

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11-97-347

Г.А.Ососков, А.Б.Шитов*

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА
ДЛЯ ОБРАБОТКИ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ
ГАУССОВОЙ ФОРМЫ

*Ивановский государственный университет

1997

Применение вейвлет-анализа

для обработки дискретных сигналов гауссовой формы

Предложены быстрые и эффективные алгоритмы для определения параметров сигналов гауссовой формы по результатам их измерений дискретными детекторами с различной степенью грануляции. В отличие от предыдущих работ в этих алгоритмах существенным образом используются вейвлеты более высоких порядков, что позволило создать быстрые прямые методы определения не только параметров положения и амплитуды сигнала, но и его полуширины.

Установлено новое свойство вейвлетов — постоянство их относительной площади, что позволяет выбрать оптимальный масштабный коэффициент, общий для нескольких вейвлет-преобразований.

Вычисления на модельных данных показывают, что предлагаемые алгоритмы обеспечивают точности, не уступающие более трудоемким методам подгонки гауссианов к данным дискретных измерений.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод авторов

Wavelet Applications for Discrete Signal Processing
with the Gaussian Shape

Fast and effective algorithms are proposed for evaluation of signals measured by discrete detectors with various degrees of granulations. Unlike previous works wavelets of higher order are used extensively in these algorithms. That allows to develop fast and direct methods for evaluation of signal parameters not only of position and amplitude, but also of its half-width.

A new wavelet feature is observed: the permanence of their relative square. It makes possible to choose an optimal scale coefficient that is common for several wavelet-transforms.

Numerical simulations show the high accuracy of proposed algorithms comparable with the more laborious methods of a gaussian fitting to discrete measurements.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

1. Введение

Проблема наиболее точного определения положения и амплитуды наблюдаемого сигнала по данным, искаженным как наличием шумов, так и влиянием самого детектирующего устройства, является одной из основных в экспериментальной физике. В этой статье данная проблема рассматривается применительно к таким современным детекторам физики высоких энергий, как, например, RICH (Ring Imaging CHerenkov), силиконовый дрейфовый детектор (SiDC) или времяпроекционные камеры (TPC) [1, 2, 3], которые имеют дискретную, ячеистую структуру. При этом пролетающая элементарная частица возбуждает в детекторе электронную лавину, заряд которой распределяется по нескольким близким друг к другу ячейкам структуры детектора. Таким образом, частица, проходя плоскость детектора, регистрируется не в одной точке, а сразу группой этих прилегающих ячеек, причем в каждой из них детектируется заряд, величина которого пропорциональна числу электронов, собранных данной ячейкой. В зависимости от типа детектора это разбиение на ячейки может быть реализовано одинаково по обеим координатам, как в детекторе типа RICH, или путем сбора электронов на отдельных анодах по одной из координат с разбиением дрейфующего заряда на участки по времени дрейфа (time bin) по другой координате, как в SiDC или TPC.

Распределение заряда электронного облака лавины по ячейкам имеет колоколообразную форму, так что положение ячейки с максимальной амплитудой (величиной пришедшего на нее заряда) определяет центр лавины, т.е. локализует положение частицы в детекторе с точностью, соответствующей размеру ячейки. Однако, благодаря высокой грануляции таких детекторов, эту точность можно существенно повысить, вычисляя, например, центр тяжести кластера ячеек, соответствующих одной частице с весами пропорциональными амплитудам ячеек. Алгоритм центра тяжести (АЦТ) удобен своей независимостью от формы ячеек, действует при любой размерности, и поэтому наиболее известен и общепринят.

К сожалению, подобные алгоритмы локализации частиц, основанные на вычислении центра тяжести кластеров, перестают ра-



ботать в условиях современных экспериментов с тяжелыми ионами, где приходится регистрировать до 1,5 тыс. вторичных частиц в одном событии. Чрезвычайно высокие загрузки детекторов приводят к тому, что лавины от близко идущих частиц начинают перекрываться, а заряды в ячейках в области перекрытия складываются, что ведет к слиянию кластеров и/или поглощению малых по амплитуде сигналов большими. В этой связи были разработаны методы для оценки параметров электронного облака, основанные на аппроксимации его распределения по поверхности детектора подходящей колоколообразной функцией с последующей ее подгонкой к измеренным амплитудам очередного кластера (см., например, [4, 5]). Наиболее часто в качестве аппроксиматора используется двумерный гауссиан

$$N(x, y, A, x_0, y_0) = A \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y - y_0)^2}{2\sigma_y^2}\right), \quad (1)$$

где x_0, y_0 - координаты центра облака, A - максимальная амплитуда, а полуширины гауссиана по осям σ_x, σ_y считаются известными для рассматриваемой области детектора или для дрейфовых детекторов и могут быть вычислены при известной постоянной скорости дрейфа заряда.

При этом, пользуясь факторизуемостью выражения (1), задачу по одной из переменных можно свести к подгонке нескольких одномерных гауссианов

$$g(x; A, x_0) = A \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2)$$

с тем, чтобы потом, как в [5], к полученному набору из нескольких $(x_0, A)_i$ применить АЦТ для определения центра и амплитуды всего двумерного гауссиана.

В одномерном представлении (2) перекрывающиеся сигналы аппроксимируются суперпозицией двух выражений:

$$G(x; A, x_1; B, x_2) = A \exp\left(-\frac{(x - x_1)^2}{2\sigma^2}\right) + B \exp\left(-\frac{(x - x_2)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (3)$$

В соответствии с вышесказанным, далее в настоящей работе рассматривается задача анализа одномерного сигнала гауссовой формы (2) в случае сигнала от одной частицы и вида (3) в случае двух перекрывающихся сигналов.

В процессе регистрации такой сигнал дискретизируется в виде гистограммы $\{h_k\}$, заключенной в интервале (x_{beg}, x_{end}) ,

$$h_k = \frac{1}{\tau} \int_{x_{k-1}}^{x_k} G(x; A, x_1; B, x_2) dx, \quad (4)$$

где $x_k = x_{beg} + k\tau$, τ - ширина одного бина гистограммы.

Кроме полезного сигнала, в каждый бин гистограммы дает вклад коррелированный шум со среднеквадратичным значением до 10% от величины средней амплитуды сигнала [5]. Слабые сигналы отсекаются на уровне, зависящем от максимального значения шума.

Как показано в [5], подгонка четырехпараметрической функции (3) к множеству измерений, представленных гистограммой (4), позволяет на реальных данных добиться разрешения близких сигналов на уровне σ . Тем не менее временные затраты на процедуры многопараметрической подгонки стимулируют поиски альтернативных методов определения параметров сигналов по данным измерений детекторами с ячеистой структурой. Одним из сравнительно новых, но обещающих методов является вейвлет-анализ [6]. В [7] описана попытка его применения для разрешения близких сигналов вида (3), однако результатов, сравнимых с [5], там удалось добиться только путем введения существенных ограничений на параметры функции (3): потребовалось зафиксировать в известных значениях положение одного из составляющих сигналов и отношение их амплитуд.

В данной работе, продолжая тематику применения вейвлет-анализа к обработке сигналов гауссовой формы, получены новые, более удобные алгоритмы определения параметров одиночного сигнала и значительно ослаблены ограничения в задаче с двумя перекрывающимися сигналами.

2. Вейвлет-преобразование

Прямое вейвлет-преобразование сигнала $f(x)$ имеет следующий вид:

$$W_\psi(a, b)f = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{b-x}{a}\right) f(x) dx. \quad (5)$$

Подобно преобразованию Фурье, обратное вейвлет-преобразование записывается в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{C_\psi}} \iint \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) [W_\psi(a; b)f] \frac{da db}{a^2}. \quad (6)$$

Принятый в [6] нормировочный коэффициент равен

$$C_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (7)$$

где $\tilde{\psi}(\omega)$ – фурье-образ вейвлета $\psi(x)$.

3. Гауссовы вейвлеты

Из семейства гауссовых вейвлетов

$$g_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}, \quad n > 0 \quad (8)$$

наиболее известны первые два

$$g_1(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{и} \quad g_2(x) = (1-x^2)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Однако возможности вейвлет-анализа станут значительно шире при использовании гауссовых вейвлетов более высокого порядка, а именно:

$$g_3(x) = (3x - x^3)e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$g_4(x) = (6x^2 - x^4 - 3)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Нормирующие коэффициенты C_{g_n} этих функций равны $2\pi(n-1)!$ [6].

Поведение первых четырех вейвлетов отражено на рис. 1 – 4.

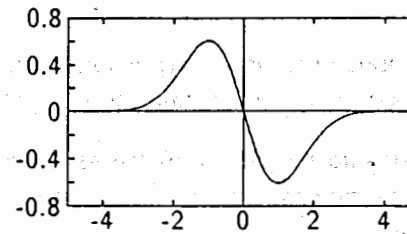


Рис. 1. Гауссов вейвлет g_1

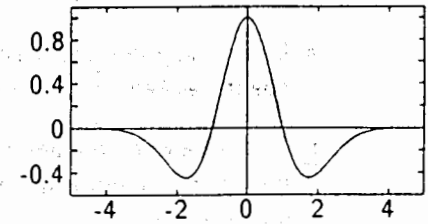


Рис. 2. Гауссов вейвлет g_2

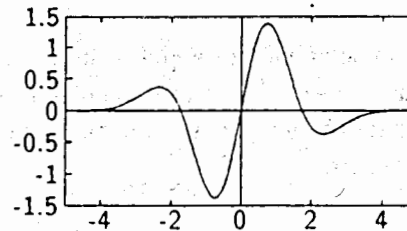


Рис. 3. Гауссов вейвлет g_3

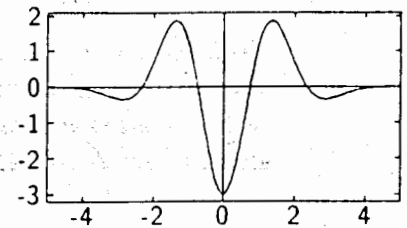


Рис. 4. Гауссов вейвлет g_4

3.1. Свойства гауссовых вейвлетов

3.1.1. Общие свойства

- Четность каждого гауссового вейвлета совпадает с четностью его номера.
- Любой гауссов вейвлет $g_n(x)$ имеет ровно n нулей и стремится к нулю при возрастающем абсолютном значении аргумента

$$g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0.$$

- Из определения семейства гауссовых вейвлетов (8) видно, что производная от вейвлета совпадает с точностью до знака

с вейвлетом на один более высокого порядка:

$$\frac{d g_n(x)}{dx} = -g_{n+1}(x). \quad (9)$$

- Соотношение (9) позволяет заключить, что экстремумы гауссового вейвлета $g_n(x)$ совпадают с нулями функции $g_{n+1}(x)$.
- Учитывая соотношение (9), можно получить общее выражение для значения интеграла от гауссова вейвлета на любом интервале:

$$\int_{x_1}^{x_2} g_n(x) dx = g_{n-1}(x_1) - g_{n-1}(x_2). \quad (10)$$

Необходимо отметить, что это соотношение верно и при $n = 1$, причем функция $g_0(x) = -e^{-x^2/2}$ формально определяется выражением (8), однако не удовлетворяет требованиям, предъявляемым к вейвлетам.

3.1.2. Относительная площадь

Описанное в этом разделе свойство, присущее гауссовым вейвлетам, имеет большое практическое значение, а именно: при вычислении вейвлет-преобразований по данным эксперимента оказывается возможным использовать один и тот же коэффициент растяжения для всех вейвлетов.

В качестве параметра, описывающего вклад различных участков вейвлета, удобно ввести относительную площадь вейвлета, определив эту функцию как отношение

$$w(x) = \frac{\int_0^x |g_n(x)| dx}{\int_0^\infty |g_n(x)| dx}. \quad (11)$$

По крайней мере первые четыре гауссовых вейвлета имеют приблизительно одинаковую относительную площадь на любом интервале. На рис. 5 приведены графики зависимости относительной

площади от длины интервала. При построении кривых интеграл в знаменателе отношения (11) был вычислен в пределах от 0 до 10. Это оправдано тем, что уже около точки $x = 5$ изменение относительной площади становится малым.

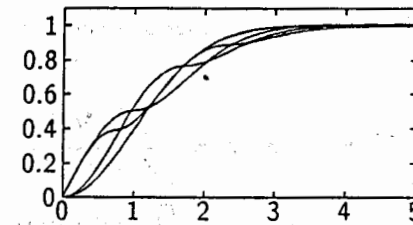


Рис. 5. Относительная площадь гауссовых вейвлетов

Вблизи нуля относительная площадь четных вейвлетов g_2 и g_4 возрастает линейно, а нечетных вейвлетов g_1 и g_3 — квадратично.

Свойство гауссовых вейвлетов сохранять относительную площадь при переходе к функциям более высокого порядка не зависит ни от смещения вейвлетов (что вполне очевидно), ни от их растяжения.

3.2. Вейвлет-преобразование одиночного гауссиана

В отличие от [6], где для получения вейвлет-преобразования¹ сигнала, имеющего форму гауссиана (2), применяется метод производящих функций, в данной работе предлагается более простой способ, использующий тот замечательный факт, что вейвлет-образ гауссиана имеет форму соответствующего вейвлета. Благодаря этому общее выражение коэффициентов вейвлет-преобразования гауссиана имеет следующий вид:

$$W_{g_n}(a, b)g = \frac{A\sigma a^{n+1/2}}{\sqrt{(n-1)!(a^2 + \sigma^2)^{(n+1)/2}}} g_n\left(\frac{x_0 - b}{\sqrt{a^2 + \sigma^2}}\right). \quad (12)$$

¹Далее всюду используются только гауссовы вейвлеты.

Таким образом, все вышеупомянутые свойства вейвлетов остаются справедливыми и для вейвлет-образа гауссиана.

В частности, в центральной точке $x = x_0$ коэффициенты $W_{g_1}(a, x_0)g$ и $W_{g_3}(a, x_0)g$ обращаются в нуль, а коэффициенты разложения по симметричным вейвлетам $W_{g_2}(a, x_0)g$ и $W_{g_4}(a, x_0)g$ достигают в этой точке максимального (по абсолютной величине) значения:

$$W_{g_2}(a, x_0)g = \frac{A\sigma a^{5/2}}{(a^2 + \sigma^2)^{3/2}}, \quad (13)$$

$$W_{g_4}(a, x_0)g = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{A\sigma a^{9/2}}{(a^2 + \sigma^2)^{5/2}}. \quad (14)$$

3.3. Вейвлет-преобразование сложного сигнала

Вейвлет-образ сигнала (3), состоящего из двух отдельных гауссианов, является суммой соответствующих вейвлет-образов сигналов вида (2).

Поскольку коэффициенты разложения одиночного гауссиана по нечетным вейвлетам g_1 и g_3 в точке, совпадающей с центром сигнала, равны нулю, вейвлет-образы $W_{g_1}(a, b)G$ и $W_{g_3}(a, b)G$, вычисленные в точке $b = x_1$, содержат вклад только от второй составляющей, и наоборот, вычислив эти вейвлет-преобразования в точке, соответствующей положению второго облака, можно исключить влияние этой части сигнала на вейвлет-образ суммарного сигнала (3). Ниже это соображение используется при известном положении одной из составляющих сигнала для определения положения другой.

4. Восстановление параметров сигнала

В наших предположениях данные, получаемые в ходе физических экспериментов, представляют собой набор одномерных гистограмм (4). В этом разделе описаны методы восстановления

параметров (положения x_0 , амплитуды A и полуширины σ) сигнала, представляющего собой либо одиночный гауссиан (2), либо сумму (3) двух таких пиков. Способы определения искоемых параметров получены из соотношений вейвлет-коэффициентов идеального сигнала, не подвергнутого ни дискретизации, ни влиянию шумов. Тем не менее, как следует из приведенных ниже результатов, эти методы применимы и к реальным данным благодаря устойчивости вейвлет-преобразований по отношению к искажениям сигнала.

4.1. Влияние шумов на вейвлет-образ

Если уровень шума относительно мал, то возникает естественный вопрос: можно ли им пренебречь, насколько это будет законно или же наличие шума в гистограмме следует как-то учитывать?

В общем случае реальную гистограмму можно представить в виде

$$\tilde{h}_k = h_k + \varepsilon_k, \quad k = \overline{1, N}. \quad (15)$$

где h_k – гистограмма сигнала, построенная согласно (4), ε_k – шумовая добавка. Поэтому вейвлет-коэффициенты для сигнала с шумами также распадутся на две части:

$$W_{g_n}(a, b)\tilde{h} = W_{g_n}(a, b)h + W_{g_n}(a, b)\varepsilon. \quad (16)$$

Первое слагаемое в (16) соответствует полезному сигналу, второе $W_{g_n}(a, b)\varepsilon$ – вейвлет-коэффициент, вычисленный согласно (12) только по шумовым добавкам в гистограмму.

Для того, чтобы выяснить, при каком уровне шумов в исходном сигнале эта шумовая добавка к вейвлет-коэффициенту окажется пренебрежимо малой, был проведен численный эксперимент. Для имитации шумовой добавки в каждый бин гистограммы, содержащей 20 ячеек на интервале $(-5, 5)$, помещалось случайное число, распределенное по нормальному закону с полушириной σ_{noise} . По построенной таким образом гистограмме вычислялись вейвлет-коэффициенты $W_{g_1}(a, 0)\varepsilon$ и $W_{g_2}(a, 0)\varepsilon$. Было проведено по 1000 испытаний при пяти различных значениях уровня

шума σ_{noise} . На рис. 6 показано среднеквадратичное отклонение вейвлет-коэффициентов в зависимости от уровня шума.

Затем по формуле (4) был прогистограммирован незашумленный сигнал гауссовой формы с амплитудой $A = 1$, полушириной $\sigma = 1,25$ и с центром в нуле. На рис. 7 приведены графики зависимостей первых двух вейвлет-коэффициентов $W_{g_1}(a, b)h$ и $W_{g_2}(a, b)h$ полученной гистограммы от смещения b вейвлета.

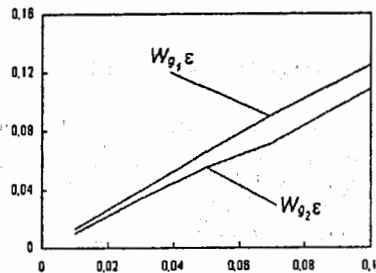


Рис. 6. Зависимость вейвлет-коэффициентов от уровня шума

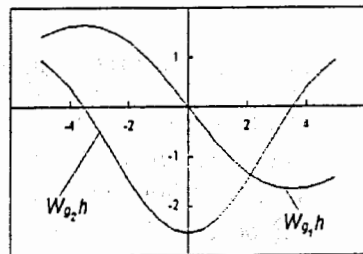


Рис. 7. Вейвлет-образы одиночного гауссиана без шумов

Сравнивая величины вейвлет-коэффициентов на рис. 6, 7, нетрудно заметить, что даже для 10% уровня шумов значения $W_{g_1}(a, 0)\epsilon$ и $W_{g_2}(a, 0)\epsilon$ на два порядка меньше значений вейвлет-образов незашумленного сигнала почти для всех значений смещения b . Только в случаях, когда нечетный вейвлет g_1 смещен от центра x_0 сигнала на расстояние, небольшое относительно полуширины сигнала σ , значение вейвлет-коэффициента чистого сигнала может оказаться сравнимым с уровнем вейвлет-коэффициента шума. Четный же вейвлет g_2 , напротив, дает наилучшее соотношение сигнал/шум при величине смещении b , не превосходящей ширины сигнала.

Проведенное исследование позволяет сформулировать простое правило для выбора смещения вейвлетов при обработке зашумленных сигналов.

- При использовании нечетных вейвлетов g_1 и g_3 их необхо-

димо вычислять в точках со смещением b , равным 2–3 полуширинам сигнала σ_{sig} , от ячейки с максимальным зарядом, которая обычно соответствует центру сигнала. Необходимо отметить, что оптимальное смещение зависит также и от масштаба a вейвлета.

- Четные вейвлеты g_2 и g_4 следует размещать так, чтобы центр вейвлетов, то есть величина смещения b , как можно точнее совпадала с максимумом полезного сигнала.

4.2. Одиночный гауссиан

Для сигнала, представляющего собой одиночный гауссиан (2), необходимо определить три параметра – положение центра x_0 , амплитуду пика A и полуширину σ . Некоторые из описанных ниже способов позволяют восстановить все три параметра, однако если величина σ известна, можно использовать более быстрые методы, восстанавливающие лишь два наиболее важных параметра – x_0 и A . При этом в отличие от способов, основанных на минимизации разности между гистограммой и некоторой кривой (см., напр., [5]) по обоим этим параметрам, применение вейвлетов дает то преимущество, что позволяет определить положение сигнала без знания амплитуды A . Этот параметр можно восстановить после того, как будет найден центр. Поэтому представляется целесообразным отдельно рассмотреть способы восстановления положения, амплитуды и полуширины.

4.2.1. Поиск центра сигнала

Из общего выражения для вейвлет-преобразования (12) видно, что вейвлет-образы одиночного гауссиана содержат все три параметра сигнала. Систему уравнений для их определения можно составить, вычисляя эти образы в нескольких точках. Однако такая система оказывается существенно нелинейной, что весьма затрудняет ее решение. Тем не менее нетрудно заметить, что во все без исключения вейвлет-образы гауссиана входит экспонента с одинаковым показателем:

$$\exp\left(-\frac{(b-x_0^2)}{2(a^2+\sigma^2)}\right).$$

Это означает, что отношение двух разных вейвлет-образов, вычисленных в одной точке, не будет содержать экспоненциального множителя. В зависимости от комбинации вейвлет-преобразований полученное уравнение будет не выше четвертого порядка. Кроме того, уравнение не содержит также и амплитуды сигнала. Поэтому процедура восстановления параметров сигнала распадается на две обособленные части – сперва определяют положение центра, а затем амплитуду. К сожалению, подобные простые методы не позволяют определить полуширину сигнала и требуют ее в качестве известного параметра.

Метод WT3/WT1 (wavelet transforms 3 and 1).

Правила помехоустойчивости, приведенные в конце предыдущего раздела, не позволяют комбинировать вейвлеты разной четности. Такой комбинацией минимальной сложности, позволяющей избежать возникновения уравнений четвертого порядка, будет отношение коэффициентов вейвлет-преобразований $W_{g_3}(a, b)g$ и $W_{g_1}(a, b)g$. Оно содержит только квадрат разности $(b-x_0)$

$$\frac{W_{g_3}(a, b)g}{W_{g_1}(a, b)g} = \frac{a^2}{\sqrt{2}(a^2+\sigma^2)} \left[\frac{(b-x_0)^2}{a^2+\sigma^2} - 3 \right]. \quad (17)$$

это позволяет легко выразить искомое положение центра сигнала

$$x_0 = b \pm \sqrt{(a^2+\sigma^2) \left[3 + \frac{\sqrt{2}(a^2+\sigma^2) W_{g_3}(a, b)g}{a^2 W_{g_1}(a, b)g} \right]}. \quad (18)$$

Уравнение (17) приводит к двум возможным решениям. Выбор одного из них можно осуществить одним из трех способов.

- Верным корнем уравнения (17) следует считать ту точку, в которой вейвлет-преобразование с вейвлетами g_2 или g_4 максимально (по абсолютной величине). При этом необходимо провести вычисление двух дополнительных вейвлет-образов,

один из которых заведомо излишен. Однако найденное значение коэффициента $W_{g_2}(a, x_0)g$ или $W_{g_4}(a, x_0)g$ можно использовать при восстановлении амплитуды облака (процедура описана ниже).

- Если разность между найденными корнями достаточно велика, следует отбросить тот из них, для которого уровень сигнала в точке корня меньше.
- Если вейвлет-коэффициенты $W_{g_1}(a, b)g$ или $W_{g_3}(a, b)g$ вычислить в точке, значительно отстоящей от истинного положения сигнала, то заранее известно, какой знак следует выбрать в выражении (18).

Последний вариант наиболее приемлем не только из-за своей простоты, но и по той причине, что преобразование, вычисленное вдали от центра сигнала, содержит больший вклад от наиболее загрязненных участков облака, чем преобразование, вычисленное около центра.

4.2.2. Определение амплитуды и полуширины сигнала

В [6] приведено описание итерационного алгоритма поиска амплитуды сигнала. Здесь дан прямой метод восстановления амплитуды и полуширины одиночного гауссиана. Этот способ позволяет найти указанные параметры по одному или двум вейвлет-образам, вычисленным в точке положения центра сигнала x_0 .

Быстрое восстановление параметров A и σ оказалось возможным благодаря использованию вейвлетов более высоких порядков. В точке $x = x_0$ коэффициенты вейвлет-преобразований $W_{g_1}(a, x_0)g$ и $W_{g_3}(a, x_0)g$ обращаются в нуль, а коэффициенты $W_{g_2}(a, x_0)g$ и $W_{g_4}(a, x_0)g$ принимают вид (13) и (14) соответственно. Отношение $\frac{W_{g_2}(a, x_0)g}{W_{g_4}(a, x_0)g}$ позволяет выразить полуширину сигнала

$$\sigma^2 = -a^2 \left(1 + \sqrt{\frac{3 W_{g_2}(a, x_0)g}{2 W_{g_4}(a, x_0)g}} \right). \quad (19)$$

С учетом найденного значения σ амплитуду можно выразить из (13) или (14).

4.3. Составной сигнал

В этом разделе представлены способы восстановления положения и амплитуды составляющих сигнала, представляющего собой сумму (3) двух гауссианов с одинаковой (и известной) полушириной σ . Как и ранее, описание разделено на две части – определение положения и амплитуды.

Определение положения сигналов. Метод WT3/WT1

В случае, если положение одного из облаков известно, позицию второго сигнала можно быстро определить, воспользовавшись уже описанным способом для одиночного гауссиана. Предположим, для определенности, что известно положение x_1 . Тогда, в силу антисимметричности, нечетные вейвлет-коэффициенты $W_{g_1}(a, x_1)G$ и $W_{g_3}(a, x_1)G$ содержат вклад только от облака с центром в точке x_2 . Искомое положение центра можно выразить аналогично (18):

$$x_2 = x_1 \pm \sqrt{(a^2 + \sigma^2) \left[3 + \frac{\sqrt{2}(a^2 + \sigma^2) W_{g_3}(a, x_1)G}{a^2 W_{g_1}(a, x_1)G} \right]}. \quad (20)$$

Выбор одного из двух корней в случае составного сигнала особенно прост для наиболее вероятного случая, когда амплитуды составляющих различны и суммарный сигнал обладает явно выраженной асимметрией. Это позволяет при известном положении одного облака легко выбрать знак для x_2 в выражении (20).

Восстановление позиции с помощью нечетных вейвлетов тем точнее, чем дальше от центра облака вычислен вейвлет-коэффициент. Метод вполне работоспособен и при расстояниях между составляющими менее их полуширины σ .

Определение амплитуды сигналов

Амплитуда гауссианов, входящих в сумму (3), может быть определена по известному положению обеих составляющих одним из следующих способов.

Амплитуды A и B возможно выразить через коэффициенты

разложения сигнала по вейвлету g_1

$$A = c_1 W_{g_1}(a, x_2)G, \quad B = -c_1 W_{g_1}(a, x_1)G,$$

где

$$c_1 = \frac{(a^2 + \sigma^2)^{3/2}}{\sigma a^{3/2}(x_2 - x_1)} \exp\left(\frac{(x_2 - x_1)^2}{2(a^2 + \sigma^2)}\right).$$

Аналогично можно поступить, применяя вейвлет-образы третьего порядка:

$$A = c_3 W_{g_3}(a, x_2)G, \quad B = -c_3 W_{g_3}(a, x_1)G,$$

$$c_3 = \frac{\sqrt{2}(a^2 + \sigma^2)^{5/2}}{\sigma a^{7/2}(x_2 - x_1) \left[\frac{(x_2 - x_1)^2}{a^2 + \sigma^2} - 3 \right]} \exp\left(\frac{(x_2 - x_1)^2}{2(a^2 + \sigma^2)}\right).$$

4.4. Метод WTS (Wavelet Transform System)

Устойчивость вейвлет-образов к влиянию шума и дискретизации привело к идее создания нового эффективного и робастного алгоритма, использующего для определения параметров составного сигнала не один-два, а одновременно несколько вейвлет-коэффициентов, вычисленных по измеренной гистограмме.

Согласно (12) вейвлет-коэффициент для суммы (3) сигналов можно записать в виде

$$W_{g_n}(a, b)G = A w_{g_n} g_n(\tilde{x}_1) + B w_{g_n} g_n(\tilde{x}_2),$$

где использованы следующие нормированные обозначения:

$$w_{g_n} = \frac{\sigma a^{n+1/2}}{\sqrt{(n-1)! s^{n+1}}}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i - b}{s}, \quad s^2 = \sqrt{a^2 + \sigma^2}. \quad (21)$$

Далее для упрощения записи и ускорения вычислений мы будем нормировать не только x_1 и x_2 , но и вейвлет-коэффициенты

$$W_n(a, b)G = \frac{W_{g_n}(a, b)G}{w_{g_n}} = A g_n(\tilde{x}_1) + B g_n(\tilde{x}_2). \quad (22)$$

Чтобы определить четыре параметра A, B, x_1, x_2 суммарного сигнала (3), используем выражения для четырех вейвлет-коэффициентов и составим систему уравнений вида

$$F_n = 0, \quad n = \overline{1, 4}, \quad (23)$$

где $F_n = W_n(a, b)h - Ag_n(\tilde{x}_1) - Bg_n(\tilde{x}_2)$, а $W_n(a, b)h$ — нормированный согласно (21, 22) вейвлет-коэффициент гистограммы

$$W_n(a, b)h = \frac{W_{g_n}(a, b)h}{w_{g_n}} = \frac{s^{n+1}}{\sqrt{2\pi} \sigma a^{n+1}} \sum_{k=1}^N h_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} g_n \left(\frac{b-x}{a} \right) dx. \quad (24)$$

Полученная система уравнений сильно нелинейна по искомым параметрам, поэтому для ее решения применен приближенный метод Ньютона (в одномерном случае он называется методом касательных). Начиная с некоторого начального приближения $\tilde{x}_1^{(0)}, \tilde{x}_2^{(0)}, A^{(0)}, B^{(0)}$, вычисляются поправки к нему $\Delta \tilde{x}_1, \Delta \tilde{x}_2, \Delta A, \Delta B$ путем решения следующей системы линейных уравнений:

$$D \Delta X = F,$$

где

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^{(0)} \\ \tilde{x}_2^{(0)} \\ A^{(0)} \\ B^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \Delta X = \begin{pmatrix} \Delta \tilde{x}_1 \\ \Delta \tilde{x}_2 \\ \Delta A \\ \Delta B \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}.$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial F_1}{\partial A} & \frac{\partial F_1}{\partial B} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial F_2}{\partial A} & \frac{\partial F_2}{\partial B} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial F_3}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial F_3}{\partial A} & \frac{\partial F_3}{\partial B} \\ \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{x}_1} & \frac{\partial F_4}{\partial \tilde{x}_2} & \frac{\partial F_4}{\partial A} & \frac{\partial F_4}{\partial B} \end{pmatrix}.$$

Следующим приближением будут величины $X^{(1)} = X^{(0)} + \Delta X$. Итерационный процесс продолжают до достижения заданной точности.

Этот метод очень чувствителен к выбору начальных приближений. В случае, когда гистограмма, описывающая составной сигнал, является бимодальной, в качестве начальных приближений

$\tilde{x}_1^{(0)}, \tilde{x}_2^{(0)}$ можно выбрать середины бинов гистограммы, в которых она достигает локальных максимумов, а их амплитуды принять за $A^{(0)}, B^{(0)}$. В случае близких, сильно перекрывающихся составляющих, когда гистограмма становится унимодальной, мы воспользовались способом, описанным в [5]: центр бина гистограммы с максимальной амплитудой принимают за положение одного из сигналов, а высоту этого бина — за амплитуду импульса. По этим данным составляют вспомогательную гистограмму и вычитают ее из исходной. Затем по остатку гистограммы тем же способом определяют начальное приближение амплитуды и положение второго импульса.

Вычисления матрицы частных производных D при известном начальном приближении значительно упрощается, благодаря вышеступленному свойству (9) гауссовых вейвлетов, согласно которому мы получаем

$$\frac{\partial F_n}{\partial \tilde{x}_1} = Ag_{n+1}(\tilde{x}_1), \quad \frac{\partial F_n}{\partial \tilde{x}_2} = Bg_{n+1}(\tilde{x}_2),$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial A} = -g_n(\tilde{x}_1), \quad \frac{\partial F_n}{\partial B} = -g_n(\tilde{x}_2).$$

Следует отметить, что по исходной гистограмме четыре вейвлет-коэффициента $W_n(a, b)h, n = 1, 2, 3, 4$ необходимо вычислить только один раз. При этом для выбора параметров a и b помимо рекомендаций, данных в разделе "Влияние шумов на вейвлет-образ", весьма полезно учесть свойство гауссовых вейвлетов: сохранять относительную площадь (11).

4.5. Выбор масштаба вейвлетов

При вычислении вейвлет-коэффициентов в большинстве случаев масштабирующий коэффициент может быть выбран произвольно. Однако для получения наиболее точных результатов коэффициент растяжения следует выбирать в соответствии с конкретными данными.

При вычислении вейвлет-образов их можно растянуть таким образом, чтобы на интервал гистограммирования (x_{min}, x_{max}) при-

ходила в вполне определенная относительная площадь вейвлета w :

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left| g_n \left(\frac{x_0^m - x}{a} \right) \right| dx = w \int_{-\infty}^{\infty} \left| g_n \left(\frac{x_0^m - x}{a} \right) \right| dx, \quad 0 < w < 1,$$

$$x_0^m = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}.$$

Для гауссового вейвлета g_1 это условие приводит к следующему значению масштабирующего коэффициента:

$$a = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \sqrt{\frac{1}{\ln(1-w)}}. \quad (25)$$

Непосредственное вычисление коэффициента растяжения вейвлетов g_2 , g_3 и g_4 произвести значительно сложнее. Однако, учитывая свойство гауссовых вейвлетов, сохранять относительную площадь независимо от порядка самого вейвлета (см. рис. 5) и от величины коэффициента растяжения, при вычислении вейвлет-образов можно использовать один и тот же масштабирующий множитель (25).

Практически более удобно использовать еще один дополнительный параметр – длину v некоторого интервала, исключив из выражения (25) границы отрезка (x_{\min}, x_{\max}) :

$$a = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{1}{\ln(1-w)}}.$$

5. Результаты

Предложенные выше методы определения параметров сигналов гауссовой формы были опробованы на данных, моделирующих дискретизованные одиночные и составные сигналы.

Для одиночного гауссиана сравнивались итерационные методы, основанные на поиске минимума и максимума вейвлет-преобразования, а также прямые методы WT2/WT1, WT3/WT1 и

WT4/WT2. Наилучшим по точности и по скорости вычислений оказался метод WT3/WT1, для которого на выборке со 100% эффективностью расчетов ошибка в определении положения сигнала оказалась вдвое меньше, чем для WT2/WT1, и на 20 % лучше, чем для метода минимизации вейвлет-преобразования, требующего 7-10 итераций. Поэтому ниже приводятся более детальные результаты только для метода WT3/WT1.

Для составных сигналов, образующихся наложением двух гауссианов с известной полушириной был протестирован метод WTS для трех разных уровней грануляции детектора (числа бинов, на которые дискретизуется сигнал), разных соотношений амплитуд и расстояний между составляющими. Результаты зависимости точности оценок параметров от уровня шума и от грануляции сведены в таблицы 2 и 3.

5.1. Метод WT3/WT1 для одиночного гауссиана

Здесь представлены результаты обработки численного эксперимента, в котором данные моделировались как одиночные гауссианы с полушириной $\sigma = 1.25$, заносимые в гистограмму из 10 бинов на интервале $(-5, 5)$. Положение сигнала задавалось около нуля случайным образом в пределах $\pm 1/2$ ширины бина. Амплитуда сигнала была распределена по экспоненциальному закону в пределах от 100 до 1000. К построенной гистограмме добавлялся равномерный или нормальный шум. Амплитуда равномерного шума и σ_n нормального шума выбирались как 3% от среднего заряда. Слабые сигналы отсекались на уровне $3\sigma_n$. Из трех способов восстановления положения – вычисление вейвлет-коэффициентов слева и справа от центра x_0 , а также среднее этих двух полученных значений (x_0^{mid}), был выбран последний, дающий наименьшие разброс и смещение оценки положения сигнала. В таблице 1 приведены результаты и основные параметры обработки (данные по амплитуде даны в абсолютных значениях).

Таблица 1

Результаты обработки одиночного сигнала по методу WT3/WT1

шум	число опытов	параметр	среднее	σ
нормальный	1010	x_0^{mid}	0.00069	0.0427
		A	-11.27	11.57
равномерный	1111	x_0^{mid}	-0.00208	0.0277
		A	-8.414	6.490

5.2. Метод WTS для составного сигнала

Числовая модель составного сигнала строилась аналогично тому, как это делалось для одиночного гауссиана. Центр второго сигнала располагался случайным образом на расстоянии от 2 до 2.5 общей полуширины сигнала σ от положения первого сигнала. Амплитуда второго сигнала выбиралась в долях от амплитуды первого сигнала (были просчитаны варианты 1:1, 1:2 и 1:10). К бинам построенной гистограммы добавлялся равномерный шум с амплитудой в процентах от среднего заряда. Кроме того, для проверки зависимости ошибок параметров от уровня грануляции детектора число бинов гистограммы также выбиралось различным: 10, 20 и 30. Каждая точка в таблице вычислялась как среднее по 1000 испытаний, число итераций всюду ограничивалось 10, хотя в среднем оно не превышало 2-3.

Таблица 2

Зависимость ошибок параметров от шума

равн. шум в % от max ампл.	1%	5%	10%
σ_{x_1}	0.011	0.084	0.104
σ_{x_2}	0.026	0.153	0.256
σ_A	0.215	0.307	0.480
σ_B	0.280	0.328	0.463

В таблице 2 показана зависимость ошибок параметров от равномерного шума со значениями в 1%, 5% и 10% от высоты бина с максимальным зарядом. Вычисления проведены для уровня грануляции детектора, соответствующего разбиению гистограммы

на 10 бинов, как наиболее близкого к реальным измерениям на силиконовых дрейфовых камерах. Значения ошибок положения сигналов даны в единицах ширины бина гистограммы, ошибки амплитуд отнесены к максимальной амплитуде. Небольшое ухудшение точности для второго сигнала по сравнению с первым, имеющим большую амплитуду, вызвано несимметрией в обработке сигналов.

Результаты исследования зависимости ошибок параметров одного из сигналов от уровня грануляции даны в таблице 3. Уровень шума выбран в 5% от максимальной амплитуды.

Таблица 3

Зависимость ошибок параметров от грануляции (числа бинов) при шуме 5% от максимальной амплитуды

число бинов	10	20	30
σ_{x_1}	0.084	0.065	0.105
σ_A	0.370	0.256	0.223

6. Заключение

Проведенные исследования по применению вейвлет-преобразований для обработки сигналов гауссовой формы позволили найти быстрые и эффективные алгоритмы для определения параметров исходных сигналов по результатам их измерений дискретными детекторами с различной степенью грануляции.

В отличие от предыдущих работ в этих алгоритмах существенным образом используются вейвлеты более высоких порядков. На этой основе предложены быстрые прямые методы определения не только параметров положения и амплитуды сигнала, но и его полуширины.

Совместное использование первых четырех вейвлет-преобразований позволило существенно повысить точность предложенного метода WTS. Это стало возможным благодаря установлению нового свойства - постоянства относительной площади вейвлетов, что и создало возможность для оптимального выбора масштабного коэффициента, общего для нескольких вейвлет-преобразований.

Вычисления на модельных данных показывают, что предлагаемые алгоритмы, основанные на применении вейвлет-преобразова-

ний, обеспечивают точности, не уступающие более трудоемким методам подгонки гауссианов к данным дискретных измерений [4, 5].

Авторы выражают благодарность М.В.Алтайскому за стимулирующие дискуссии и обсуждение результатов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 97-01-01027.

Литература

- [1] H.Agakishiev et. al., *Cherenkov Ring Fitting Techniques for the CERES RICH Detectors*, Nucl.Instr. and Methods, **A371** (1996), 243-247.
- [2] J.P.Wurm et. al. IEEE TRANS. On Nuclear Science, v. 39, No. 4, (1992), 619-628.
- [3] E.Conti et. al., *Performance of a liquid xenon time projection chamber for low energy γ -ray detection*, Nucl.Instr. and Meth. **A356** (1995), 286-296.
- [4] E.Gatti, P.Rehak, M.Sampietro, Nucl.Instr. and Meth. in Phys. Res. **A274** (1989), 469-476.
- [5] H.Agakishiev et. al., *Effective pulse resolution algorithms for detectors with gaussian-like signal shape*. Commun. of JINR E10-97-105, Dubna, 1997.
- [6] M.V.Altaiski, *Standard and nonstandard applications of wavelet analysis*, JINR Rapid Comm. No.6[74], (1995). Dubna. 35-60.
- [7] M.V.Altaisky, E.A.Kolganova V.E.Kovalenko, G.A.Ososkov, *How to resolve overlapping gaussian signals using wavelets*. Proc. of the International conference of SPIE -The International Society for Optical Engineering, SPIE'96, Denver USA, August 4-9, 1996.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 ноября 1997 года.