)}(\tilde{\xi}) \end{cases} \tag{6}$$

и подставить в них вместо $y^{(4)}$ и $\tilde{y}^{(4)}$ еще раз такие же разностные схемы для ω_i'' и $\tilde{\omega}_i''$

$$\begin{cases} y_i^{(4)} = \omega_i'' = \frac{1}{h^2}(\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}) - \frac{h^2}{12}\omega^{(4)}(\xi_i), \\ \tilde{y}_i^{(4)} = \tilde{\omega}_i'' = \frac{1}{h^2}(\tilde{\omega}_{i-1} - 2\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{i+1}) - \frac{h^2}{12}\tilde{\omega}^{(4)}(\tilde{\xi}_i), \end{cases} \tag{7}$$

то получим схемы порядка $O(h^4)$

$$\begin{cases} y_i'' = \frac{1}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}) - \frac{1}{12}(\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}) + \frac{h^4}{144}\omega^{(4)}(\xi_i), \\ \tilde{y}_i'' = \frac{1}{h^2}(\tilde{y}_{i-1} - 2\tilde{y}_i + \tilde{y}_{i+1}) - \frac{1}{12}(\tilde{\omega}_{i-1} - 2\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_{i+1}) + \frac{h^4}{144}\tilde{\omega}^{(4)}(\tilde{\xi}_i). \end{cases} \tag{8}$$

Для крайних узлов сетки M_h с номерами $i = 2$ и $i = N-1$ в формулах (6) будем использовать несимметричные схемы для $y^{(4)}$ [7]:

$$i = 2, \ y_2^{(4)} = \omega_2'' = \frac{2\omega_2 - 5\omega_3 + 4\omega_4 - \omega_5}{h^2} + \frac{11h^2}{12}\omega^{(4)}(\xi_2), \tag{9}$$

$$i = N-1, \ y_{N-1}^{(4)} = \omega_{N-1}'' = \frac{-\omega_{N-4} + 4\omega_{N-3} - 5\omega_{N-2} + 2\omega_{N-1}}{h^2} + \frac{11h^2}{12}\omega^{(4)}(\xi_{N-1}). \tag{10}$$

Для $\tilde{y}_2^{(4)}$ и $\tilde{y}_{N-1}^{(4)}$ – аналогично.

Таким образом, схемы четвертого порядка точности для счета вторых производных для $i = 2$ и $i = N-1$ будут иметь вид

$$y_2'' = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} - \frac{2\omega_2 - 5\omega_3 + 4\omega_4 - \omega_5}{12} - \frac{11h^4}{144}\omega^{(4)}(\xi_2), \tag{11}$$

$$y_{N-1}'' = \frac{y_{N-2} - 2y_{N-1} + y_N}{h^2} - \frac{-\omega_{N-4} + 4\omega_{N-3} - 5\omega_{N-2} + 2\omega_{N-1}}{12} - \frac{11h^4}{144}\omega^{(4)}(\xi_{N-1}). \tag{12}$$

Для $\tilde{y}_2''$ и $\tilde{y}_{N-1}''$ – аналогично.

Для аппроксимации первых производных $y_i', \tilde{y}_i'$ будем использовать схемы вида [7]

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\eta), \tag{13}$$

а для дискретного представления $y_i^{(3)}$ будем использовать также три вида вычислительных схем:

для внутренних узлов $i = 3, \dots, N-2$

$$y_i^{(3)} = \omega_i' = \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h} - \frac{h^2}{6}\omega^{(3)}(\eta_i), \tag{14}$$

для $i = 2$

$$y_2^{(3)} = \omega_2' = \frac{-3\omega_2 + 4\omega_3 - \omega_4}{2h} + \frac{h^2}{3}\omega^{(3)}(\eta_2), \tag{15}$$

для $i = N-1$

$$y_{N-1}^{(3)} = \omega_{N-1}' = \frac{\omega_{N-3} - 4\omega_{N-2} + 3\omega_{N-1}}{2h} + \frac{h^2}{3}\omega^{(3)}(\eta_{N-1}). \tag{16}$$

Формулы для аппроксимации $\tilde{y}_i'$ получаются аналогичным путем. После подстановки выражений (14)-(16) в схему (13) мы получаем вычислительные схемы для счета первых производных с точностью $O(h^4)$.

Распишем формулы (14)

$$\begin{cases} y_i^{(3)} = \frac{1}{2h}(\omega_{i+1} - \omega_{i-1}) = \frac{1}{2h}(K_{i+1} - F_{1,i+1} y_{i+1} - F_{2,i+1}\tilde{y}_{i+1} - P_{1,i+1} y_{i+1}' \\ -P_{2,i+1}\tilde{y}_{i+1}' - K_{i-1} + F_{1,i-1} y_{i-1} + F_{2,i-1}\tilde{y}_{i-1} + P_{1,i-1} y_{i-1}' + P_{2,i-1}\tilde{y}_{i-1}'). \end{cases} \tag{17}$$

Чтобы не добавлять еще по две точки $i-2$ и $i+2$ для y и $\tilde{y}$, будем использовать в формулах (17) несимметричные схемы для аппроксимации $y_{i-1}', \tilde{y}_{i-1}'$ и y_{i+1}', $\tilde{y}_{i+1}'$ [7]:

$$\begin{cases} z_{i-1}' = \frac{1}{2h}(-3z_{i-1} + 4z_i - z_{i+1}), \\ z_{i+1}' = \frac{1}{2h}(z_{i-1} - 4z_i + 3z_{i+1}). \end{cases} \tag{18}$$

Получим следующие формулы для вычисления $y_i^{(3)}$ и $\tilde{y}_i^{(3)}$:

$$\begin{cases} y_i^{(3)} = \frac{1}{2h}(\underline{a}_i y_{i-1} + \underline{b}_i y_i + \underline{c}_i y_{i+1} + \bar{\underline{a}}_i \tilde{y}_{i-1} + \bar{\underline{b}}_i \tilde{y}_i + \bar{\underline{c}}_i \tilde{y}_{i+1} + \underline{f}_i), \\ \tilde{y}_i^{(3)} = \frac{1}{2h}(\tilde{\underline{a}}_i \tilde{y}_{i-1} + \tilde{\underline{b}}_i \tilde{y}_i + \tilde{\underline{c}}_i \tilde{y}_{i+1} + \tilde{\bar{\underline{a}}}_i y_{i-1} + \tilde{\bar{\underline{b}}}_i y_i + \tilde{\bar{\underline{c}}}_i y_{i+1} + \tilde{\underline{f}}_i). \end{cases} \tag{19}$$

где

$$
\begin{cases}
\underline{a}_i = F_{1,i-1} - \frac{1}{2h}(P_{1,i+1} + 3P_{1,i-1}). & \underline{\tilde{a}}_i = \tilde{F}_{1,i-1} - \frac{1}{2h}(\tilde{P}_{1,i+1} + 3\tilde{P}_{1,i-1}), \\
\underline{b}_i = \frac{2}{h}(P_{1,i+1} + P_{1,i-1}), & \underline{\tilde{b}}_i = \frac{2}{h}(\tilde{P}_{1,i+1} + \tilde{P}_{1,i-1}), \\
\underline{c}_i = -F_{1,i+1} - \frac{1}{2h}(3P_{1,i+1} + P_{1,i-1}). & \underline{\tilde{c}}_i = -\tilde{F}_{1,i+1} - \frac{1}{2h}(3\tilde{P}_{1,i+1} + \tilde{P}_{1,i-1}), \\
\underline{\bar{a}}_i = F_{2,i-1} - \frac{1}{2h}(P_{2,i+1} + 3P_{2,i-1}). & \underline{\tilde{\bar{a}}}_i = \tilde{F}_{2,i-1} - \frac{1}{2h}(\tilde{P}_{2,i+1} + 3\tilde{P}_{2,i-1}), \\
\underline{\bar{b}}_i = \frac{2}{h}(P_{2,i+1} + P_{2,i-1}), & \underline{\tilde{\bar{b}}}_i = \frac{2}{h}(\tilde{P}_{2,i+1} + \tilde{P}_{2,i-1}). \\
\underline{\bar{c}}_i = F_{2,i+1} - \frac{1}{2h}(3P_{2,i+1} + P_{2,i-1}). & \underline{\tilde{\bar{c}}}_i = \tilde{F}_{2,i+1} - \frac{1}{2h}(3\tilde{P}_{2,i+1} + \tilde{P}_{2,i-1}). \\
\underline{f}_i = K_{i+1} - K_{i-1}, & \underline{\tilde{f}}_i = \tilde{K}_{i+1} - \tilde{K}_{i-1}.
\end{cases}
\qquad (20)
$$

Аналогично распишем формулы (15) и (16) и получим дискретное представление для $y_2^{(3)}$ и $\tilde{y}_2^{(3)}$

$$
\begin{cases}
y_2^{(3)} = \frac{1}{2h}(ry_1 + sy_2 + uy_3 + vy_4 + wy_5 + \bar{r}\tilde{y}_1 + \bar{s}\tilde{y}_2 + \bar{u}\tilde{y}_3 + \bar{v}\tilde{y}_4 + \bar{w}\tilde{y}_5 + t). \\
\tilde{y}_2^{(3)} = \frac{1}{2h}(\tilde{r}\tilde{y}_1 + \tilde{s}\tilde{y}_2 + \tilde{u}\tilde{y}_3 + \tilde{v}\tilde{y}_4 + \tilde{w}\tilde{y}_5 + \tilde{\bar{r}}y_1 + \tilde{\bar{s}}y_2 + \tilde{\bar{u}}y_3 + \tilde{\bar{v}}y_4 + \tilde{\bar{w}}y_5 + \tilde{t}),
\end{cases}
\qquad (21)
$$

где коэффициенты определяются следующим способом:

$$
\begin{cases}
r = -\frac{3}{2h}P_{1,2}, & \tilde{r} = -\frac{3}{2h}\tilde{P}_{1,2}, \\
s = 3F_{1,2} + \frac{2}{h}P_{1,3}, & \tilde{s} = 3\tilde{F}_{1,2} + \frac{2}{h}\tilde{P}_{1,3}, \\
u = -4F_{1,3} + \frac{1}{2h}(3P_{1,2} - P_{1,4}), & \tilde{u} = -4\tilde{F}_{1,3} + \frac{1}{2h}(3\tilde{P}_{1,2} - \tilde{P}_{1,4}), \\
v = F_{1,4} - \frac{2}{h}P_{1,3}, & \tilde{v} = \tilde{F}_{1,4} - \frac{2}{h}\tilde{P}_{1,3}, \\
w = \frac{1}{2h}P_{1,4}, & \tilde{w} = \frac{1}{2h}\tilde{P}_{1,4}, \\
\bar{r} = -\frac{3}{2h}P_{2,2}, & \tilde{\bar{r}} = -\frac{3}{2h}\tilde{P}_{2,2}, \\
\bar{s} = 3F_{2,2} + \frac{2}{h}P_{2,3}, & \tilde{\bar{s}} = 3\tilde{F}_{2,2} + \frac{2}{h}\tilde{P}_{2,3}, \\
\bar{u} = -4F_{2,3} + \frac{1}{2h}(3P_{2,2} - P_{2,4}), & \tilde{\bar{u}} = -4\tilde{F}_{2,3} + \frac{1}{2h}(3\tilde{P}_{2,2} - \tilde{P}_{2,4}), \\
\bar{v} = F_{2,4} - \frac{2}{h}P_{2,3}, & \tilde{\bar{v}} = \tilde{F}_{2,4} - \frac{2}{h}\tilde{P}_{2,3}, \\
\bar{w} = \frac{1}{2h}P_{2,4}, & \tilde{\bar{w}} = \frac{1}{2h}\tilde{P}_{2,4}, \\
t = -3K_2 + 4K_3 - K_4, & \tilde{t} = -3\tilde{K}_2 + 4\tilde{K}_3 - \tilde{K}_4,
\end{cases}
\qquad (22)
$$

и для $y_{N-1}^{(3)}$ и $\tilde{y}_{N-1}^{(3)}$

$$
\begin{cases}
y_{N-1}^{(3)} = \frac{1}{2h}(Ry_{N-4} + Sy_{N-3} + Uy_{N-2} + Vy_{N-1} + Wy_N + \\
\qquad + \bar{R}\tilde{y}_{N-4} + \bar{S}\tilde{y}_{N-3} + \bar{U}\tilde{y}_{N-2} + \bar{V}\tilde{y}_{N-1} + \bar{W}\tilde{y}_N + T), \\
\tilde{y}_{N-1}^{(3)} = \frac{1}{2h}(\tilde{R}\tilde{y}_{N-4} + \tilde{S}\tilde{y}_{N-3} + \tilde{U}\tilde{y}_{N-2} + \tilde{V}\tilde{y}_{N-1} + \tilde{W}\tilde{y}_N + \\
\qquad + \tilde{\bar{R}}y_{N-4} + \tilde{\bar{S}}y_{N-3} + \tilde{\bar{U}}y_{N-2} + \tilde{\bar{V}}y_{N-1} + \tilde{\bar{W}}y_N + \tilde{T}),
\end{cases}
\qquad (23)
$$

где коэффициенты определяются следующим способом:

$$
\begin{cases}
R = \frac{1}{2h}P_{1,N-3}, & \tilde{R} = \frac{1}{2h}\tilde{P}_{1,N-3}, \\
S = -F_{1,N-3} - \frac{2}{h}P_{1,N-2}, & \tilde{S} = -\tilde{F}_{1,N-3} - \frac{2}{h}\tilde{P}_{1,N-2}, \\
U = 4F_{1,N-2} + \frac{1}{2h}(3P_{1,N-1} - P_{1,N-3}), & \tilde{U} = 4\tilde{F}_{1,N-2} + \frac{1}{2h}(3\tilde{P}_{1,N-1} - \tilde{P}_{1,N-3}), \\
V = -3F_{1,N-1} - \frac{2}{h}P_{1,N-2}, & \tilde{V} = -3\tilde{F}_{1,N-1} - \frac{2}{h}\tilde{P}_{1,N-2}, \\
W = -\frac{3}{2h}P_{1,N-1}, & \tilde{W} = -\frac{3}{2h}\tilde{P}_{1,N-1}, \\
\bar{R} = \frac{1}{2h}P_{2,N-3}, & \tilde{\bar{R}} = \frac{1}{2h}\tilde{P}_{2,N-3}, \\
\bar{S} = -F_{2,N-3} - \frac{2}{h}P_{2,N-2}, & \tilde{\bar{S}} = -\tilde{F}_{2,N-3} - \frac{2}{h}\tilde{P}_{2,N-2}, \\
\bar{U} = 4F_{2,N-2} + \frac{1}{2h}(3P_{2,N-1} - P_{2,N-3}), & \tilde{\bar{U}} = 4\tilde{F}_{2,N-2} + \frac{1}{2h}(3\tilde{P}_{2,N-1} - \tilde{P}_{2,N-3}), \\
\bar{V} = -3F_{2,N-1} + \frac{2}{h}P_{2,N-2}, & \tilde{\bar{V}} = -3\tilde{F}_{2,N-1} + \frac{2}{h}\tilde{P}_{2,N-2}, \\
\bar{W} = -\frac{3}{2h}P_{2,N-1}, & \tilde{\bar{W}} = -\frac{3}{2h}\tilde{P}_{2,N-1}, \\
T = K_{N-3} - 4K_{N-2} + 3K_{N-1}, & \tilde{T} = \tilde{K}_{N-3} - 4\tilde{K}_{N-2} + 3\tilde{K}_{N-1}.
\end{cases}
\qquad (24)
$$

3. Дискретное представление задачи (1)-(3)

После подстановки в систему (1) дискретных представлений (8) для y_i'' и $\tilde{y}_i''$ и (13),(14) для $y_i'; \tilde{y}_i'$ мы получим дискретную аппроксимацию системы (1) с точностью $O(h^4)$

$$
\begin{cases}
i = 3, ..., N-2: \\
a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} + \bar{a}_i \tilde{y}_{i-1} + \bar{b}_i \tilde{y}_i + \bar{c}_i \tilde{y}_{i+1} = f_i, \\
\tilde{a}_i \tilde{y}_{i-1} + \tilde{b}_i \tilde{y}_i + \tilde{c}_i \tilde{y}_{i+1} + \tilde{\bar{a}}_i y_{i-1} + \tilde{\bar{b}}_i y_i + \tilde{\bar{c}}_i y_{i+1} = \tilde{f}_i,
\end{cases}
\qquad (25)
$$

где коэффициенты $a_i, ..., \tilde{f}_i$ определяются следующим способом:

$$
\begin{cases}
a_i = 1 + \frac{h^2}{12}F_{1,i-1} - \frac{h}{24}(-P_{1,i+1} + 10P_{1,i} + 3P_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{a}_i + P_{2,i}\underline{\tilde{\bar{a}}}_i), \\
b_i = -2 + \frac{5h^2}{6}F_{1,i} - \frac{h}{6}(P_{1,i+1} - P_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{b}_i + P_{2,i}\underline{\tilde{\bar{b}}}_i), \\
c_i = 1 + \frac{h^2}{12}F_{1,i+1} - \frac{h}{24}(-3P_{1,i+1} - 10P_{1,i} + P_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{c}_i + P_{2,i}\underline{\tilde{\bar{c}}}_i), \\
\bar{a}_i = \frac{h^2}{12}F_{2,i-1} - \frac{h}{24}(-P_{2,i+1} + 10P_{2,i} + 3P_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{\bar{a}}_i + P_{2,i}\underline{\tilde{a}}_i), \\
\bar{b}_i = \frac{5h^2}{6}F_{2,i} - \frac{h}{6}(P_{2,i+1} - P_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{\bar{b}}_i + P_{2,i}\underline{\tilde{b}}_i), \\
\bar{c}_i = \frac{h^2}{12}F_{2,i+1} - \frac{h}{24}(-3P_{2,i+1} - 10P_{2,i} + P_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{\bar{c}}_i + P_{2,i}\underline{\tilde{c}}_i), \\
f_i = \frac{h^2}{12}(K_{i+1} + 10K_i + K_{i-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,i}\underline{f}_i + P_{2,i}\underline{\tilde{f}}_i), \\
\tilde{a}_i = 1 + \frac{h^2}{12}\tilde{F}_{1,i-1} - \frac{h}{24}(-\tilde{P}_{1,I+1} + 10\tilde{P}_{1,i} + 3\tilde{P}_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,i}\underline{\tilde{a}}_i + \tilde{P}_{2,i}\underline{\bar{a}}_i), \\
\tilde{b}_i = -2 + \frac{5h^2}{6}\tilde{F}_{1,i} - \frac{h}{6}(\tilde{P}_{1,i+1} - \tilde{P}_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,i}\underline{\tilde{b}}_i + \tilde{P}_{2,i}\underline{\bar{b}}_i), \\
\tilde{c}_i = 1 + \frac{h^2}{12}\tilde{F}_{1,i+1} - \frac{h}{24}(-3\tilde{P}_{1,i+1} - 10\tilde{P}_{1,i} + \tilde{P}_{1,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,i}\underline{\tilde{c}}_i + \tilde{P}_{2,i}\underline{\bar{c}}_i), \\
\tilde{\bar{a}}_i = \frac{h^2}{12}\tilde{F}_{2,i-1} - \frac{h}{24}(-\tilde{P}_{2,I+1} + 10\tilde{P}_{2,i} + 3\tilde{P}_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,i}\underline{\tilde{\bar{a}}}_i + \tilde{P}_{2,i}\underline{a}_i), \\
\tilde{\bar{b}}_i = \frac{5h^2}{6}\tilde{F}_{2,i} - \frac{h}{6}(\tilde{P}_{2,i+1} - \tilde{P}_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,i}\underline{\tilde{\bar{b}}}_i + \tilde{P}_{2,i}\underline{b}_i), \\
\tilde{\bar{c}}_i = \frac{h^2}{12}\tilde{F}_{2,i+1} - \frac{h}{24}(-3\tilde{P}_{2,i+1} - 10\tilde{P}_{2,i} + \tilde{P}_{2,i-1}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,i}\underline{\tilde{\bar{c}}}_i + \tilde{P}_{2,i}\underline{c}_i), \\
\tilde{f}_i = \frac{h^2}{12}(\tilde{K}_{i+1} + 10\tilde{K}_i + \tilde{K}_{i-1}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,i}\underline{\tilde{f}}_i + \tilde{P}_{2,i}\underline{f}_i),
\end{cases}
\qquad (26)
$$

а выражения для $\underline{a}_i, ..., \tilde{\underline{f}}_i$ определяются формулами (20).

Для $i = 2$ дискретное представление системы (1) с точностью $O(h^4)$ с использованием формул (11),(13),(15) будет содержать пять точек и иметь вид:

$$\begin{cases} a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 + d_2 y_4 + e_2 y_5 + \bar{a}_2 \tilde{y}_1 + \bar{b}_2 \tilde{y}_2 + \bar{c}_2 \tilde{y}_3 + \bar{d}_2 \tilde{y}_4 + \bar{e}_2 \tilde{y}_5 = \hat{K}_2, \\ \tilde{a}_2 \tilde{y}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{y}_2 + \tilde{c}_2 \tilde{y}_3 + \tilde{d}_2 \tilde{y}_4 + \tilde{e}_2 \tilde{y}_5 + \tilde{\bar{a}}_2 y_1 + \tilde{\bar{b}}_2 y_2 + \tilde{\bar{c}}_2 y_3 + \tilde{\bar{d}}_2 y_4 + \tilde{\bar{e}}_2 y_5 = \tilde{\hat{K}}_2, \end{cases} \tag{27}$$

где коэффициенты $a_2, ..., \tilde{\hat{K}}_2$ определяются следующим способом:

$$\begin{cases} a_2 = 1 - \frac{7h}{12} P_{1,2} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} r + P_{2,2} \tilde{\bar{r}}) \\ b_2 = -2 + \frac{7h^2}{6} F_{1,2} + \frac{5h}{24} P_{1,3} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} s + P_{2,2} \tilde{\bar{s}}), \\ c_2 = 1 - \frac{5h^2}{12} F_{1,3} - \frac{h}{24}(-13P_{1,2} + P_{1,4} + P_{1,5}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} u + P_{2,2} \tilde{\bar{u}}), \\ d_2 = \frac{h^2}{3} F_{1,4} - \frac{5h}{24} P_{1,3} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} v + P_{2,2} \tilde{\bar{v}}), \\ e_2 = -\frac{h^2}{12} F_{1,5} - \frac{h}{24}(-4P_{1,4} + 3P_{1,5}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} w + P_{2,2} \tilde{\bar{w}}), \\ \bar{a}_2 = -\frac{7h}{12} P_{2,2} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{r} + P_{2,2} \tilde{r}) \\ \bar{b}_2 = \frac{7h^2}{6} F_{2,2} + \frac{5h}{24} P_{2,3} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{s} + P_{2,2} \tilde{s}), \\ \bar{c}_2 = -\frac{5h^2}{12} F_{2,3} - \frac{h}{24}(-13P_{2,2} + P_{2,4} + P_{2,5}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{u} + P_{2,2} \tilde{u}), \\ \bar{d}_2 = \frac{h^2}{3} F_{2,4} - \frac{5h}{24} P_{2,3} - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{v} + P_{2,2} \tilde{v}), \\ \bar{e}_2 = -\frac{h^2}{12} F_{2,5} - \frac{h}{24}(-4P_{2,4} + 3P_{2,5}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} \bar{w} + P_{2,2} \tilde{w}), \\ \hat{K}_2 = \frac{h^2}{12}(14K_2 - 5K_3 + 4K_4 - K_5) - \frac{h^3}{12}(P_{1,2} t + P_{2,2} \tilde{t}) \\ \tilde{a}_2 = 1 - \frac{7h}{12} \tilde{P}_{1,2} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{r} + \tilde{P}_{2,2} \bar{r}) \\ \tilde{b}_2 = -2 + \frac{7h^2}{6} \tilde{F}_{1,2} + \frac{5h}{24} \tilde{P}_{1,3} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{s} + \tilde{P}_{2,2} \bar{s}), \\ \tilde{c}_2 = 1 - \frac{5h^2}{12} \tilde{F}_{1,3} - \frac{h}{24}(-13\tilde{P}_{1,2} + \tilde{P}_{1,4} + \tilde{P}_{1,5}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{u} + \tilde{P}_{2,2} \bar{u}), \\ \tilde{d}_2 = \frac{h^2}{3} \tilde{F}_{1,4} - \frac{5h}{24} \tilde{P}_{1,3} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{v} + \tilde{P}_{2,2} \bar{v}), \\ \tilde{e}_2 = -\frac{h^2}{12} \tilde{F}_{1,5} - \frac{h}{24}(-4\tilde{P}_{1,4} + 3\tilde{P}_{1,5}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{w} + \tilde{P}_{2,2} \bar{w}), \\ \tilde{\bar{a}}_2 = -\frac{7h}{12} \tilde{P}_{2,2} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{r}} + \tilde{P}_{2,2} r) \\ \tilde{\bar{b}}_2 = \frac{7h^2}{6} \tilde{F}_{2,2} + \frac{5h}{24} \tilde{P}_{2,3} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{s}} + \tilde{P}_{2,2} s), \\ \tilde{\bar{c}}_2 = -\frac{5h^2}{12} \tilde{F}_{2,3} - \frac{h}{24}(-13\tilde{P}_{2,2} + \tilde{P}_{2,4} + \tilde{P}_{2,5}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{u}} + \tilde{P}_{2,2} u), \\ \tilde{\bar{d}}_2 = \frac{h^2}{3} \tilde{F}_{2,4} - \frac{5h}{24} \tilde{P}_{2,3} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{v}} + \tilde{P}_{2,2} v), \\ \tilde{\bar{e}}_2 = -\frac{h^2}{12} \tilde{F}_{2,5} - \frac{h}{24}(-4\tilde{P}_{2,4} + 3\tilde{P}_{2,5}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{\bar{w}} + \tilde{P}_{2,2} w), \\ \tilde{\hat{K}}_2 = \frac{h^2}{12}(14\tilde{K}_2 - 5\tilde{K}_3 + 4\tilde{K}_4 - \tilde{K}_5) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,2} \tilde{t} + \tilde{P}_{2,2} t), \end{cases} \tag{28}$$

а выражения для $r, ..., \tilde{t}$ определяются формулами (22).

Для $i = N - 1$ дискретное представление системы (1) будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{N-1} y_N + b_{N-1} y_{N-1} + c_{N-1} y_{N-2} + d_{N-1} y_{N-3} + e_{N-1} y_{N-4} + \\ + \bar{a}_{N-1} \tilde{y}_N + \bar{b}_{N-1} \tilde{y}_{N-1} + \bar{c}_{N-1} \tilde{y}_{N-2} + \bar{d}_{N-1} \tilde{y}_{N-3} + \bar{e}_{N-1} \tilde{y}_{N-4} = f_{N-1}, \\ \tilde{a}_{N-1} \tilde{y}_N + \tilde{b}_{N-1} \tilde{y}_{N-1} + \tilde{c}_{N-1} \tilde{y}_{N-2} + \tilde{d}_{N-1} \tilde{y}_{N-3} + \tilde{e}_{N-1} \tilde{y}_{N-4} + \\ + \tilde{\bar{a}}_{N-1} y_N + \tilde{\bar{b}}_{N-1} y_{N-1} + \tilde{\bar{c}}_{N-1} y_{N-2} + \tilde{\bar{d}}_{N-1} y_{N-3} + \tilde{\bar{e}}_{N-1} y_{N-4} = \tilde{f}_{N-1} \end{cases} \tag{29}$$

с коэффициентами

$$\begin{cases} a_{N-1} = 1 + \frac{7h}{12} P_{1,N-1} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} W + P_{2,N-1} \tilde{\bar{W}}), \\ b_{N-1} = -2 + \frac{7h^2}{6} F_{1,N-1} - \frac{5h}{24} P_{1,N-2} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} V + P_{2,N-1} \tilde{\bar{V}}), \\ c_{N-1} = 1 - \frac{5h^2}{12} F_{1,N-2} - \frac{h}{24}(-P_{1,N-4} - 4P_{1,N-3} + 14P_{1,N-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} U + P_{2,N-1} \tilde{\bar{U}}), \\ d_{N-1} = \frac{h^2}{3} F_{1,N-3} - \frac{h}{24}(4P_{1,N-4} - 5P_{1,N-2}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} S + P_{2,N-1} \tilde{\bar{S}}), \\ e_{N-1} = -\frac{h^2}{12} F_{1,N-4} + \frac{h}{8} P_{1,N-4} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} R + P_{2,N-1} \tilde{\bar{R}}), \\ \bar{a}_{N-1} = \frac{7h}{12} P_{2,N-1} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} \bar{W} + P_{2,N-1} \tilde{W}), \\ \bar{b}_{N-1} = \frac{7h^2}{6} F_{2,N-1} - \frac{5h}{24} P_{2,N-2} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} \bar{V} + P_{2,N-1} \tilde{V}), \\ \bar{c}_{N-1} = -\frac{5h^2}{12} F_{2,N-2} - \frac{h}{24}(-P_{2,N-4} - 4P_{2,N-3} + 14P_{2,N-1}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} \bar{U} + P_{2,N-1} \tilde{U}), \\ \bar{d}_{N-1} = \frac{h^2}{3} F_{2,N-3} - \frac{h}{24}(4P_{2,N-1} - 5P_{2,N-2}) - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} \bar{S} + P_{2,N-1} \tilde{S}), \\ \bar{e}_{N-1} = -\frac{h^2}{12} F_{2,N-4} + \frac{h}{8} P_{2,N-4} - \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} \bar{R} + P_{2,N-1} \tilde{R}), \\ f_{N-1} = \frac{h^2}{12}(-K_{N-4} + 4K_{N-3} - 5K_{N-2} + 14K_{N-1}) + \frac{h^3}{12}(P_{1,N-1} T + P_{2,N-1} \tilde{T}), \\ \tilde{a}_{N-1} = 1 + \frac{7h}{12} \tilde{P}_{1,N-1} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{W} + \tilde{P}_{2,N-1} \bar{W}), \\ \tilde{b}_{N-1} = -2 + \frac{7h^2}{6} \tilde{F}_{1,N-1} - \frac{5h}{24} \tilde{P}_{1,N-2} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{V} + \tilde{P}_{2,N-1} \bar{V}), \\ \tilde{c}_{N-1} = 1 - \frac{5h^2}{12} \tilde{F}_{1,N-2} - \frac{h}{24}(-\tilde{P}_{1,N-4} - 4\tilde{P}_{1,N-3} + 14\tilde{P}_{1,N-1}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{U} + \tilde{P}_{2,N-1} \bar{U}), \\ \tilde{d}_{N-1} = \frac{h^2}{3} \tilde{F}_{1,N-3} - \frac{h}{24}(4P_{1,N-4} - 5P_{1,N-2}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{S} + \tilde{P}_{2,N-1} \bar{S}), \\ \tilde{e}_{N-1} = -\frac{h^2}{12} \tilde{F}_{1,N-4} + \frac{h}{8} \tilde{P}_{1,N-4} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{R} + \tilde{P}_{2,N-1} \bar{R}), \\ \tilde{\bar{a}}_{N-1} = \frac{7h}{12} \tilde{P}_{2,N-1} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{\bar{W}} + \tilde{P}_{2,N-1} W), \\ \tilde{\bar{b}}_{N-1} = \frac{7h^2}{6} \tilde{F}_{2,N-1} - \frac{5h}{24} \tilde{P}_{2,N-2} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{\bar{V}} + \tilde{P}_{2,N-1} V), \\ \tilde{\bar{c}}_{N-1} = -\frac{5h^2}{12} \tilde{F}_{2,N-2} - \frac{h}{24}(-\tilde{P}_{2,N-4} - 4\tilde{P}_{2,N-3} + 14\tilde{P}_{2,N-1}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{\bar{U}} + \tilde{P}_{2,N-1} U), \\ \tilde{\bar{d}}_{N-1} = \frac{h^2}{3} \tilde{F}_{2,N-3} - \frac{h}{24}(4\tilde{P}_{2,N-1} - 5\tilde{P}_{2,N-2}) - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{\bar{S}} + \tilde{P}_{2,N-1} S), \\ \tilde{\bar{e}}_{N-1} = -\frac{h^2}{12} \tilde{F}_{2,N-4} + \frac{h}{8} \tilde{P}_{2,N-4} - \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{\bar{R}} + \tilde{P}_{2,N-1} R), \\ \tilde{f}_{N-1} = \frac{h^2}{12}(-\tilde{K}_{N-4} + 4\tilde{K}_{N-3} - 5\tilde{K}_{N-2} + 14\tilde{K}_{N-1}) + \frac{h^3}{12}(\tilde{P}_{1,N-1} \tilde{T} + \tilde{P}_{2,N-1} T). \end{cases} \tag{30}$$

4. Аппроксимация граничных условий

При аппроксимации левых граничных условий

$$\begin{cases} D_1 y' + E_1 y = g_1, \\ \tilde{D}_1 \tilde{y}' + \tilde{E}_1 \tilde{y} = \tilde{g}_1 \end{cases} \tag{31}$$

для вычисления y' ($\tilde{y}$ – аналогично) используем пятиточечную схему четвертого порядка точности [7]

$$y'_1 = \frac{1}{12h}(-25y_1 + 48y_2 - 36y_3 + 16y_4 - 3y_5) + \frac{h^4}{5} y^{(5)}(\xi_1). \tag{32}$$

Тогда для $i = 1$ имеем

$$\begin{cases} a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4 + e_1 y_5 = \hat{K}_1, \\ \tilde{a}_1 \tilde{y}_1 + \tilde{b}_1 \tilde{y}_2 + \tilde{c}_1 \tilde{y}_3 + \tilde{d}_1 \tilde{y}_4 + \tilde{e}_1 \tilde{y}_5 = \tilde{\hat{K}}_1, \end{cases} \tag{33}$$

где коэффициенты $a_1, \ldots, \tilde{\hat{K}}_1$ определяются следующим способом:

$$\begin{cases} a_1 = -25D_1 + 12hE_1, & \tilde{a}_1 = -25\tilde{D}_1 + 12h\tilde{E}_1, \\ b_1 = 48D_1, & \tilde{b}_1 = 48\tilde{D}_1, \\ c_1 = -36D_1, & \tilde{c}_1 = -36\tilde{D}_1, \\ d_1 = 16D_1, & \tilde{d}_1 = 16\tilde{D}_1, \\ e_1 = -3D_1, & \tilde{e}_1 = -3\tilde{D}_1, \\ \hat{K}_1 = 12hg_1, & \tilde{\hat{K}}_1 = 12h\tilde{g}_1. \end{cases} \tag{34}$$

Для аппроксимации правых граничных условий

$$\begin{cases} D_2 y' + E_2 y = g_2, \\ \tilde{D}_2 \tilde{y}' + \tilde{E}_2 \tilde{y} = \tilde{g}_2 \end{cases} \tag{35}$$

будем использовать несимметричную пятиточечную схему четвертого порядка точности для y_N' и $\tilde{y}_N'$ [7]:

$$y_N' = \frac{1}{12h}(3y_{N-4} - 16y_{N-3} + 36y_{N-2} - 48y_{N-1} + 25y_N) + \frac{h^4}{5}y^{(5)}(\xi_N). \tag{36}$$

Тогда для $i = N$ получаем

$$\begin{cases} a_N y_N + b_N y_{N-1} + c_N y_{N-2} + d_N y_{N-3} + e_N y_{N-4} = \hat{K}_N, \\ \tilde{a}_N \tilde{y}_N + \tilde{b}_N \tilde{y}_{N-1} + \tilde{c}_N \tilde{y}_{N-2} + \tilde{d}_N \tilde{y}_{N-3} + \tilde{e}_N \tilde{y}_{N-4} = \tilde{\hat{K}}_N, \end{cases} \tag{37}$$

где

$$\begin{cases} a_N = 25D_2 + 12hE_2, & \tilde{a}_N = 25\tilde{D}_2 + 12h\tilde{E}_2, \\ b_N = -48D_2, & \tilde{b}_N = -48\tilde{D}_2, \\ c_N = 36D_2, & \tilde{c}_N = 36\tilde{D}_2, \\ d_N = -16D_2, & \tilde{d}_N = -16\tilde{D}_2, \\ e_N = 3D_2, & \tilde{e}_N = 3\tilde{D}_2, \\ \hat{K}_N = 12hg_2, & \tilde{\hat{K}}_N = 12h\tilde{g}_2. \end{cases} \tag{38}$$

5. Вывод формул для прогонки

Наша цель – решить систему (1)–(3) методом прогонки. Будем выводить коэффициенты прогонки в следующем виде:

$$\begin{cases} y_i = A_i y_{i+1} + \bar{A}_i \tilde{y}_{i+1} + B_i, \\ \tilde{y}_i = \tilde{A}_i \tilde{y}_{i+1} + \tilde{\bar{A}}_i y_{i+1} + \tilde{B}_i, \end{cases} \tag{39}$$

т.е. надо выразить значения $y_i, \tilde{y}_i$ через значения $y_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}$.

Из аппроксимаций нашей системы для $i = 1, 2, 3, 4$, объединяя соответствующие уравнения (33),(27),(25), мы получаем 8 уравнений:

$$\begin{cases} i = 1: \\ a_1 y_1 + b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4 + e_1 y_5 = \hat{K}_1, \\ \tilde{a}_1 \tilde{y}_1 + \tilde{b}_1 \tilde{y}_2 + \tilde{c}_1 \tilde{y}_3 + \tilde{d}_1 \tilde{y}_4 + \tilde{e}_1 \tilde{y}_5 = \tilde{\hat{K}}_1, \end{cases} \tag{40}$$

$$\begin{cases} i = 2: \\ a_2 y_1 + b_2 y_2 + c_2 y_3 + d_2 y_4 + e_2 y_5 + \bar{a}_2 \tilde{y}_1 + \bar{b}_2 \tilde{y}_2 + \bar{c}_2 \tilde{y}_3 + \bar{d}_2 \tilde{y}_4 + \bar{e}_2 \tilde{y}_5 = \hat{K}_2, \\ \tilde{\bar{a}}_2 y_1 + \tilde{\bar{b}}_2 y_2 + \tilde{\bar{c}}_2 y_3 + \tilde{\bar{d}}_2 y_4 + \tilde{\bar{e}}_2 y_5 + \tilde{a}_2 \tilde{y}_1 + \tilde{b}_2 \tilde{y}_2 + \tilde{c}_2 \tilde{y}_3 + \tilde{d}_2 \tilde{y}_4 + \tilde{e}_2 \tilde{y}_5 = \tilde{\hat{K}}_2, \end{cases} \tag{41}$$

$$\begin{cases} i = 3: \\ a_3 y_2 + b_3 y_3 + c_3 y_4 + \bar{a}_3 \tilde{y}_2 + \bar{b}_3 \tilde{y}_3 + \bar{c}_3 \tilde{y}_4 = f_3, \\ \tilde{\bar{a}}_3 y_2 + \tilde{\bar{b}}_3 y_3 + \tilde{\bar{c}}_3 y_4 + \tilde{a}_3 \tilde{y}_2 + \tilde{b}_3 \tilde{y}_3 + \tilde{c}_3 \tilde{y}_4 = \tilde{f}_3, \end{cases} \tag{42}$$

$$\begin{cases} i = 4: \\ a_4 y_3 + b_4 y_4 + c_4 y_5 + \bar{a}_4 \tilde{y}_3 + \bar{b}_4 \tilde{y}_4 + \bar{c}_4 \tilde{y}_5 = f_4, \\ \tilde{\bar{a}}_4 y_3 + \tilde{\bar{b}}_4 y_4 + \tilde{\bar{c}}_4 y_5 + \tilde{a}_4 \tilde{y}_3 + \tilde{b}_4 \tilde{y}_4 + \tilde{c}_4 \tilde{y}_5 = \tilde{f}_4. \end{cases} \tag{43}$$

Из уравнений (40) получим y_1 и $\tilde{y}_1$

$$\begin{cases} y_1 = a_1^{-1}(\hat{K}_1 - b_1 y_2 - c_1 y_3 - d_1 y_4 - e_1 y_5), \\ \tilde{y}_1 = \tilde{a}_1^{-1}(\tilde{\hat{K}}_1 - \tilde{b}_1 \tilde{y}_2 - \tilde{c}_1 \tilde{y}_3 - \tilde{d}_1 \tilde{y}_4 - \tilde{e}_1 \tilde{y}_5) \end{cases} \tag{44}$$

и подставим в (41). Получим y_2 и $\tilde{y}_2$

$$\begin{cases} y_2 = s_2^{-1}(Q_2 - s_3 y_3 - s_4 y_4 - s_5 y_5 - \bar{b}_2 \tilde{y}_2 - \bar{c}_2 \tilde{y}_3 - \bar{d}_2 \tilde{y}_4 - \bar{e}_2 \tilde{y}_5 + \\ + \bar{Q}_2 - \bar{\tilde{a}}_{21}(\tilde{b}_1 \tilde{y}_2 + \tilde{c}_1 \tilde{y}_3 + \tilde{d}_1 \tilde{y}_4 + \tilde{e}_1 \tilde{y}_5)), \\ \tilde{y}_2 = \tilde{s}_2^{-1}(\tilde{Q}_2 - \tilde{s}_3 \tilde{y}_3 - \tilde{s}_4 \tilde{y}_4 - \tilde{s}_5 \tilde{y}_5 - \tilde{\bar{b}}_2 y_2 - \tilde{\bar{c}}_2 y_3 - \tilde{\bar{d}}_2 y_4 - \tilde{\bar{e}}_2 y_5 + \\ + \tilde{\bar{Q}}_2 - \tilde{\bar{a}}_{21}(b_1 y_2 + c_1 y_3 + d_1 y_4 + e_1 y_5)), \end{cases} \tag{45}$$

где

$$\begin{cases} s_2 = b_2 - a_{21} b_1, & \tilde{s}_2 = \tilde{b}_2 - \tilde{\tilde{a}}_{21} \tilde{b}_1, & \bar{s}_2 = \bar{b}_2 - \bar{\tilde{a}}_{21} \tilde{b}_1, & \tilde{\bar{s}}_2 = \tilde{\bar{b}}_2 - \tilde{\bar{a}}_{21} b_1, \\ s_3 = c_2 - a_{21} c_1, & \tilde{s}_3 = \tilde{c}_2 - \tilde{\tilde{a}}_{21} \tilde{c}_1, & \bar{s}_3 = \bar{c}_2 - \bar{\tilde{a}}_{21} \tilde{c}_1, & \tilde{\bar{s}}_3 = \tilde{\bar{c}}_2 - \tilde{\bar{a}}_{21} c_1, \\ s_4 = d_2 - a_{21} d_1, & \tilde{s}_4 = \tilde{d}_2 - \tilde{\tilde{a}}_{21} \tilde{d}_1, & \bar{s}_4 = \bar{d}_2 - \bar{\tilde{a}}_{21} \tilde{d}_1, & \tilde{\bar{s}}_4 = \tilde{\bar{d}}_2 - \tilde{\bar{a}}_{21} d_1, \\ s_5 = e_2 - a_{21} e_1, & \tilde{s}_5 = \tilde{e}_2 - \tilde{\tilde{a}}_{21} \tilde{e}_1, & \bar{s}_5 = \bar{e}_2 - \bar{\tilde{a}}_{21} \tilde{e}_1, & \tilde{\bar{s}}_5 = \tilde{\bar{e}}_2 - \tilde{\bar{a}}_{21} e_1, \\ Q_2 = \hat{K}_2 - a_{21} \hat{K}_1, & \tilde{Q}_2 = \tilde{\hat{K}}_2 - \tilde{\tilde{a}}_{21} \tilde{\hat{K}}_1, & \bar{Q}_2 = -\bar{\tilde{a}}_{21} \tilde{\hat{K}}_1, & \tilde{\bar{Q}}_2 = -\tilde{\bar{a}}_{21} \hat{K}_1, \\ a_{21} = a_2 a_1^{-1}, & \tilde{\tilde{a}}_{21} = \tilde{a}_2 \tilde{a}_1^{-1}, & \bar{\tilde{a}}_{21} = \bar{a}_2 \tilde{a}_1^{-1}, & \tilde{\bar{a}}_{21} = \tilde{\bar{a}}_2 a_1^{-1}. \end{cases} \tag{46}$$

Подставим (45) в (42), получим

$$\begin{cases} y_2 = \tilde{Q}_3 - \tilde{\bar{z}}_3 y_3 - \tilde{\bar{z}}_4 y_4 - \tilde{\bar{z}}_5 y_5 - \tilde{z}_3 \tilde{y}_3 - \tilde{z}_4 \tilde{y}_4 - \tilde{z}_5 \tilde{y}_5, \\ \tilde{y}_2 = Q_3 - \bar{z}_3 \tilde{y}_3 - \bar{z}_4 \tilde{y}_4 - \bar{z}_5 \tilde{y}_5 - z_3 y_3 - z_4 y_4 - z_5 y_5, \end{cases} \tag{47}$$

где

$$\begin{cases} z_3 = z^{-1}(b_3 - r s_3), \bar{z}_3 = z^{-1}(\bar{b}_3 - r\bar{c}_2), \tilde{z}_3 = \tilde{z}^{-1}(\tilde{b}_3 - \tilde{r}\tilde{s}_3), \tilde{\bar{z}}_3 = \tilde{z}^{-1}(\tilde{\bar{b}}_3 - \tilde{r}\tilde{\bar{c}}_2), \\ z_4 = z^{-1}(c_3 - r s_4), \bar{z}_4 = z^{-1}(\bar{c}_3 - r\bar{d}_2), \tilde{z}_4 = \tilde{z}^{-1}(\tilde{c}_3 - \tilde{r}\tilde{s}_4), \tilde{\bar{z}}_4 = \tilde{z}^{-1}(\tilde{\bar{c}}_3 - \tilde{r}\tilde{\bar{d}}_2), \\ z_5 = -z^{-1} r s_5, \quad \bar{z}_5 = -z^{-1} r\bar{e}_2, \quad \tilde{z}_5 = -\tilde{z}^{-1}\tilde{r}\tilde{s}_5, \quad \tilde{\bar{z}}_5 = -\tilde{z}^{-1}\tilde{r}\tilde{\bar{e}}_2, \\ Q_3 = z^{-1}(f_3 - rQ_2), \quad \tilde{Q}_3 = \tilde{z}^{-1}(\tilde{f}_3 - \tilde{r}\tilde{Q}_2), \\ z = \bar{a}_3 - r\bar{b}_2, \quad \tilde{z} = \tilde{\bar{a}}_3 - \tilde{r}\tilde{\bar{b}}_2, \\ r = a_3 s_2^{-1}, \quad \tilde{r} = \tilde{a}_3 \tilde{s}_2^{-1}. \end{cases} \tag{48}$$

Теперь подставим (47) в (43), получим выражения в виде

$$\begin{cases} w_3 y_3 + w_4 y_4 + w_5 y_5 + \bar{w}_3 \tilde{y}_3 + \bar{w}_4 \tilde{y}_4 + \bar{w}_5 \tilde{y}_5 = Q_4, \\ \tilde{w}_3 \tilde{y}_3 + \tilde{w}_4 \tilde{y}_4 + \tilde{w}_5 \tilde{y}_5 + \tilde{\tilde{w}}_3 y_3 + \tilde{\tilde{w}}_4 y_4 + \tilde{\tilde{w}}_5 y_5 = \tilde{Q}_4, \end{cases} \tag{49}$$

где

$$\begin{cases} w_3 = -a_3 \tilde{\tilde{z}}_3 + b_3 - \bar{a}_3 z_3, & \bar{w}_3 = -a_3 \tilde{z}_3 + \bar{b}_3 - \bar{a}_3 \bar{z}_3, \\ \tilde{w}_3 = -\tilde{a}_3 \bar{z}_3 + \tilde{b}_3 - \tilde{\tilde{a}}_3 \tilde{z}_3, & \tilde{\tilde{w}}_3 = -\tilde{a}_3 z_3 + \tilde{\tilde{b}}_3 - \tilde{\tilde{a}}_3 \tilde{\tilde{z}}_3, \\ w_4 = -a_3 \tilde{\tilde{z}}_4 + c_3 - \bar{a}_3 z_4, & \bar{w}_4 = -a_3 \tilde{z}_4 + \bar{c}_3 - \bar{a}_3 \bar{z}_4, \\ \tilde{w}_4 = -\tilde{a}_3 \bar{z}_4 + \tilde{c}_3 - \tilde{\tilde{a}}_3 \tilde{z}_4, & \tilde{\tilde{w}}_4 = -\tilde{a}_3 z_4 + \tilde{\tilde{c}}_3 - \tilde{\tilde{a}}_3 \tilde{\tilde{z}}_4, \\ w_5 = -a_3 \tilde{\tilde{z}}_5 - \bar{a}_3 z_5, & \bar{w}_5 = -a_3 \tilde{z}_5 - \bar{a}_3 \bar{z}_5, \\ \tilde{w}_5 = -\tilde{a}_3 \bar{z}_5 - \tilde{\tilde{a}}_3 \tilde{z}_5, & \tilde{\tilde{w}}_5 = -\tilde{a}_3 z_5 - \tilde{\tilde{a}}_3 \tilde{\tilde{z}}_5, \\ Q_4 = f_3 - a_3 \tilde{Q}_3 - \bar{a}_3 Q_3, & \tilde{Q}_4 = \tilde{f}_3 - \tilde{a}_3 Q_3 - \tilde{\tilde{a}}_3 \tilde{Q}_3. \end{cases} \tag{50}$$

Из выражений (49) получаем формулы для вычисления y_3 и $\tilde{y}_3$ в виде

$$\begin{cases} y_3 = \frac{1}{\tilde{v}_3}(\tilde{Q}_5 - \tilde{\bar{v}}_4 y_4 - \tilde{v}_5 y_5 - \tilde{v}_4 \tilde{y}_4 - \tilde{v}_5 \tilde{y}_5), \\ \tilde{y}_3 = \frac{1}{\bar{v}_3}(Q_5 - \bar{v}_4 \tilde{y}_4 - \bar{v}_5 \tilde{y}_5 - v_4 y_4 - v_5 y_5), \end{cases} \tag{51}$$

где

$$\begin{cases} \bar{v}_3 = \tilde{\tilde{w}}_3 w_3 - \bar{w}_3 \tilde{\tilde{w}}_3, & \tilde{v}_3 = \tilde{w}_3 \bar{w}_3 - w_3 \tilde{w}_3, \\ v_4 = \tilde{\tilde{w}}_4 w_3 - w_4 \tilde{\tilde{w}}_3, & \tilde{v}_4 = \tilde{w}_4 \bar{w}_3 - \bar{w}_4 \tilde{w}_3, \\ \bar{v}_4 = \tilde{w}_4 w_3 - \bar{w}_4 \tilde{\tilde{w}}_3, & \tilde{\bar{v}}_4 = \tilde{\tilde{w}}_4 \bar{w}_3 - w_4 \tilde{w}_3, \\ v_5 = \tilde{\tilde{w}}_5 w_3 - w_5 \tilde{\tilde{w}}_3, & \tilde{v}_5 = \tilde{w}_5 \bar{w}_3 - \bar{w}_5 \tilde{w}_3, \\ \bar{v}_5 = \tilde{w}_5 w_3 - \bar{w}_5 \tilde{\tilde{w}}_3, & \tilde{\bar{v}}_5 = \tilde{\tilde{w}}_5 \bar{w}_3 - w_5 \tilde{w}_3, \\ Q_5 = \tilde{Q}_4 w_3 - Q_4 \tilde{\tilde{w}}_3, & \tilde{Q}_5 = \tilde{Q}_4 \bar{w}_3 - Q_4 \tilde{w}_3. \end{cases} \tag{52}$$

Подставим выражения (51) для y_3 и $\tilde{y}_3$ в пару уравнений (43) системы (1) для $i = 4$. Получим соотношения вида

$$\begin{cases} r_4 y_4 + r_5 y_5 + \bar{r}_4 \tilde{y}_4 + \bar{r}_5 \tilde{y}_5 = Q_6, \\ \tilde{r}_4 \tilde{y}_4 + \tilde{r}_5 \tilde{y}_5 + \tilde{\tilde{r}}_4 y_4 + \tilde{\tilde{r}}_5 y_5 = \tilde{Q}_6, \end{cases} \tag{53}$$

где

$$\begin{cases} r_4 = -a_4 \tilde{v}_{43} + b_4 - \bar{a}_4 v_{43}, & \tilde{r}_4 = -\tilde{a}_4 \bar{v}_{43} + \tilde{b}_4 - \tilde{\tilde{a}}_4 \tilde{v}_{43}, \\ \bar{r}_4 = -a_4 \tilde{\bar{v}}_{43} + \bar{b}_4 - \bar{a}_4 \bar{v}_{43}, & \tilde{\tilde{r}}_4 = -\tilde{a}_4 v_{43} + \tilde{\tilde{b}}_4 - \tilde{\tilde{a}}_4 \tilde{\bar{v}}_{43}, \\ r_5 = -a_4 \tilde{v}_{53} + c_4 - \bar{a}_4 v_{53}, & \tilde{r}_5 = -\tilde{a}_4 \bar{v}_{53} + \tilde{c}_4 - \tilde{\tilde{a}}_4 \tilde{v}_{53}, \\ \bar{r}_5 = -a_4 \tilde{\bar{v}}_{53} + \bar{c}_4 - \bar{a}_4 \bar{v}_{53}, & \tilde{\tilde{r}}_5 = -\tilde{a}_4 v_{53} + \tilde{\tilde{c}}_4 - \tilde{\tilde{a}}_4 \tilde{\bar{v}}_{53}, \\ Q_6 = f_4 - a_4 \tilde{Q}_5 \tilde{v}_3^{-1} - \bar{a}_4 Q_5 \bar{v}_3^{-1}, & \tilde{Q}_6 = \tilde{f}_4 - a_4 Q_5 \bar{v}_3^{-1} - \tilde{\tilde{a}}_4 \tilde{Q}_5 \tilde{v}_3^{-1}, \\ v_{43} = v_4 \bar{v}_3^{-1}, \tilde{v}_{43} = \tilde{v}_4 \tilde{v}_3^{-1}, \bar{v}_{43} = \bar{v}_4 \bar{v}_3^{-1}, \tilde{\bar{v}}_{43} = \tilde{\bar{v}}_4 \tilde{v}_3^{-1}, \\ v_{53} = v_5 \bar{v}_3^{-1}, \tilde{v}_{53} = \tilde{v}_5 \tilde{v}_3^{-1}, \bar{v}_{53} = \bar{v}_5 \bar{v}_3^{-1}, \tilde{\bar{v}}_{53} = \tilde{\bar{v}}_5 \tilde{v}_3^{-1}, \end{cases} \tag{54}$$

из которых получаем, наконец, формулы вида (39)

$$\begin{cases} y_4 = A_4 y_5 + \bar{A}_4 \tilde{y}_5 + B_4, \\ \tilde{y}_4 = \tilde{A}_4 \tilde{y}_5 + \tilde{\bar{A}}_4 y_5 + \tilde{B}_4, \end{cases} \tag{55}$$

в которых

$$\begin{cases} A_4 = -\tilde{\bar{r}}_5 \tilde{\bar{r}}_4^{-1}, & \tilde{A}_4 = -\bar{r}_5 \bar{r}_4^{-1}, \\ \bar{A}_4 = -\tilde{r}_5 \tilde{\bar{r}}_4^{-1}, & \tilde{\bar{A}}_4 = -r_5 \bar{r}_4^{-1}, \\ B_4 = \tilde{Q}_7 \tilde{\bar{r}}_4^{-1}, & \tilde{B}_4 = Q_7 \bar{r}_4^{-1}, \end{cases} \tag{56}$$

$$\begin{cases} \bar{r}_4 = \bar{r}_4 \tilde{\tilde{r}}_4 - \tilde{r}_4 r_4, & \tilde{\bar{r}}_4 = r_4 \tilde{r}_4 - \tilde{\tilde{r}}_4 \bar{r}_4, \\ r_5 = r_5 \tilde{\tilde{r}}_4 - \tilde{\tilde{r}}_5 r_4, & \tilde{r}_5 = \bar{r}_5 \tilde{r}_4 - \tilde{r}_5 \bar{r}_4, \\ \bar{r}_5 = \bar{r}_5 \tilde{\tilde{r}}_4 - \tilde{r}_5 r_4, & \tilde{\bar{r}}_5 = r_5 \tilde{r}_4 - \tilde{\tilde{r}}_5 \bar{r}_4, \\ Q_7 = Q_6 \tilde{\tilde{r}}_4 - \tilde{Q}_6 r_4, & \tilde{Q}_7 = Q_6 \tilde{r}_4 - \tilde{Q}_6 \bar{r}_4. \end{cases} \tag{57}$$

Теперь покажем, что если мы имеем выражения вида (39) для y_i и $\tilde{y}_i$, то после подстановки их в систему (25) для $i+1$ мы получим аналогичные выражения для y_{i+1} и $\tilde{y}_{i+1}$.

$$\begin{cases} a_{i+1} y_i + b_{i+1} y_{i+1} + c_{i+1} y_{i+2} + \bar{a}_{i+1} \tilde{y}_i + \bar{b}_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \bar{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} = f_{i+1}, \\ \tilde{a}_{i+1} \tilde{y}_i + \tilde{b}_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \tilde{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} + \tilde{\tilde{a}}_{i+1} y_i + \tilde{\tilde{b}}_{i+1} y_{i+1} + \tilde{\tilde{c}}_{i+1} y_{i+2} = \tilde{f}_{i+1}. \end{cases} \tag{58}$$

$$\begin{cases} a_{i+1}(A_i y_{i+1} + \bar{A}_i \tilde{y}_{i+1} + B_i) + b_{i+1} y_{i+1} + c_{i+1} y_{i+2} + \\ + \bar{a}_{i+1}(\tilde{A}_i \tilde{y}_{i+1} + \tilde{\bar{A}}_i y_{i+1} + \tilde{B}_i) + \bar{b}_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \bar{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} = f_{i+1}, \\ \tilde{a}_{i+1}(\tilde{A}_i \tilde{y}_{i+1} + \tilde{\bar{A}}_i y_{i+1} + \tilde{B}_i) + \tilde{b}_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \tilde{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} + \\ + \tilde{\tilde{a}}_{i+1}(A_i y_{i+1} + \bar{A}_i \tilde{y}_{i+1} + B_i) + \tilde{\tilde{b}}_{i+1} y_{i+1} + \tilde{\tilde{c}}_{i+1} y_{i+2} = \tilde{f}_{i+1}. \end{cases} \tag{59}$$

$$\begin{cases} y_{i+1}(a_{i+1} A_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{\bar{A}}_i + b_{i+1}) + c_{i+1} y_{i+2} + \\ + \tilde{y}_{i+1}(a_{i+1} \bar{A}_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{A}_i + \bar{b}_{i+1}) + \bar{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} - f_{i+1} + a_{i+1} B_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{B}_i = 0, \\ y_{i+1}(\tilde{a}_{i+1} \tilde{\bar{A}}_i + \tilde{\tilde{a}}_{i+1} A_i + \tilde{\tilde{b}}_{i+1}) + \tilde{\tilde{c}}_{i+1} y_{i+2} + \\ + \tilde{y}_{i+1}(\tilde{a}_{i+1} \tilde{A}_i + \tilde{\tilde{a}}_{i+1} \bar{A}_i + \tilde{b}_{i+1}) + \tilde{c}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} - \tilde{f}_{i+1} + \tilde{a}_{i+1} \tilde{B}_i + \tilde{\tilde{a}}_{i+1} B_i = 0. \end{cases} \tag{60}$$

Обозначим

$$\begin{cases} r_{i+1} = a_{i+1} A_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{\bar{A}}_i + b_{i+1}, & \tilde{r}_{i+1} = \tilde{a}_{i+1} \tilde{A}_i + \tilde{\tilde{a}}_{i+1} \bar{A}_i + \tilde{b}_{i+1}, \\ \bar{r}_{i+1} = a_{i+1} \bar{A}_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{A}_i + \bar{b}_{i+1}, & \tilde{\tilde{r}}_{i+1} = \tilde{a}_{i+1} \tilde{\bar{A}}_i + \tilde{\tilde{a}}_{i+1} A_i + \tilde{\tilde{b}}_{i+1}, \\ r_{i+2} = c_{i+1}, & \tilde{r}_{i+2} = \tilde{c}_{i+1}, \\ \bar{r}_{i+2} = \bar{c}_{i+1}, & \tilde{\tilde{r}}_{i+2} = \tilde{\tilde{c}}_{i+1}, \\ Q_{i+1} = a_{i+1} B_i + \bar{a}_{i+1} \tilde{B}_i - f_{i+1}, & \tilde{Q}_{i+1} = \tilde{a}_{i+1} \tilde{B}_i + \tilde{\tilde{a}}_{i+1} B_i - \tilde{f}_{i+1}. \end{cases} \tag{61}$$

Умножив первое уравнение в (60) на $\tilde{r}_{i+1}$, а второе на $\bar{r}_{i+1}$ и вычтя второе из первого, получим формулу вычисления y_{i+1} через $y_{i+2}, \tilde{y}_{i+2}$

$$y_{i+1}(r_{i+1} \tilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1} \tilde{\tilde{r}}_{i+1}) + y_{i+2}(c_{i+1} \tilde{r}_{i+1} - \tilde{\tilde{c}}_{i+1} \bar{r}_{i+1}) +$$

$$+ \tilde{y}_{i+2}(\bar{c}_{i+1} \tilde{r}_{i+1} - \tilde{c}_{i+1} \bar{r}_{i+1}) + Q_{i+1} \tilde{r}_{i+1} - \tilde{Q}_{i+1} \bar{r}_{i+1} = 0,$$

или

$$y_{i+1} = A_{i+1} y_{i+2} + \bar{A}_{i+1} \tilde{y}_{i+2} + B_{i+1}, \tag{62}$$

где коэффициенты прогонки определяются формулами:

$$\left\{\begin{array}{l} A_{i+1} = (\tilde{\bar{c}}_{i+1}\bar{r}_{i+1} - c_{i+1}\tilde{r}_{i+1})(r_{i+1}\tilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}, \\ \bar{A}_{i+1} = (\tilde{c}_{i+1}\bar{r}_{i+1} - \bar{c}_{i+1}\tilde{r}_{i+1})(r_{i+1}\tilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}, \\ B_{i+1} = (\tilde{Q}_{i+1}\bar{r}_{i+1} - Q_{i+1}\tilde{r}_{i+1})(r_{i+1}\tilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}. \end{array}\right. \tag{63}$$

Умножив первое уравнение в (60) на $\tilde{\bar{r}}_{i+1}$, а второе на r_{i+1} и вычтя второе из первого, получим формулу вычисления $\tilde{y}_{i+1}$ через $\tilde{y}_{i+2}, y_{i+2}$

$$\tilde{y}_{i+1}(\bar{r}_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1} - \tilde{r}_{i+1}r_{i+1}) + y_{i+2}(c_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1} - \tilde{\bar{c}}_{i+1}r_{i+1}) +$$
$$+\tilde{y}_{i+2}(\bar{c}_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1} - \tilde{c}_{i+1}r_{i+1}) + Q_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1} - \tilde{Q}_{i+1}r_{i+1} = 0,$$

или

$$\tilde{y}_{i+1} = \tilde{A}_{i+1}\tilde{y}_{i+2} + \tilde{\bar{A}}_{i+1}y_{i+2} + \tilde{B}_{i+1}, \tag{64}$$

где

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{A}_{i+1} = (\bar{c}_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1} - \tilde{c}_{i+1}r_{i+1})(r_{i+1}\tilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}, \\ \tilde{\bar{A}}_{i+1} = (c_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1} - \tilde{\bar{c}}_{i+1}r_{i+1})(r_{i+1}\tilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}, \\ \tilde{B}_{i+1} = (Q_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1} - \tilde{Q}_{i+1}r_{i+1})(r_{i+1}\tilde{r}_{i+1} - \bar{r}_{i+1}\tilde{\bar{r}}_{i+1})^{-1}. \end{array}\right. \tag{65}$$

Итак, зная прогоночные коэффициенты для $i = 4$, а именно: $A_4, \bar{A}_4, B_4, \tilde{A}_4, \tilde{\bar{A}}_4, \tilde{B}_4$ в (55), и рекуррентные соотношения (63),(65), можем определить все прогоночные коэффициенты $A_i, \bar{A}_i, B_i, \tilde{A}_i, \tilde{\bar{A}}_i, \tilde{B}_i$ для $i = 5, 6, ..., N-2$.

6. Развязка на правом конце

Соберем вместе все полученные пары уравнений для $i = N, N-1, N-2, N-3, N-4$:

$$\left\{\begin{array}{lll} i = N: & & \\ a_N y_N + b_N y_{N-1} + c_N y_{N-2} + d_N y_{N-3} + e_N y_{N-4} & & = \hat{K}_N, \\ \tilde{a}_N \tilde{y}_N + \tilde{b}_N \tilde{y}_{N-1} + \tilde{c}_N \tilde{y}_{N-2} + \tilde{d}_N \tilde{y}_{N-3} + \tilde{e}_N \tilde{y}_{N-4} & & = \tilde{\hat{K}}_N, \\ i = N-1: & & \\ a_{N-1} y_N + b_{N-1} y_{N-1} + c_{N-1} y_{N-2} + d_{N-1} y_{N-3} + e_{N-1} y_{N-4} + & & \\ +\bar{a}_{N-1}\tilde{y}_N + \bar{b}_{N-1}\tilde{y}_{N-1} + \bar{c}_{N-1}\tilde{y}_{N-2} + \bar{d}_{N-1}\tilde{y}_{N-3} + \bar{e}_{N-1}\tilde{y}_{N-4} & & = \hat{K}_{N-1}, \\ \tilde{\bar{a}}_{N-1} y_N + \tilde{\bar{b}}_{N-1} y_{N-1} + \tilde{\bar{c}}_{N-1} y_{N-2} + \tilde{\bar{d}}_{N-1} y_{N-3} + \tilde{\bar{e}}_{N-1} y_{N-4} + & & \\ +\tilde{a}_{N-1}\tilde{y}_N + \tilde{b}_{N-1}\tilde{y}_{N-1} + \tilde{c}_{N-1}\tilde{y}_{N-2} + \tilde{d}_{N-1}\tilde{y}_{N-3} + \tilde{e}_{N-1}\tilde{y}_{N-4} & & = \tilde{\hat{K}}_{N-1}, \\ i = N-2: & & \\ A_{N-2}y_{N-1} - y_{N-2} + & \bar{A}_{N-2}\tilde{y}_{N-1} & = -B_{N-2}, \\ \tilde{\bar{A}}_{N-2}y_{N-1} + & \tilde{A}_{N-2}\tilde{y}_{N-1} - \tilde{y}_{N-2} & = -\tilde{B}_{N-2}, \\ i = N-3: & & \\ A_{N-3}y_{N-2} - y_{N-3} + & \bar{A}_{N-3}\tilde{y}_{N-2} & = -B_{N-3}, \\ \tilde{\bar{A}}_{N-3}y_{N-2} + & \tilde{A}_{N-3}\tilde{y}_{N-2} - \tilde{y}_{N-3} & = -\tilde{B}_{N-3}, \\ i = N-4: & & \\ A_{N-4}y_{N+3} - y_{N-4} + & +\bar{A}_{N-4}\tilde{y}_{N-3} & = -B_{N-4}, \\ \tilde{\bar{A}}_{N-4}y_{N-3} + & +\tilde{A}_{N-4}\tilde{y}_{N-3} - \tilde{y}_{N-4} & = -\tilde{B}_{N-4}. \end{array}\right. \tag{66}$$

Получим систему из десяти уравнений с десятью неизвестными. Решив ее, найдем значения $y_N, y_{N-1}, y_{N-2}, y_{N-3}, y_{N-4}, \tilde{y}_N, \tilde{y}_{N-1}, \tilde{y}_{N-2}, \tilde{y}_{N-3}, \tilde{y}_{N-4}$.

Для $i = N-6, N-7, ..., 3$ с помощью (62)–(63) осуществляем обратную прогонку и получаем значения $y_{N-5}, \tilde{y}_{N-5}, ..., y_4, \tilde{y}_4$. Значения $y_3, \tilde{y}_3$ определяем по формулам (51),(52), $y_2, \tilde{y}_2$ – по формулам (47),(48), $y_1, \tilde{y}_1$ – с помощью выражений (44).

7. Тесты, проверка точности разностных схем

Описанные в данной работе вычислительные схемы реализованы в виде программы и проверены на ряде тестовых задач. Здесь приводятся результаты решения нелинейного уравнения Шредингера [6]

$$\left\{\begin{array}{l} \Psi''(x) - \Psi(x) + 2|\Psi(x)|^2\Psi(x) = -i\gamma\Psi(x) - H, \\ \Psi(\pm\infty) = 0, \end{array}\right. \tag{67}$$

где γ и H - параметры.

После замены $\Psi(x) = u(x) + iv(x)$ получаем систему из двух уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} u''(x) - u(x) + 2[u^2(x) + v^2(x)]u(x) = \gamma v(x) - H, \\ v''(x) - v(x) + 2[u^2(x) + v^2(x)]v(x) = -\gamma u(x), \\ u(\pm\infty) = v(\pm\infty) = 0, \end{array}\right. \tag{68}$$

которая решалась с помощью ньютоновских итераций с использованием указанной подпрограммы прогонки.

Вычисления проводились на последовательности сгущающихся сеток $h = 0.01, 0.005, 0.0025$ на интервале $[-20, 20]$ со значениями параметров $\gamma = 0.5$, $H = 0.35$.

Таблица 1. Реальная часть $u(x)$

x	$h_1 = 0.01$	$h_2 = 0.005$	$h_3 = 0.0025$	σ_u
0.00	−.4215764232E+00	− .4215764192E+00	− .4215764190E+00	16.672
0.10	−.4183216591E+00	− .4183216553E+00	− .4183216551E+00	16.755
0.20	−.4087220325E+00	− .4087220294E+00	− .4087220292E+00	16.942
0.03	−.4016800278E+00	− .4016800250E+00	− .4016800248E+00	17.099
0.40	−.3967828049E+00	− .3967828023E+00	− .3967828022E+00	17.227
0.50	−.3932504478E+00	− .3932504454E+00	− .3932504453E+00	17.333
1.00	−.1919580673E+00	− .1919580686E+00	− .1919580687E+00	14.966
2.00	.7100928563E−01	.7100928499E−01	.7100928494E−01	14.633
3.00	.2094771796E+00	.2094771792E+00	.2094771792E+00	14.996
4.00	.2784826909E+00	.2784826907E+00	.2784826907E+00	15.289
5.00	.3130035659E+00	.3130035658E+00	.3130035657E+00	15.483

Как известно (см., например, второй пункт в [1]), отношение разности значений решения w={ u,v}

$$\sigma_w = \frac{w_{h_1} - w_{h_2}}{w_{h_2} - w_{h_3}}$$

на последовательности сгущающихся сеток $h = \{h_1, \frac{h_1}{2}, \frac{h_1}{4}\}$ должно быть величиной порядка $O(2^n)$, где n - порядок точности вычислительных схем.

Результаты для реальной $u(x)$ и мнимой $v(x)$ части решения приведены в таблицах 1 и 2 соответственно.

Таблица 2. Мнимая часть $v(x)$

x	$h_1 = 0.01$	$h_2 = 0.005$	$h_3 = 0.0025$	σ_v
0.00	.9686644441E+00	.9686644407E+00	.9686644405E+00	15.949
0.10	.9637744422E+00	.9637744391E+00	.9637744389E+00	15.997
0.20	.9493801315E+00	.9493801293E+00	.9493801292E+00	16.072
0.30	.9262723901E+00	.9262723892E+00	.9262723892E+00	16.331
0.40	.8956572111E+00	.8956572117E+00	.8956572117E+00	15.356
0.50	.8590143155E+00	.8590143174E+00	.8590143175E+00	15.780
1.00	.6386310962E+00	.6386311002E+00	.6386311005E+00	15.937
2.00	.3273751372E+00	.3273751386E+00	.3273751387E+00	16.174
3.00	.2280813731E+00	.2280813735E+00	.2280813736E+00	16.682
4.00	.2155540586E+00	.2155540587E+00	.2155540587E+00	17.291
5.00	.2247988745E+00	.2247988746E+00	.2247988746E+00	17.085

8. Краткое описание программы

Программа PROGS2H4 написана на языке Фортран в виде процедуры (subroutine), обращение к которой имеет вид

```
call progs2h4(n,l,h,f,p,uk,d1,d2,f1,f2,g1,g2,y,am,bm),
```

где

n - число узлов x_k дискретной сетки M_h (4),
l - размерность системы (1), (здесь $l = 2$),
h - постоянный шаг дискретной сетки M_h ,
f,p - массивы размерности (l,l,n) коэффициентов $F_{i,j,k}, \widetilde{F}_{i,j,k}, P_{i,j,k}, \widetilde{P}_{i,j,k}$, $(i,j = 1,2; k = 1,...,n)$ системы (1) в узлах x_k дискретной сетки M_h ,
uk - массив размерности (l,n) со значениями правых частей $K_{i,k}, \widetilde{K}_{i,k}$, $(i = 1,2; k = 1,...,n)$ системы (1) в узлах x_k дискретной сетки M_h ,
d1,d2,e1,e2,g1,g2 - массивы размерности l , содержащие значения $D_1, D_2, E_1, E_2, g_1, g_2$ и $\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2, \widetilde{E}_1, \widetilde{E}_2, \widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2$ в граничных условиях (3),
y - массив размерности (l,n) со значениями решений $y_k, \widetilde{y}_k, (k = 1,...,n)$ в узлах x_k сетки M_h ,
am,bm - рабочие массивы размерности (l,l,n) и (l,n) соответственно.

9. Заключение

Данная работа может быть использована специалистами в области вычислительной математики и вычислительной физики для разработки новых схем повышенной точности с целью использования их в прецизионных расчетах, необходимых во многих физических задачах.

Авторы благодарны РФФИ (Грант 97-01-01040) за финансовую поддержку.

Литература

1. *И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина.* В сборнике "Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики". Изд-во KFKI-74-34, Будапешт. 1974. с.93-111; *И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина, Т.А. Стриж.* Сообщение ОИЯИ. Р11-87-332. Дубна. 1987; *Т.П. Пузынина.* Сообщение ОИЯИ. Р11-89-728. Дубна, 1989.

2. *Л.И. Пономарев, И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина.* ЖЭТФ. 1973. 65. 1(7), с.28-34; *L.I. Ponomarev, I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, L.N. Somov.* Annals of Phys., 1978, 110. 2. p.274-286.

3. *G.N. Chuev, V.D. Lakhno.* Theory and applications of strongly coupled large polaron. In "Perspectives of polarons". World Scientific, Editors G.N.Chuev, V.D.Lakhno, Singapore-New Jersey- London- Hong Kong, 1996, p.1-37.

   I.V. Amirkhanov, I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, T.A. Strizh, E.V. Zemlyanaya, V.D. Lakhno. Numerical investigation of a quantumfield model for strong-coupled binucleon. In the same place, p.229-250.

4. *I.V. Amirkhanov, I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, B.N. Zakhariev.* JINR Communication, E4-89-312, Dubna, 1989.

5. *I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, S.I. Vinitsky, V.I. Puzynin.* Hyperfine Interactions, 101, 1996, p.493; *I.V. Puzynin, T.P. Puzynina, A.Yu. Tyukhtyaev, S.I. Vinitsky.* In Proceedings International Conference "Computational Modelling and Computing in Physics", CMCP-96, September 16-21, Dubna, 1996.

6. *I.V. Barashenkov, S.Yu. Smirnov.* Phys. Rev. E54, 1996, p.5707.

7. *И.С. Березин, Н.П. Жидков.* Методы вычислений, 1. М., Физматгиз, 1959, с.232-233.

8. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений . Редакторы Дж. Холл, Дж. Уатт. "Мир", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 декабря 1997 года.