ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

97-273

Р11-97-273

Е.П.Жидков, Н.А.Лиходед*, В.А.Петров*

БЫСТРО СХОДЯЩИЕСЯ СОСТАВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ВИНЕРОВСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Направлено в «Журнал вычислительной математики
и математической физики»

---

*Институт математики АН Белоруссии, Минск

1997

Задача вычисления континуальных интегралов по мерам, порождаемым случайными процессами, или, что то же самое, задача вычисления математических ожиданий функционалов от траекторий случайных процессов возникает во многих приложениях. Точное вычисление континуальных интегралов возможно лишь в отдельных случаях, поэтому в основном используются процедуры их приближенного вычисления [1, 2].

Один из основных подходов к получению таких процедур заключается в следующем. Сначала исходный случайный процесс $\xi(s)$ аппроксимируется таким случайным процессом $\xi^{(n)}(s)$, чтобы математическое ожидание произвольного функционала от траекторий процесса $\xi^{(n)}(s)$ вырождалось в кратный интеграл. Затем кратный интеграл вычисляется с помощью кубатурных формул или методом Монте-Карло.

В данной работе предлагается использовать такую аппроксимацию винеровского процесса, что все моменты аппроксимирующего процесса $\xi^{(n)}(s)$ сходятся к моментам винеровского процесса со скоростью $O(1/n^4)$. В известных авторам ранее опубликованных работах для получения формул приближенного континуального интегрирования использованы такие аппроксимации, что моменты сходятся со скоростью $O(1/n)$.

Пусть $\xi(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, — выходящий из нуля винеровский процесс. Рассмотрим следующий случайный процесс:

$$\xi^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^{n} \varkappa_k \mathbf{1}_{[t_k,t]}(s)\xi_k,$$

где n — четное число, $\varkappa_0 = \varkappa_n = \sqrt{\dfrac{t}{3n}}$, $\varkappa_1 = \varkappa_3 = \ldots = \varkappa_{n-1} = \sqrt{\dfrac{4t}{3n}}$, $\varkappa_2 = \varkappa_4 = \ldots = \varkappa_{n-2} = \sqrt{\dfrac{2t}{3n}}$, $\mathbf{1}_{[t_k,t]}(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in [t_k, t], \\ 0, & \text{если } s \notin [t_k, t], \end{cases}$ — характеристическая функция отрезка $[t_k, t]$, $t_k = \dfrac{kt}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — точки равномерного разбиения отрезка $[0,t]$ на n частей, ξ_k — независимые гауссовы случайные величины с параметрами $(0,1)$.

Найдем характеристический функционал $\mathbf{E}\exp\{i\ell(\xi^{(n)}(\cdot))\}$ процессов $\xi^{(n)}(s)$ (ℓ — линейный непрерывный функционал на пространстве $L_2[0,t]$).

$$\mathbf{E}\exp\Big\{i\ell\Big(\sum_{k=0}^{n}\varkappa_k \mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot)\xi_k\Big)\Big\}=\mathbf{E}\exp\Big\{i\sum_{k=0}^{n}\varkappa_k\xi_k\ell(\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot))\Big\}=$$

$$=\prod_{k=0}^{n}\mathbf{E}\exp\Big\{i\varkappa_k\ell(\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot))\xi_k\Big\}=\prod_{k=0}^{n}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\varkappa_k^2\ell^2(\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot))\Big\}=$$

$$=\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\varkappa_k^2\ell^2(\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot))\Big\}.$$

Так как сумма в показателе экспоненты

$$\sum_{k=0}^{n}\varkappa_k^2\ell^2(\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot))=\frac{t}{3n}\sum_{k=0}^{n}\Big\{\ell^2(\mathbf{1}_{[t_0,t]}(\cdot))+\ell^2(\mathbf{1}_{[t_n,t]}(\cdot))+$$
$$+4\Big(\ell^2(\mathbf{1}_{[t_1,t]}(\cdot))+\ell^2(\mathbf{1}_{[t_3,t]}(\cdot))+\ldots+\ell^2(\mathbf{1}_{[t_{n-1},t]}(\cdot))\Big)+$$
$$+2\Big(\ell^2(\mathbf{1}_{[t_2,t]}(\cdot))+\ell^2(\mathbf{1}_{[t_4,t]}(\cdot))+\ldots+\ell^2(\mathbf{1}_{[t_{n-2},t]}(\cdot))\Big)\Big\}$$

–есть квадратурная сумма Симпсона для интеграла $\int\limits_0^t\ell^2(\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot))\,d\tau$, то справедлива следующая

Лемма 1. *Характеристические функционалы процессов $\xi^{(n)}$ стремятся при $n\to\infty$ к характеристическому функционалу винеровского процесса* $\exp\Big(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\ell^2(\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot))\,d\tau\Big)$.

С помощью характеристических функционалов $\mathbf{E}\exp(i\ell(\xi^{(n)}(\cdot)))$ процессов $\xi^{(n)}(s)$ нетрудно найти моменты $\mathbf{E}\ell^p(\xi^{(n)})$:

$$\mathbf{E}\,\ell^p(\xi^{(n)})=i^{-p}\frac{d^p}{d\lambda^p}\Big|_{\lambda=0}\mathbf{E}\,\exp(i\lambda\ell(\xi^{(n)}))=$$

$$=i^{-p}\frac{d^p}{d\lambda^p}\Big|_{\lambda=0}\exp\Big\{-\frac{\lambda}{2}\sum_{k=0}^{n}\varkappa_k^2\ell^2(\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot))\Big\}=$$

$$=i^{-p}\frac{d^p}{d\lambda^p}\Big|_{\lambda=0}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(-1)^j\frac{\lambda^{2j}}{2^j}\Big(\sum_{k=0}^{n}\varkappa_k^2\ell^2(\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot))\Big)^j=$$

$$=\begin{cases}0, & \text{если } p=1,3,5,\ldots,\\ \dfrac{1}{2^{p/2}}\dfrac{p!}{(p/2)!}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n}\varkappa_k^2\ell^2(\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot))\Big)^{p/2}, & \text{если } p=0,2,4,\ldots\end{cases}$$

Таким образом, моменты случайных величин $\ell(\xi^{(n)})$ можно рассматривать как полученные по формуле Симпсона приближенные значения моментов (для четных p)

$$\mathbf{E}\,\ell^p(\xi)=\begin{cases}0, & \text{если } p=1,3,5,\ldots,\\ \dfrac{1}{2^{p/2}}\dfrac{p!}{(p/2)!}\Big(\int\limits_0^t\ell^2(\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot))\,d\tau\Big)^{p/2}, & \text{если } p=0,2,4,\ldots\end{cases}$$

случайных величин $\ell(\xi)$. Поэтому справедлива

Лемма 2. *Если существует четвертая производная функции $f(\tau)=\ell^2(\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot))$, то все моменты $\mathbf{E}\,\ell^p(\xi^{(n)})$, $p=0,1,2,\ldots$ стремятся к соответствующим моментам $\mathbf{E}\,\ell^p(\xi)$ со скоростью $O(1/n^4)$.*

Аппроксимация $\xi(s)\approx\xi^{(n)}(s)$ винеровского процесса приводит к составной приближенной формуле

$$\mathbf{E}\,F(\xi)\approx\mathbf{E}\,F(\xi^{(n)})=\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big)^{n+1}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}}F\Big(\sum_{k=0}^{n}\varkappa_k\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot)\,u_k\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}u_k^2\Big)\,du_0du_1\ldots du_n. \tag{1}$$

Обозначим

$$F_m(\xi)=c_0+\sum_{p=0}^{m}\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_p=p,\\ k_j\geqslant 0,\ 1\leqslant j\leqslant p}}c_{k_1,\ldots,k_p}\prod_{i=1}^{p}\ell_i^{k_i}(\xi),\quad m=0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

где $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_m$ — линейные функционалы на $C_{[0,t]}$ такие, что существуют четвертые производные функций $f_{ij}(\tau)=\ell_i(\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot))\,\ell_j(\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot))$, $1\leqslant i,j\leqslant m$.

Теорема 1. *Погрешность формулы (1) для функционалов вида (2) –есть бесконечно малая величина порядка $O(1/n^4)$.*

Доказательство. Ввиду поляризационного равенства

$$\ell_1\ell_2\ldots\ell_q=\frac{1}{q!}\sum_{k=1}^{q}(-1)^{q-k}\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant q}(\ell_{i_1}+\ldots+\ell_{i_k})^q$$

теорему достаточно доказать для функционалов вида $(\ell_{i_1}+\ldots+\ell_{i_k})^q$. Из леммы 2 следует, что достаточно потребовать существования четвертой производной функции $\Big(\ell_{i_1}(\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot))+\ldots+\ell_{i_k}(\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot))\Big)^2$, то есть функций $f_{ij}(\tau)$. Теорема доказана.

Следующая теорема позволяет грубо оценивать остаток

$$R^{(n)}(F)=\mathbf{E}\,F(\xi)-\mathbf{E}\,F(\xi^{(n)})$$

приближенной формулы (1).

Теорема 2. *Приближенное равенство*

$$R^{(n)}(F) \approx R_3^{(n)}(F) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{2}\left\{\int_0^t F\Big((-1)^i\sqrt{t}\,\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot)\Big)d\tau - \sum_{k=0}^{n} \varkappa_k^2 F\Big((-1)^i\sqrt{t}\,\mathbf{1}_{[t_k,t]}(\cdot)\Big)\right\} \qquad (3)$$

дает точный результат в случае, когда F — функциональный многочлен третьей степени.

Справедливость теоремы можно проверить непосредственным вычислением $R^{(n)}(F)$ и $R_3^{(n)}(F)$ в случае, когда F — функциональный многочлен третьей степени, и сравнением полученных результатов.

Замечание. Если функции $f_i(\tau) = F((-1)^i\sqrt{t}\,\mathbf{1}_{[\tau,t]}(\cdot))$ имеют четвертые производные, то $R_3^{(n)}(F) = \frac{1}{2t}\sum_{i=1}^{2}\frac{t^5}{180n^4}f_i^{IV}(\xi_i)$, где $\xi_i \in [0,t]$.

Из леммы 1 следует сходимость формулы (1) для ограниченных непрерывных на $C[0,t]$ функционалов. Следующая теорема устанавливает сходимость этой аппроксимации не только для ограниченных функционалов.

Теорема 3. *Пусть F — такой непрерывный на $L_2[0,t]$ функционал, что семейство случайных величин $\zeta_n = F(\xi^{(n)})$ равномерно интегрируемо. Тогда формула (1) сходится при $n \to \infty$.*

Доказательство. Докажем сначала сходимость распределений $F(\xi^{(n)})$ к распределению $F(\xi)$. Для этого проверим выполнение следующих условий [3]:

1) $\mathbf{E}\,(\xi^{(n)}(s))^2 \leqslant C$, C — некоторая константа, $s \in [0,t]$,

2) $\mathbf{E}\,(\xi^{(n)}(s))^2 \to \mathbf{E}\,\xi^2(s) = s$ при $n \to \infty$ для всех $s \in [0,t]$,

3) конечномерные распределения процесса $\xi^{(n)}(s)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\xi(s)$.

Выполнение первых двух условий следует из представления (ниже $\mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1})}(s) = 1$ для $s = t$, в противном случае $\mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1})}(s) = 0$)

$$\mathbf{E}\,(\xi^{(n)}(s))^2 = \mathbf{E}\sum_{k_1=0}^{n}\sum_{k_2=0}^{n}\varkappa_{k_1}\varkappa_{k_2}\mathbf{1}_{[t_{k_1},t]}(s)\,\mathbf{1}_{[t_{k_2},t]}(s)\,\xi_{t_{k_1}}\xi_{t_{k_2}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\varkappa_k^2\mathbf{1}_{[t_k,t]}(s) = \sum_{k=0}^{n}\varkappa_k^2\sum_{j=k}^{n}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) = \sum_{j=0}^{n}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s)\sum_{k=0}^{j}\varkappa_k^2 =$$

$$= \mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(s)\varkappa_0^2 + \sum_{j=1(2)}^{n-1}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s)\sum_{k=0}^{j}\varkappa_k^2 + \sum_{j=2(2)}^{n-2}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s)\sum_{k=0}^{j}\varkappa_k^2 + \mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1})}(s)\sum_{k=0}^{n}\varkappa_k^2 =$$

$$= \frac{t}{3n}\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(s)\varkappa_0^2 + \sum_{j=1(2)}^{n-1}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s)\Big(\frac{t}{3n} + \frac{j+1}{2}\frac{4t}{3n} + \frac{j-1}{2}\frac{2t}{3n}\Big) +$$

$$+ \sum_{j=2(2)}^{n-2}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s)\Big(\frac{t}{3n} + \frac{j}{2}\frac{4t}{3n} + \frac{j}{2}\frac{2t}{3n}\Big) +$$

$$+ \mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1})}(s)\Big(\frac{t}{3n} + \frac{n}{2}\frac{4t}{3n} + \frac{n-2}{2}\frac{2t}{3n} + \frac{t}{3n}\Big) = \frac{t}{3n}\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(s)\varkappa_0^2 +$$

$$+ \sum_{j=1(2)}^{n-1}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s)\frac{t}{3n}(3j+2) + \sum_{j=2(2)}^{n-2}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s)\frac{t}{3n}(3j+1) + \mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1})}(s)t =$$

$$= \frac{t}{3n}\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(s) + \sum_{j=1(2)}^{n-1}\Big(t_j + \frac{2t}{3n}\Big)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) + \sum_{j=2(2)}^{n-2}\Big(t_j + \frac{t}{3n}\Big)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) + t\mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1})}(s).$$

В самом деле, тогда

$$\mathbf{E}\,(\xi^{(n)}(s))^2 \leqslant t\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(s) + \sum_{j=1(2)}^{n-1}t\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) + \sum_{j=2(2)}^{n-2}t\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) + t\mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1})}(s) =$$

$$= t\sum_{j=0}^{n}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) = t,$$

условие 1) выполнено;

$$|\mathbf{E}\,\xi^2(s) - \mathbf{E}\,(\xi^{(n)}(s))^2| = |s - \mathbf{E}\,(\xi^{(n)}(s))^2| =$$

$$= \Big|\sum_{j=0}^{n}s\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) - \frac{t}{3n}\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(s) - \sum_{j=1(2)}^{n-1}\Big(t_j + \frac{2t}{3n}\Big)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) -$$

$$- \sum_{j=2(2)}^{n-2}\Big(t_j + \frac{t}{3n}\Big)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) - t\mathbf{1}_{[t_n,t_{n+1})}(s)\Big| =$$

$$= \Big|\Big(s - \frac{t}{3n}\Big)\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(s) + \sum_{j=1(2)}^{n-1}\Big(s - t_j - \frac{2t}{3n}\Big)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) +$$

$$+ \sum_{j=2(2)}^{n-2}\Big(s - t_j - \frac{t}{3n}\Big)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s)\Big| \leqslant \frac{t}{n}\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(s) + \sum_{j=1(2)}^{n-1}\frac{2t}{3n}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) +$$

$$+ \sum_{j=2(2)}^{n-2}\frac{2t}{3n}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2t}{3n}\Big(\mathbf{1}_{[t_0,t_1)}(s) + \sum_{j=1(2)}^{n-1}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s) + \sum_{j=2(2)}^{n-2}\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(s)\Big) \leqslant \frac{2t}{3n},$$

откуда и следует условие 2).

Третье условие выполняется в силу сходимости характеристических функционалов процессов $\xi^{(n)}(s)$ к характеристическому функционалу процесса $\xi(s)$ (лемма 1).

Из сходимости распределений ζ_n к распределению $F(\xi)$ и равномерной интегрируемости семейства случайных величин ζ_n следует сходимость формулы (1). Теорема доказана.

Приведем пример. Пусть $F(\xi) = \exp\Big\{-\int\limits_0^1 \xi^4(s)\,ds\Big\}$. Воспользуемся формулами (1) и (3) при $n = 2, 4, 6, \ldots, 16$. Кратные интегралы по $\mathbb{R}^{n+1}$ в формуле (1) будем вычислять методом Монте — Карло

$$\mathrm{E}\, F(\xi^{(n)}) = \frac{1}{N}\sum_{\eta=1}^{N} F(\xi_\eta^{(n)}) + r_N^{(n)}(F),$$

где $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_N^{(n)}$ — независимые реализации процесса $\xi^{(n)}$, $r_N^{(n)}(F)$ — погрешность метода. Выберем $N = 10^6$ и зададимся доверительной вероятностью $0,95$ (тогда с вероятностью 0,95 погрешность метода Монте — Карло не превосходит $0{,}002\sqrt{\mathrm{D}\, F(\xi^{(n)})}$; дисперсию $\mathrm{D}\, F(\xi^{(n)})$ нетрудно приближенно вычислить, используя величины $F(\xi_\eta^{(n)})$). Результаты вычислений (четыре значащие цифры для приближенного значения $\mathrm{E}\, F(\xi^{(n)})$ и две значащие цифры для $R_3^{(n)}(F)$ и $r_N^{(n)}(F)$) представлены в таблице.

n	$\mathrm{E}\, F(\xi^{(n)})$	$R_3^{(n)}(F)$	$r_N^{(n)}(F)$
2	0,7145	$-0,21 \cdot 10^{-3}$	$0,67 \cdot 10^{-3}$
4	0,6925	$-0,13 \cdot 10^{-4}$	$0,66 \cdot 10^{-3}$
6	0,6892	$-0,28 \cdot 10^{-5}$	$0,66 \cdot 10^{-3}$
8	0,6877	$-0,10 \cdot 10^{-5}$	$0,66 \cdot 10^{-3}$
10	0,6878	$-0,53 \cdot 10^{-6}$	$0,65 \cdot 10^{-3}$
12	0,6869	$-0,35 \cdot 10^{-6}$	$0,66 \cdot 10^{-3}$
14	0,6876	$-0,29 \cdot 10^{-6}$	$0,65 \cdot 10^{-3}$
16	0,6877	$-0,11 \cdot 10^{-6}$	$0,65 \cdot 10^{-3}$

Проанализировав таблицу, можно предположить, что

$$\mathrm{E}\,\exp\Big\{-\int\limits_0^1 \xi^4(s)\,ds\Big\} = 0,687\ldots .$$

Таким образом, в статье построена составная приближенная формула (1), сходящаяся на классе функциональных многочленов произвольной

степени со скоростью $O(1/n^4)$. Построена приближенная формула для вычисления остатка составной аппроксимации. Получены условия сходимости составной формулы.

Литература

1. Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Мн., 1985.
2. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. Functional Integrals: Approximate Evaluation and Applications. Dordrecht, 1993.
3. Grinblat L. Š. // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. Vol. 64, N 2. P. 371 – 376.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 сентября 1997 года.