СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р11 - 9678

В.Ц.Банчев

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1976

P11 - 9678

В.Ц.Банчев

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Банчев В.Ц. P11 - 9678

Алгоритм решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Предлагается А-устойчивый алгоритм решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В основу алгоритма положен обобщенный метод Рунге-Кутта, предложенный Лоусоном, в котором матричная экспонента аппроксимируется с помощью разложения показательной функции в непрерывную дробь. Алгоритм позволяет получить оценку локальной ошибки усечения, которая используется для автоматического выбора величины шага и порядка аппроксимации матричной экспоненты.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

Banchev V.Ts. P11 - 9678

An Algorithm for the Solution of the Cauchy Problem for Stiff Systems of Ordinary Differential Equations

An A-stable algorithm for the solution of the Cauchy problem for stiff systems of ordinary differential equations is presented. It is based on the generalized Runge-Kutta method, suggested by Lawson, with a continued fraction approximation for the matrix exponential. The algorithm allows an estimation of the local truncation error, which is used for the automatic choice of step size and order of matrix exponential approximant.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

I. Введение

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(t,y) \quad , \tag{I}$$

где $y=(y^1,y^2,\ldots,y^N)$ и $f=(f^1,f^2,\ldots,f^N)$ – N-мерные векторы, называют жесткой в случае, если ее матрица Якоби $\partial f/\partial y$ имеет большой разброс собственных значений, т.е. когда $|\lambda_{max}|/|\lambda_{min}| \gg 1$, где λ_{max} и λ_{min} – максимальное и минимальное по модулю собственные числа матрицы $\partial f/\partial y$. Жесткость системы (I) сильно затрудняет, а часто делает и практически невозможным численное интегрирование задачи Коши

$$y' = f(t,y) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

классическими явными методами типа Рунге-Кутта или Адамса. Это так, потому что большинство из этих методов являются устойчивыми, если величина шага h удовлетворяет неравенству $|h\lambda_i| < \alpha$ для всех собственных чисел λ_i $(i=1,2,\ldots,N)$ матрицы $\partial f/\partial y$, где $I \le \alpha \le I0$. Следовательно, если даже нас будут интересовать только компоненты решения, отвечающие малым λ_i, присутствие больших собственных чисел приводит к выбору столь малого h, что время счета сильно возрастает и влияние ошибок округления становится существенным /I,2/.

К необходимости решения жестких систем дифференциальных уравнений приводят многие задачи науки и техники. Обычно рассматриваемые в настоящее время задачи такого рода характеризуются тем, что большие по модулю собственные значения $\partial f/\partial y$ имеют большую отрицательную вещественную часть. К решению таких задач сводятся проблемы кинематики, процессов переноса, управления, анализа электрических цепей и др. Характерным для всех этих проблем является такое поведение решения задачи Коши (2), при котором жесткие компоненты претерпевают быстрое начальное изменение (типа распада, например), либо меняются сильно только в некотором пограничном слое. После такого начального периода или вне пограничного слоя они уже меняются медленно, а часто становятся пренебрежимо малыми, так что дальше уже интерес представляют только нежесткие компоненты решения (2). Однако и в этом случае условия устойчивости для классических методов явного вида будут требовать выбора очень малого шага интегрирования, хотя информация о поведении исследуемого процесса будет содержаться по существу только в нежестких компонентах /3/.

В связи с этим в 1963 г. Дальквист /6/ ввел понятие А-устойчивости. Метод решения задачи Коши (2) называется А-устойчивым, если получаемое с его помощью численное решение уравнения $y'=\lambda y$ стремится к нулю при $t\to\infty$, когда $Re\,\lambda<0$ $(h>0)$. Дальквист показал, что явные K-шаговые методы ($K=1,2,\dots$) не могут быть А-устойчивыми, и таким образом указал на необходимость использования неявных методов.

В настоящее время существует уже довольно много хорошо разработанных А-устойчивых методов /1,2,3/. Однако, надо отметить, что не все из них можно использовать в общем случае, т.е. когда большие по модулю собственные значения матрицы $\partial f/\partial y$ могут иметь не только большие отрицательные вещественные части /7/. В этом отношении выгодно отличаются те методы, которые явно используют матрицу Якоби $\partial f/\partial y$ /2/. Некоторые из них требуют знания собственных чисел $\partial f/\partial y$, а некоторые только какого-то приближения к $\partial f/\partial y$ /4/.

В этой работе предлагается алгоритм решения задачи Коши (2) в общем случае, когда большие по модулю собственные числа матрицы $\partial f/\partial y$ могут находиться как в левой, так и в правой полуплоскости. В его основу положен обобщенный метод Рунге-Кутта, предложенный Лоусоном /4/, в котором матричная экспонента аппроксимируется с помощью разложения показательной функции в цепную дробь /5/. Величина шага и порядок аппроксимации матричной экспоненты контролируются автоматически путем оценки локальной ошибки усечения. Алгоритм является А-устойчивым.

2. Описание алгоритма

Сначала коротко остановимся на обобщенном методе Рунге-Кутта /4/, который используется в предлагаемом алгоритме. Для решения задачи Коши (2) введем новую неизвестную функцию $z(t)=\exp(-tA)\,y(t)$, где A - пока не определенная $N\times N$ матрица. Тогда (2) превращается в

$$z'=\exp(-tA)\left\{f\left[t,\exp(tA)z(t)\right]-A\exp(tA)z(t)\right\},\qquad(3)$$
$$z(t_0)=\exp(-t_0A)\,y_0 .$$

Переписывая (3) в виде $z'=g(t,z)$, $z(t_0)=z_0$, мы находим, что матрица Якоби $\partial g/\partial z$ для задачи (3) имеет вид

$$\frac{\partial g}{\partial z}=\exp(-tA)\left\{\frac{\partial f}{\partial y}-A\right\}\exp(tA).$$

Следовательно, так как $\exp(-tA)=[\exp(tA)]^{-1}$, собственные значения $\partial g/\partial z$ равняются собственным значениям матрицы $\partial f/\partial y-A$. Если они малы, решение задачи (2) сводится к интегрированию нежесткой системы (3). Решая (3) с помощью какого-нибудь явного метода Рунге-Кутта

$$K_1=g(t_n,z_n),$$
$$K_i=g\Big(t_n+c_ih,\,z_n+h\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}K_j\Big),\quad i=2,3,\dots,v,$$
$$z_{n+1}=z_n+h\sum_{i=1}^{v}w_iK_i,$$
$$0\le c_1\le c_2\le\dots\le c_v\le 1,$$

мы получаем формулы обобщенного метода Рунге-Кутта /4/ для нахождения численного решения (2):

$$k_1^* = f(t_n, y_n) - A y_n ,$$
$$p_i^* = \exp(c_i h A) y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \exp[(c_i - c_j) h A] k_j^* ,$$
$$k_i^* = f(t_n + c_i h, p_i^*) - A p_i^* , \quad i = 2, 3, \ldots, v,$$
$$y_{n+1} = \exp(hA) y_n + h \sum_{i=1}^{v} w_i \exp[(1 - c_i) h A] k_i^* , \qquad (4)$$
$$0 = c_1 \le c_2 \le \ldots\ldots \le c_v \le 1 .$$

В качестве матрицы A в (4) естественно брать $\partial f / \partial y$, вычисляемую периодически через определенное число шагов. Кроме того, нужен алгоритм для приближенного вычисления $\exp(c_i h A)$. В работе /4/ показано, что если аппроксимация $\exp(c_i h A)$ имеет спектральный радиус меньше единицы для всех $h > 0$ в предположении отрицательности вещественных частей собственных чисел A, то алгоритм (4) A-устойчив. Таким свойством обладают приближения матричной экспоненты $\exp(tA)$, получаемые с помощью ее разложения в непрерывную дробь /5/, а также аппроксимации Падэ /I,4/. В настоящем алгоритме используется метод приближения матричной экспоненты с помощью разложения в цепную дробь. При этом мы ограничились только нечетными аппроксимациями, которые совпадают с диагональными падэ-аппроксимациями (подробнее см. /5/, где показано, что это позволяет увеличить скорость сходимости приближений матричной экспоненты). Они вычисляются по формулам

$$F_1 = I , \quad F_3 = 2I - tA , \quad G_1 = I , \quad G_3 = 2I + tA ,$$
$$\left.\begin{aligned} F_{2j+1} &= 2(2j-1) F_{2j-1} + t^2 A^2 F_{2j-3} \\ G_{2j+1} &= 2(2j-1) G_{2j-1} + t^2 A^2 G_{2j-3} \end{aligned}\right\} \; j = 2, 3, \ldots ,$$
$$H_{2m+1}(tA) = F_{2m+1}^{-1}(tA) \cdot G_{2m+1}(tA) \approx \exp(tA), \qquad (5)$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots ,$$

где I – единичная матрица, а m – порядок аппроксимации.

Для численного решения задачи Коши (2) с помощью (4), (5) и оценки локальной ошибки усечения в алгоритме используется один из методов вложения Сарафаяна /I/, который основывается на формуле Бутчера пятого порядка вида

$$\begin{aligned}
&v = 6, \\
&a_{ij} = 0 , \; j \ge i, \\
&a_{21} = \tfrac{1}{4} , \\
&a_{31} = \tfrac{1}{8} , \; a_{32} = \tfrac{1}{8} , \\
&a_{41} = 0 , \; a_{42} = -\tfrac{1}{2} , \; a_{43} = 1 , \\
&a_{51} = \tfrac{3}{16} , \; a_{52} = 0 , \; a_{53} = 0 , \; a_{54} = \tfrac{9}{16} , \\
&a_{61} = -\tfrac{3}{7} , \; a_{62} = \tfrac{2}{7} , \; a_{63} = \tfrac{12}{7} , \; a_{64} = -\tfrac{12}{7} , \; a_{65} = \tfrac{8}{7} , \\
&c_1 = 0 , \; c_2 = \tfrac{1}{4} , \; c_3 = \tfrac{1}{4} , \; c_4 = \tfrac{1}{2} , \; c_5 = \tfrac{3}{4} , \; c_6 = 1 , \\
&w_1 = \tfrac{7}{90} , \; w_2 = 0 , \; w_3 = \tfrac{32}{90} , \; w_4 = \tfrac{12}{90} , \; w_5 = \tfrac{32}{90} , \; w_6 = \tfrac{7}{90} .
\end{aligned} \qquad (6)$$

Локальная ошибка усечения оценивается следующим образом. С помощью (4), (5), (6) при заданных y_n и h одновременно находится численное решение $y_{5,n+1}$ в точке $t_n + h$ с точностью пятого порядка и численное решение $y_{4,n+1/2}$ в точке $t_n + h/2$ с точностью четвертого порядка по формуле

$$y_{4,n+1/2} = \exp\left(\frac{hA}{2}\right) y_n + \frac{h}{12} \left\{ \exp\left(\frac{hA}{2}\right) k_1^* + 4 \exp\left(\frac{hA}{2}\right) k_3^* + k_4^* \right\}, \qquad (7)$$

где k_1^*, k_3^*, k_4^* – те же, что и в (4). Используя найденное значение $y_{4,n+1/2}$ и (4), (5), (6), (7), находим второе значение $y_{4,n+1}$ для численного решения в точке $t_n + h$ с точностью четвертого порядка. Величины $|y^i_{5,n+1} - y^i_{4,n+1}|$, $i = 1, 2, \ldots, N$, дают оценку локальной ошибки усечения для каждой компоненты решения. Метод вложения Сарафаяна требует вычисления десяти значений правой части $f(t,y)$ в (I) для каждого шага.

Очевидно, оценка локальной ошибки усечения методом вложения Сарафаяна верна только, если ошибкой аппроксимации матричной экспоненты можно пренебречь. Поэтому в общем случае здесь предлагается оценивать локальную ошибку усечения следующим образом. Запишем численное решение задачи Коши (2), получаемое с помощью (4), (5), (6), в виде

$$y^i_{n+1} = P_h^{m,i}(y_n), \ i = 1,2,\dots,N,$$

где m – порядок аппроксимации матричной экспоненты в (5). Пусть $y(t)$ – точное решение (2). Тогда локальная ошибка усечения d_n на n-ом шагу задается равенством

$$d^i_n = y^i(t_{n+1}) - P_h^{m,i}(y(t_n)), \ i = 1,2,\dots,N. \quad (8)$$

Имеем

$$|d^i_n| \le |y^i(t_{n+1}) - P_h^{\infty,i}(y(t_n))| + |P_h^{\infty,i}(y(t_n)) - P_h^{m,i}(y(t_n))|, \quad (9)$$

где $m=\infty$ означает, что матричная экспонента задается точно. Первый член в правой части (9) можно оценить приближенно вышеописанным методом вложения Сарафаяна, а второй член оценивается (тоже приближенно) величиной $|P_h^{m+1,i}(y_n) - P_h^{m,i}(y_n)|$.

В силу свойств используемых аппроксимаций матричной экспоненты /5/ эта оценка локальной ошибки усечения является эффективной при достаточно малом h.

В предлагаемом алгоритме оценка локальной ошибки усечения используется для автоматического выбора величины шага и порядка аппроксимации матричной экспоненты. Это происходит следующим образом. Задаются некоторые начальные значения параметров h и m. Для достижения заданной величины оценки равномерной нормы локальной ошибки усечения $\|d_n\| = \max_{1\le i\le N} |d^i_n|$ сначала увеличивается порядок аппроксимации m до некоторого m_{max}, после чего, в случае необходимости, шаг уменьшается, а m принимает свое начальное значение. Этот цикл повторяется, пока оценка нормы локальной ошибки усечения не будет меньше заданной.

Итак, окончательно, предлагаемый алгоритм решения задачи Коши (2) для жестких систем состоит в применении формул (4), (5), (6), (7) и (9) вышеописанным образом.

3. Численный пример

Чтобы проиллюстрировать возможности предлагаемого алгоритма, приведем результаты одного численного эксперимента, полученные на ЭВМ CДC 6400 с помощью программы, приведенной в /8/.

Пусть задана следующая задача Коши:

$$\begin{cases} y_1' = \left(a + \frac{1}{t+1}\right) y_1 + \frac{1}{(t+1)^4}\left(b - a - \frac{3}{t+1}\right) y_2, \\ y_2' = \left(b + \frac{2}{t+1}\right) y_2, \\ y_3' = \frac{1}{(t+1)^3}\left(b - c - \frac{4}{t+1}\right) y_2 + \left(c + \frac{3}{t+1}\right) y_3, \end{cases} \quad (10)$$

$$y_1(0) = 2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 2. \quad (11)$$

Точное решение задачи (10), (11) известно:

$$\begin{aligned} y_1 &= (t+1)e^{at} + \frac{e^{bt}}{(t+1)^2}, \\ y_2 &= (t+1)^2 e^{bt}, \\ y_3 &= \frac{e^{bt}}{(t+1)} + (t+1)^3 e^{ct}. \end{aligned} \quad (12)$$

Если записать (10) в виде $y' = F(t)\, y$, то матрица Якоби системы (10) совпадает с $F(t)$, собственными числами которой являются $\lambda_1 = a + 1/(t+1)$, $\lambda_2 = b + 2/(t+1)$, $\lambda_3 = c + 3/(t+1)$. Положим $a = 60$, $b = -50$, $c = 0,1$. Тогда система (10) умеренно жесткая.

Результаты численного интегрирования (10), (11) в интервале $[0, 1/2]$ с шагом $h = 0,1$ и порядком аппроксимации матричной экспоненты $m = 0, 5, 10$ даны в таблице 1, где y^i ($i = 1,2,3$) –

значения точного решения (I2), d^i – абсолютные величины локальных ошибок усечения для каждой компоненты решения, d_s^i и d_ℓ^i – оценки локальных ошибок усечения, полученные методом вложения Сарафаяна, соответственно без учета или с учетом ошибки аппроксимации матричной экспоненты. Матрица Якоби $F(t)$ вычислялась на каждом шагу. Для того, чтобы можно было вычислить d^i, используя (8), значения y_n^i (i=I,2,3), необходимые для получения y_{n+1}^i, задавались с помощью точного решения (I2). Заметим, что через $m=0$ мы обозначили явный метод Рунге-Кутта (6) и поэтому в этом случае были вычислены только d_s^i.

Таблица I

t=0,I	y^1=.444E+03	y^2=.8I5E-02	y^3=.I35E+0I
m=0	d^1=.I74E+03 d_s^1=.II6E+02	d^2=.939E+0I d_s^2=.907E+0I	d^3=.692E+0I d_s^3=.67IE+0I
m=5	d^1=.457E+0I d_s^1=.564E+00 d_ℓ^1=.564E+00	d^2=.I82E-I0 d_s^2=.576E-I0 d_ℓ^2=.826E-I0	d^3=.I74E-02 d_s^3=.I23E-02 d_ℓ^3=.I23E-02
m=I0	d^1=.457E+0I d_s^1=.564E+00 d_ℓ^1=.564E+00	d^2=.677E-II d_s^2=.576E-I0 d_ℓ^2=.576E-I0	d^3=.I74E-02 d_s^3=.I23E-02 d_ℓ^3=.I23E-02
t=0,2	y^1=.I95E+06	y^2=.654E-04	y^3=.I76E+0I
m=0	d^1=.757E+05 d_s^1=.786E+04	d^2=.782E-0I d_s^2=.757E-0I	d^3=.446E-0I d_s^3=.432E-0I
m=5	d^1=.I44E-0I d_s^1=.240E-02 d_ℓ^1=.I08E-0I	d^2=.I78E-I2 d_s^2=.298E-I2 d_ℓ^2=.507E-I2	d^3=.92IE-05 d_s^3=.665E-05 d_ℓ^3=.665E-05
m=I0	d^1=.227E-0I d_s^1=.240E-02 d_ℓ^1=.240E-02	d^2=.302E-I3 d_s^2=.298E-I2 d_ℓ^2=.298E-I2	d^3=.92IE-05 d_s^3=.665E-05 d_ℓ^3=.665E-05
t=0,3	y^1=.854E+08	y^2=.5I7E-06	y^3=.226E+0I

m=0	d^1=.330E+08 d_s^1=.342E+07	d^2=.639E-03 d_s^2=.6I8E-03	d^3=.287E-03 d_s^3=.279E-03
m=5	d^1=.363E+0I d_s^1=.I27E+00 d_ℓ^1=.375E+0I	d^2=.I57E-I4 d_s^2=.I57E-I4 d_ℓ^2=.329E-I4	d^3=.5I2E-07 d_s^3=.247E-07 d_ℓ^3=.247E-07
m=I0	d^1=.I68E-0I d_s^1=.I27E+00 d_ℓ^1=.I27E+00	d^2=.24IE-I5 d_s^2=.I57E-I4 d_ℓ^2=.I57E-I4	d^3=.5I2E-07 d_s^3=.247E-07 d_ℓ^3=.247E-07
t=0,4	y^1=.37IE+II	y^2=.404E-08	y^3=.286E+0I
m=0	d^1=.I43E+II d_s^1=.I48E+I0	d^2=.5I3E-05 d_s^2=.497E-05	d^3=.I95E-05 d_s^3=.28IE-05
m=5	d^1=.I55E+04 d_s^1=.38IE+02 d_ℓ^1=.I59E+04	d^2=.504E-I5 d_s^2=.845E-I7 d_ℓ^2=.253E-I5	d^3=.I29E-08 d_s^3=.I03E-07 d_ℓ^3=.I03E-07
m=I0	d^1=.458E+0I d_s^1=.38IE+02 d_ℓ^1=.38IE+02	d^2=.39IE-I5 d_s^2=.846E-I7 d_ℓ^2=.I39E-I5	d^3=.I29E-08 d_s^3=.I03E-07 d_ℓ^3=.I03E-07
t=0,5	y^1=.I60E+I4	y^2=.3I2E-I0	y^3=.355E+0I
m=0	d^1=.6I7E+I3 d_s^1=.638E+I2	d^2=.406E-07 d_s^2=.393E-07	d^3=.I03E-06 d_s^3=.9IIE-06
m=5	d^1=.664E+06 d_s^1=.II6E+05 d_ℓ^1=.677E+06	d^2=.838E-I3 d_s^2=.I76E-I7 d_ℓ^2=.838E-I3	d^3=.850E-09 d_s^3=.9I5E-08 d_ℓ^3=.9I5E-08
m=I0	d^1=.I28E+04 d_s^1=.II6E+05 d_ℓ^1=.II6E+05	d^2=.28IE-I3 d_s^2=.560E-I8 d_ℓ^2=.562E-I3	d^3=.850E-09 d_s^3=.9I5E-08 d_ℓ^3=.9I5E-08

Результаты, полученные при m=I5, не отличались от результатов, полученных при m=I0.

Из таблицы видно, что оценки локальной ошибки усечения, получаемые способом, описанным в § 3, являются достаточно точными и что в общем случае ошибкой аппроксимации матричной экспоненты нельзя пренебрегать. Видно также, что с увеличением порядка аппроксимации матричной экспоненты точность численного решения увеличивается. Результаты, полученные с использованием явного метода Рунге-Кутта (6) (m=0), намного хуже, чем аналогичные результаты, полученные с помощью предлагаемого алгоритма (m=5, I0).

Приведем, наконец, результаты численного интегрирования (I0), (II) с автоматическим выбором шага h и порядка m аппроксимации матричной экспоненты, полученные на 25-ом шагу при разных m_{max} (максимальный порядок аппроксимации) с условием, чтобы оценка $\|d_e\|$ локальной ошибки усечения находилась в границах $10^{-4} \le \|d_e\| \le 10^{-2}$ (точное решение (I2) уже не использовалось для задания y^i_n, как в вышеописанном численном эксперименте). И здесь через $m_{max}=0$ мы обозначили явный метод Рунге-Кутта (6). Начальное значение m в случаях m =5, I0, I2 было равным единице, а начальное значение h было равным 0,I. Найденные алгоритмом значения h и m менялись с номером шага.

m_{max}=0 t_{25}=.I625E+00

y^1_{25} =.I99E+05	y^2_{25} =.40IE-03	y^3_{25} =.I60E+0I
y^1 =.I99E+05	y^2 =.400E-03	y^3 =.I60E+0I

m_{max}=5 t_{25}=.45625E+00

y^1_{25} =.II3E+I3	y^2_{25} =.263E-09	y^3_{25} =.323E+0I
y^1 =.II3E+I3	y^2 =.262E-09	y^3 =.323E+0I

m_{max}=I0 t_{25}=.466796875E+00

y^1_{25} =.2I4E+I3	y^2_{25} =.I57E-09	y^3_{25} =.33IE+0I
y^1 =.2I4E+I3	y^2 =.I57E-09	y^3 =.33IE+0I

m_{max}=I2 t_{25}=.48046875E+00

y^1_{25} =.490E+I3	y^2_{25} =.808E-I0	y^3_{25} =.340E+0I
y^1 =.490E+I3	y^2 =.808E-I0	y^3 =.340E+0I

Здесь y^i (i =I,2,3) -значения точного решения (I2) в точке t_{25}.

Преимущество предлагаемого алгоритма по сравнению с явным методом Рунге-Кутта (6) ($m_{max}=0$) очевидно.

Заключение

Главным достоинством предлагаемого А-устойчивого алгоритма решения задачи Коши (2) для жесткой системы обыкновенных дифференциальных уравнений является сведение этой задачи к интегрированию нежесткой системы с использованием одновременного изменения шага и порядка приближения экспоненциальной функции матрицы Якоби исходной системы, получаемого с помощью разложения в непрерывную дробь. Это дает возможность находить численное решение задачи Коши (2) в общем случае, когда большие по модулю собственные числа матрицы Якоби могут иметь не только большие отрицательные вещественные части. В качестве критерия для автоматического выбора величины шага и порядка аппроксимации матричной экспоненты берется оценка локальной ошибки усечения по формуле (9). Приведенные численные эксперименты показали эффективность используемой оценки локальной ошибки усечения и алгоритма в целом.

Литература

1. L.Lapidus, J.H.Seinfeld. Numerical solution of ordinary differential equations. Ac. Press, 1971.
2. C.Gear. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Prentice-Hall, 1971.
3. R.A.Willoughby (ed.). Stiff differential systems. Plenum Press, 1974.
4. J.D.Lawson. SIAM J. Numer. Anal., v. 4, N 3, 1967.
5. M.Mori. Publ. RIMS, Kyoto Univ, v. 10, N 1, 1974.
6. G.Dahlquist. BIT, v. 3, 1963, pp 27-43.
7. J.R.Cash. Proc. Cambridge Philos. Soc., v. 76, N 2, 1974.
8. В.Ц.Банчев. Сообщение ОИЯИ, Р4-9677, Дубна, I976.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 апреля I976 года.