ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11-96-98

Н.Н.Васильев[1], В.П.Гердт, В.Ф.Еднерал[2], Д.В.Ширков

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА В НАУЧНЫХ И ИНЖЕНЕРНЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Направлено в труды международной конференции
«Эволюция инфосферы-95», Москва, 21—23 ноября 1995 г.

[1]Институт теоретической астрономии РАН, С.-Петербург
[2]НИИ ядерной физики МГУ, Москва

1996

1 Введение

Аналитические выкладки с помощью компьютера, Символьные вычисления на компьютере, Компьютерная алгебра – синонимы, характеризующие область современной прикладной математики и информатики, имеющей дело с аналитическими преобразованиями на компьютере математических выражений различной природы. В основе компьютерных манипуляций с формулами лежит символьное представление математических объектов: многочленов, рациональных и трансцендентных функций, специальных функций математической физики, степенных рядов и т.д. Алгоритмы таких преобразований имеют алгебраическую природу, что и нашло отражение в самом названии - компьютерная алгебра.

Хотя первые продуктивные шаги в этой области были сделаны около 40 лет назад, интересно напомнить, что ее идеология была сформулирована еще в 1844 году британским математиком леди Адой Аугустой Лавлейс (дочерью Байрона) в связи с проектом механической вычислительной машины Чарлза Бэббиджа.

Реальное развитие началось более ста лет спустя после появления первых достаточно мощных ЭВМ. В 1953 году американцы Kahriman и Nolan реализовали операцию дифференцирования полиномов (см. библиографию в [1]).

В нашей стране методы компьютерной алгебры начали развиваться еще в 50-х годах после пионерской работы Канторовича (см. обзор [2], где подробно изложена история отечественных работ в этой области и приведена обширная библиография).
Активное применение компьютерной алгебры (ниже – КА) для решения физических задач началось у нас в середине 70-х гг. в Дубне, в Объединенном Институте ядерных исследований (ОИЯИ). В то время лишь ОИЯИ располагал ЭВМ с достаточным быстродействием и объемом быстрой памяти (CDC-6500), позволявшей использовать КА в серьезных задачах. Положение изменилось в 80-х годах, когда, с появлением ЭВМ ЕС 1040, 1045, 1060, машинные аналитические вычисления стали доступны более широкой аудитории.

В дополнение к этому краткому историческому введению уместно вспомнить здесь и о проводившемся в течение 80-х гг. на физическом факультете МГУ ежемесячном научном семинаре по КА под руководством одного из авторов (Д.Ш., ученый секретарь - А.Я.Родионов).

Отметим также, что первой в мире книгой, где был последовательно изложен язык системы REDUCE и введена соответствующая терминология, было ротапринтное издание Московского университета [3] 1983 года, переизданное позже высокой печатью [4].

2 Компьютерная алгебра в применении к математике и физике

Основу компьютерной алгебры составляют глубокие математические результаты из коммутативной алгебры, алгебраической геометрии, математической логики и теории сложности алгоритмов. Это делает компьютерную алгебру мощным средством для решения задач из самых разных областей современной математики и физики. В этом смысле, хотя сам термин "компьютерная алгебра" и устоялся, однако является не совсем точным, ибо предметом этой дисциплины являются не только алгоритмы из области алгебры, анализа и теории чисел, но и из многих других разделов современной математики — дифференциальной геометрии, тензорного анализа, дифференциальных уравнений, математической логики и других. Здесь мы кратко остановимся только на некоторых возможностях современных систем КА.

Наиболее известным примером является алгоритмическая поддержка интегрирования в символьном виде. Практически все современные универсальные системы КА содержат эффективные встроенные интеграторы. Техника интегрирования основана на сочетании алгоритма Риша—Нормана [5] и распознавании большого количества частных случаев интегрируемости с использованием встроенных таблиц для элементарных интегралов и основных подстановок.

Задача символьного суммирования, в том числе вычисление бесконечных сумм, также по силам системам класса MAPLE или MATHEMATICA. При этом попытка, например, вычислить в символьном виде выражение $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^4$ даст ответ $\pi^4/90$. Долгое время в центре внимания современной КА оставались алгоритмы факторизации полиномов [6], то есть разложения их на неприводимые сомножители. Впервые эффективный алгоритм для задачи факторизации был предложен и реализован в системе SAC-1 [7]. Этот алгоритм не являлся оптимальным — его сложность экспоненциальна по степени полинома. В 1984 году, практически одновременно, алгоритмы факторизации полиномов, сложность которых полиномиальна по размеру данных, были предложены в работах [8, 9]. Обобщением задачи факторизации полиномов является задача нахождения неприводимых компонент алгебраического многообразия, задаваемого системой полиномиальных уравнений.

Другим важным примером является решение систем алгебраических уравнений. Практически все современные методы решения таких систем основаны на построении так называемых базисов Гребнера (ниже – БГ). Теория БГ — увлекательная и, по-видимому, наиболее популярная тема в компьютерной алгебре последних десяти лет. Построение БГ для некоторой нелинейной алгебраической системы уравнений позволяет не только ответить на вопрос о ее совместности и размерности пространства решений, но и привести систему к такому виду, что для ее решения, в случае совместности, достаточно будет решить последовательность алгебраических уравнений от одной переменной. В этом обзоре мы еще вернемся к вопросу о БГ. Большинство алгоритмов для построения БГ основано на схеме, предложенной Б.Бухбергером [10]. Однако недавно появился новый, так называемый инволютивный подход [11, 37, 13], который позволил привнести в коммутативную алгебру глубокие математические и алгоритмические идеи по формальному анализу алгебраических дифференциальных уравнений в частных производных. Существуют обобщения теории БГ на случай идеалов в дифференциальных кольцах, а также на некоммутативный случай см. [14].

Надо отметить и обратное влияние, которое оказала КА на развитие математики. Хотя многие из математических результатов, лежащих в основе построения алгоритмов КА, таких,как теорема Гильберта о базисе или теорема Лиувилля, были известны давно, однако КА способствовала проникновению в математику алгоритмического взгляда на многие классические результаты. Это привело к появлению конструктивных доказательств многих классических теорем. Например, ранее не были известны эффективные способы вычисления таких объектов, как полином Гильберта.

Приведем также некоторые математические результаты, которые получены при помощи средств КА. Наиболее впечатляющим примером здесь может служить получение полной классификации конечных простых групп. Эта классификация завершилась доказательством простоты замечательной простой конечной группы, называемой Монстром или группой Грисса-Фишера. Эта простая группа была построена Г.Гриссом в 1981 году [15]. Она имеет порядок:

$$808017424794512875886459904961710757005754368000000000 =$$
$$= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

и может быть описана как группа автоморфизмов некоторой алгебры размерности 196884. Вычисления, которые необходимо были провести для построения и доказательства простоты этой замечательной группы,было бы очень трудно провести без использования компьютера.

Эта проблема тесно связана с перечислением унимодулярных решеток. Проверка полноты списка унимодулярных решеток обычно проводится с помощью вычисления и суммирования величин, обратных порядкам их групп автоморфизмов. Сумма, соответствующая всем неэквивалентным решеткам данной размерности, может быть вычислена независимо и представляет собой так называемую константу Минковского-Зигеля. Одна из таких констант для размерности 32 равна:

$$\frac{4160226313319828373442537746357476271577534295749799151870993942 41}{961182657489023898988019652886695436615680000000 0}$$

Для проверки полноты списка унимодулярных решеток данной размерности необходимо вычислить порядки групп автоморфизмов всех решеток из списка, что само по себе является непростой задачей.

Трудоемкие вычисления таких констант Минковского-Зигеля, значений тэта-рядов и порядков групп автоморфизмов вычислялись с помощью систем MACSYMA, MATHEMATICA и специально разработанной для этих целей в Bell Laboratories системой ALTRAN [16].

Многочисленны также применения КА в теории динамических систем, теории кодирования, теории дифференциальных уравнений в частных производных и других областях математики.

Среди применений компьютерной алгебры в физике выделяются такие, которые, хотя и требуют выполнения чрезвычайно громоздких аналитических преобразований, но, в конечном счете, сводятся к компактному математическому выражению или даже к числу. Ярким примером такой физической задачи фундаментального характера является вычисление аномального магнитного момента электрона в квантовой электродинамике.

Сама история вычислений этой важной физической наблюдаемой тесно связана с прогрессом в области аналитических вычислений. В рамках теории возмущений по малому параметру α - константе электромагнитных взаимодействий, аномальный магнитный момент электрона μ дается формулой:

$$\mu = \mu_0(1 + a), \quad a = C_1\frac{\alpha}{\pi} + C_2(\frac{\alpha}{\pi})^2 + C_3(\frac{\alpha}{\pi})^3 + \dots, \tag{1}$$

где μ_0 представляет собой известную величину – магнетон Бора, а коэффициенты C_n характеризуют $n-$петлевые поправки, вычисление которых является чрезвычайно трудоемкой задачей.

Коэффициенты C_1 и C_2 были вычислены "вручную" в 40-х и 50-х годах. Однако вычисление 3-х петлевых фейнмановских диаграмм, определяющих C_3, сводится к вычислению 7- и 8- кратных интегралов. Это уже невозможно без использования компьютера. Первые результаты по вычислению C_3 [17] были получены с помощью систем компьютерной алгебры SCHOONSCHIP и ASHMEDAI, специально разработанных для расчетов по теории возмущений в квантовой электродинамике. Эти результаты имели сравнительно большую численную погрешность: $C_3 = 1,46 \pm 0,25 \equiv 1,46(25)$, что было связано с численным вычислением некоторых интегралов. Позднее были разработаны весьма тонкие аналитические методы расчета, позволяющие свести к минимуму источник погрешности - численное интегрирование многократных интегралов, а для подавляющего большинства 3-петлевых диаграмм

вообще получить точный ответ. Это дало значение [18] $C_3 = 1,17619(21)$ и тем самым уменьшило погрешность на три порядка по величине! С 1977г. проводятся расчеты вкладов в C_4 от 495-ти 4-петлевых диаграмм, которые требуют вычисления уже 9-ти и 10-кратных интегралов. Недавние вычисления дали $C_4 = -1,434(138)$ [18].

Суммирование всех вкладов вплоть до 4-петлевого при уточненном значении постоянной тонкой структуры $\alpha^{-1} = 137,03599234(77)$, полученным из экспериментального анализа квантового эффекта Холла, приводит к теоретическому значению $a_{theor} = 1159\,6521\,41(29)\cdot10^{-12}$ для константы a в формуле (1). Относительное расхождение между теоретическим и экспериментальным значением (которому отвечает $a_{exp} = 1159\ 6521\ 88(4) \cdot 10^{-12}$) аномального магнитного магнитного момента μ_e составляет сейчас около $5 \cdot 10^{-11}$. Такое согласие теории и эксперимента является, во-первых, рекордным в современной теоретической физике. Во-вторых, оно имеет принципиальное значение для подтверждения основных законов локальной квантовой теории поля – теоретической основы описания взаимодействия элементарных частиц.

2.1 Применение компьютерной алгебры в небесной механике

Первые применения КА в небесной механике были связаны с построением аналитических теорий движения на основе классических методов, которые преимущественно оперировали либо с тригонометрическими рядами, либо с рядами Пуассона. Это привело к созданию большого числа специализированных систем. Описание таких систем и алгоритмов для аналитических преобразований в небесной механике см. в работах [19,20].

В настоящее время возможности КА существенно повлияли и на аналитические методы небесной механики, которые стали включать в себя манипулирование с эллиптическмими функциями, технику базисов Гребнера, операции с рядами и преобразованиями Ли [21, 20].

В качестве одного из примеров приведем построение аналитической теории движения спутников с большим эксцентриситетом. В этом случае классические методы, основанные на разложениях в ряды по эксцентриситету, теряют свою силу.

В работах [22, 23] и [24], которые стали возможными лишь благодаря современным методам КА, продемонстрировано эффективное применение аппарата эллиптических функций для построения аналитических теорий движения небесных тел в случаях больших эксцентриситетов. Введение новой независимой переменной, так называемой эллиптической аномалии (связанной со временем посредством эллиптических интегралов), и использование параметра Якоби в качестве нового малого параметра позволяет существенно улучшить сходимость для аналогов классических небесномеханических функций. Интересно, что рекуррентные соотношения для возникающих здесь новых специальных функций небесной механики, таких, как эллиптические коэффициенты Ганзена, были также получены с помощью средств КА [25].

3 Компьютерная алгебра в инженерных задачах

Начать эту секцию уместно с перечня некоторых конференций, специально посвященных инженерно - конструкторским и промышленным приложениям КА:

- Компьютерная алгебра в промышленности. Решение практических задач (Амстердам, Голландия, 1991) [26].
- Компьютерная алгебра в науке и инженерии (Билефельд, ФРГ, 1994).
- Компьютерная алгебра в промышленности (Бат, Англия, 1994).
- Новые компьютерные технологии в системах управления (Переславль – Залесский, Россия, 1994, 1995).
- Символьные вычисления на ЭВМ в механике (Гамбург, ФРГ, 1995).

Возможность получения в конечном итоге формул вместо таблиц чисел позволяет по новому подходить к решению целого ряда задач. Так, в работе [27] система КА AXIOM [28] применяется для получения нагрузочной характеристики лопатки авиационной турбины как функции ее профиля, заданного в виде полинома с неизвестными коэффициентами в подходящей системе координат. В результате поиск профиля, оптимального по нагрузочным свойствам, проводится прямым поиском максимума этой нагрузки по коэффициентам указанного полинома. Ранее использовалась схема последовательных приближений, когда для некоторых промежуточных вариантов численно определялась максимально допустимая в рабочем интервале температур нагрузка и затем среди таких последовательных приближений выбиралось лучшее.

В ряде случаев применение методов КА позволяет упростить отдельные этапы традиционных численных расчетов. Например, расчет процесса протягивания бумаги через обрезиненные валики в копировальных аппаратах описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных. После выполнения преобразования Фурье ее решение сводится к решению системы линейных уравнений, а затем возникает задача вычисления

обратного интеграла Фурье. Этот интеграл обычно берется численно на конечном интервале с последующим добавлением приближенных поправок от несобственного остатка. Вычисление интеграла занимает около 75% времени всего расчета. В работе [29] описана процедура вычисления обратного интеграла по методу вычетов, где положение полюсов определяется численно, а вид вычетов - аналитически, что позволяет строить приближение искомого интеграла в аналитической форме.

Близко по смыслу лежат примеры применения методов КА в различных задачах моделирования. Так, при проектировании нанесения различных покрытий возникает проблема динамики течения жидкости со свободной поверхностью. Математически эта задача описывается уравнениями в частных производных с неизвестной формой границы. В работе [30] проводится приближенное решение одномерной модели подобного течения в аналитической форме. Сравнение модельных предсказаний с экспериментальными данными носит вполне удовлетворительный характер.

Другим примером применения КА может служить класс задач типа "проблемы носильщиков пианино" [31] в робототехнике. Эта проблема, нетривиальная для численного решения, состоит в определении движения объекта (или объектов) сложной формы из начального положения в конечное при наличии геометрических ограничений в процессе движения. Эти ограничения носят характер различных препятствий, например стен, или запрета на соударения движущихся объектов друг с другом. Математически такая задача сводится к определению всех возможных областей некоторого многомерного пространства, задаваемых системой полиномиальных уравнений и неравенств. Если точки, описывающие в этом пространстве исходное и конечное положение, принадлежат одной такой области, то задача имеет решение в виде соединяющей их кривой. Подобная задача может быть решена при помощи метода т.н. цилиндрического разбиения (см., например,[32]), однако и при таком подходе ее решение требует больших машинных ресурсов.

Другой пример применения КА в задачах оптимизации приведен в кратком обзоре [33], посвященном задачам автоматического проектирования. При этом ищется такой вариант резки металлической трубы большого диаметра не перпендикулярными ее оси плоскостями, который позволил бы при минимальном числе отдельных сегментов выложить изнутри туннель сложной формы, при минимизации площади щелей.

Наконец, следует отметить такое важное направление, как автоматизированная генерация правых частей дифференциальных уравнений, описывающих сложные механические системы, с целью их последующего численного решения [34]. Такой подход позволяет приемлемо описывать реальные сложные системы, например шестиосный локомотив Н-65 [35].

4 Чем привлекательна компьютерная алгебра?

В этом разделе мы хотели бы подчеркнуть удобство применения, а порой и незаменимость, систем КА в любых приложениях, где используется математический аппарат хоть чуть более сложный, чем арифметика в пределах начальной школы. От повседневных вычислений типа решения квадратного уравнения, систем линейных уравнений, вычислений детерминантов матриц (и все без потери точности!), через вычисления средней сложности - решение кубического уравнения, вычисление неопределенных интегралов (и зависящих от параметров определенных интегралов), вычисление конечных сумм, до выполнения всем понятных по своей постановке задач, которые вручную большинство исследователей вообще не выполнит, и не из-за громоздкости даже, а по незнанию современных алгоритмов, реализация которых действительно нетривиальна, поскольку требует глубокого изучения современных разделов математики. Имеется в виду решение систем нелинейных алгебраических уравнений, решение алгебраических уравнений порядка выше четвертого, исследование симметрий и получение ряда классов решений дифференциальных уравнений, предварительная обработка выражений с целью "интеллектуальной" оптимизации перед генерацией программ численного счета (минимизация числа операций при вычислении численного значения полинома от одной переменной, автоматическое дифференцирование и т.п.).

4.1 Системы компьютерной алгебры в повседневной научной практике

Решение очень громоздких задач, для чего изначально и создавались системы компьютерной алгебры, не является ныне единственной областью их применения. С появлением персонального компьютера системы КА все в большей степени становятся элементом оснащения рабочего места специалиста. В широкой научной практике очень часто возникают алгебраические выкладки небольшой или средней сложности. И поскольку современные системы КА имеют достаточно удобный пользовательский интерфейс, такие выкладки проще выполнять на ЭВМ. Особенно удобно, например, проверять при помощи системы КА свои собственные, сделанные ранее, выкладки, когда весь ход решения задачи уже полностью ясен. Несколько большего опыта требует проведение новых выкладок прямо на компьютере.

Примеры таких "простых", хотя порой и весьма трудоемких, выкладок можно встретить практически в любой задаче. Попробуйте, например, взять вручную неопределенный интеграл: $\int dx/(1-x^8)$. Если же Вы пользуетесь

системой REDUCE, то для этого достаточно ввести предложение:

```
int(1/(1-x**8),x);
```

после чего результат будет выведен на экран. Затем его можно распечатать или использовать в дальнейших выкладках. Попробуйте также посчитать определитель достаточно большой матрицы (может быть, с численными коэффициентами, а может быть и с символьными) или найти ее собственные векторы. При использовании системы КА Вам не придется набирать для выполнения этих операций более строчки текста (исключая, конечно, ввод самой матрицы, которая может оказаться громоздкой).

Системы КА могут существенно облегчить работу, сэкономить массу бумаги и в какой-то степени заменить справочники. Так, при решении обыкновенного алгебраического уравнения система КА с гарантией выделит все его точные рациональные и алгебраические решения, какие только могут в принципе быть найдены (даже если коэффициенты уравнения зависят от буквенных параметров). В то же время самое большее, на что Вы можете рассчитывать, используя численные методы, это протабулировать решения уравнения при различных значениях этих параметров.

Очень удобны системы КА для получения разложений сложных выражений в те или иные ряды, для построения выражений, заданных рекуррентными соотношениями, для перестройки рядов одного вида в ряды другого вида (например, степенного ряда в ряд по полиномам Чебышева), для выполнения арифметических операций над отрезками рядов, для разложения рациональных выражений в элементарные дроби, для построения рациональных приближений (паде-аппроксимаций), для разнообразной работы с полиномами (факторизации, выделения наибольшего общего множителя, псевдоделения полинома на полином, вычисления результанта двух полиномов), для различных матричных операций, начиная с нахождения собственных значений и векторов, вычисления детерминантов, до решения систем линейных уравнений и вычисления функций от матриц. Поскольку вычисления обычно проводятся в рациональной арифметике, т.е. без округления, то системы КА могут быть использованы для решения численных задач, которые трудно решить с использованием арифметики с плавающей запятой, например, для решения плохо обусловленных систем линейных уравнений.

Отметим также пользу графических возможностей систем КА, пользуясь которыми можно "увидеть" поведение того или иного выражения или функции, всего лишь задав соответствующую формулу. Кроме этого, многие современные системы КА обладают возможностью автоматического вывода формул в форматах TEXили LATEX, что удобно для подготовки публикаций.

4.2 Решение алгебраических и дифференциальных уравнений

Эта область приложений компьютерной алгебры является одной из наиболее интенсивно развиваемых в настоящее время. Среди современных систем общего назначения нет ни одной, в которой не имелись бы специальные встроенные пакеты или модули для решения алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений. Эффективность того или иного пакета, и соответственно, содержащей его базовой системы определяется эффективностью встроенных алгоритмов. За последние 20-25 лет в области алгоритмизации процедуры интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, а также исследования нелинейных алгебраических уравнений и уравнений в частных производных наблюдается бурный прогресс [36, 37].

Рассмотрим сначала интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве иллюстрации прогресса в этой области укажем, в качестве примера, только на один из недавно разработанных алгоритмов [38] для интегрирования уравнений первого порядка вида:

$$P(x,y)\,\frac{dy}{dx} = Q(x,y)\,,$$

реализованный в виде пакета на языке REDUCE [39]. В известном сборнике Камке имеется 367 уравнений указанного вида. Из них 36 содержат произвольные функции и поэтому не попадают в сферу применимости алгоритма. Из оставшихся 331 уравнения 241 интегрируется полностью и 23 уравнения частично. Последнее означает, что в ответе, выдаваемом пакетом, содержатся неопределенные интегралы, которые встроенными средствами системы Reduce взять не удалось. Таким образом, в процентном отношении около 73% уравнений удается проинтегрировать до конца, а с учетом частично проинтегрированных уравнений эта доля возрастает до 80%. Ряд оригинальных алгоритмов, и не только для решения дифференциальных уравнений, но и для многих других задач компьютерной алгебры, описан в статьях специализированных выпусков журнала "Программирование" [40].

Следует отметить также, что специальные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, такие, как нахождение интегрирующего множителя, метод вариации постоянных, линеаризующие подстановки для уравнений Рикатти и др., являются частными проявлениями наиболее общего подхода к решению дифференциальных уравнений и не только обыкновенных, но и в частных производных, а именно, нахождение групповых симметрий дифференциальных уравнений. Этот метод, восходящий к замечательным работам конца прошлого века норвежского математика Софуса Ли, получил второе дыхание благодаря алгоритмизации и реализации в системах КА [41].

Другим подходом к исследованию и решению дифференциальных уравнений является получение в аналитическом виде приближений к их решениям. Так, в работах [42] описаны примеры использования метода нормальных форм для построения приближений к периодическим решениям систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти решения получаются в виде отрезков рядов Фурье, где коэффициенты и частоты записываются как отрезки степенных рядов по параметрам и переменным системы. Полученные приближения можно использовать далее, например, для генерации по ним программ численного счета. Использование затем этих программ вместо численного интегрирования уравнений бывает в ряде случаев весьма полезным. Отметим также, что построение приближенных решений (с любой наперед заданной точностью) возможно для существенно более широкого класса уравнений, нежели получение точных аналитических решений.

Еще одно впечатляющее развитие получили алгоритмические методы преобразования систем нелинейных алгебраических, а совсем недавно и уравнений в частных производных полиномиального вида [37, 13] к полностью эквивалентному, но гораздо более удобному для их исследования и решения, базису Гребнера. Несмотря на то, что нелинейные уравнения, как известно, в общем случае точно не решаются, использование базисов Гребнера позволяет ответить на такие важные вопросы, как существование общих решений у системы уравнений, число таких решений и др. Сейчас метод БГ не только встроен во все современные системы компьютерной алгебры общего назначения, но и нашел многочисленные приложения во многих областях фундаментальных и прикладных исследований, например, в химической кинетике, робототехнике, газовой динамике и др. Заметим также, что одной из причин высокой эффективности применения метода работы [39] к обыкновенным дифференциальным уравнениям является использование техники БГ на одном их важнейших этапов соответствующей алгоритмической процедуры.

Техника БГ для системы нелинейных алгебраических уравнений нескольких переменных является обобщением метода приведения к диагональному виду линейной системы (метода Гаусса). В простейшем случае, когда система имеет конечное число решений, эта техника позволяет, для большинства практических задач, так переписать исходную систему (без потери эквивалентности), что последнее уравнение будет содержать лишь одну переменную, предпоследнее - две, эту же переменную и еще одну и т.д. Например, система:

$$\begin{gathered}
3x^2y + 2xy + y + 9x^2 + 5x - 3 = 0\\
2x^3y - xy - y + 6x^3 - 2x^2 - 3x + 3 = 0\\
x^3y + x^2y + 3x^3 + 2x^2 = 0
\end{gathered}$$

эквивалентна системе:

$$8x - 2y^2 + 5y + 3 = 0 \quad ,$$
$$2y^3 - 3y^2 - 16y + 21 = 0 \,.$$

В общем случае техника БГ позволяет выяснить совместность системы и размерность решений, а в нуль-мерном случае, как выше, полное число комплексных решений.

Сравнительно недавно удалось построить алгоритм для получения общего решения уравнения 5-ой степени $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$. Не надо думать, что это в какой- нибудь мере опровергает классические результаты Абеля и Галуа о невозможности решения такого уравнения в радикалах. Общее решение возможно получить в специальных функциях, что было известно давно. Еще в 1858 г. одновременно Эрмит [43] и Кронекер [44] доказали, что уравнение 5-ой степени решается с помощью эллиптической модулярной функции. Понадобилось более ста лет, чтобы сделать эти результаты не только достоянием теории, но и практическим средством решения уравнений. В настоящее время соответствующий пакет разработан для системы MATHEMATICA [45] М. Троттом.

4.3 Генерация и оптимизация программ для последующего численного счета

Следует отметить способность большинства из универсальных СКА к автоматизированной генерации отрезков программ на языках численного программирования типа FORTRAN, C и других. Часто в силу громоздкости результатов единственным осмысленным продуктом аналитических вычислений может являться только программа для последующего численного счета.

Здесь надо сказать, что встроенные средства генерации программ численного счета не всегда являются эффективными в случае чрезвычайно больших и разреженных выражений. Как правило,при генерации FORTRAN (C или PASCAL) программы система использует свое внутренне представление выражений, отображая его в структуру соответствующей программы и проводя некоторую оптимизацию, например, поиск одинаковых подвыражений. Однако внутреннее представление выражений ориентировано не на быстрое их вычисление, а на максимальную эффективность символьных преобразований. Поэтому в случае громоздких выражений, особенно полиномов и рядов Фурье, следует применять для генерации специальные методы и алгоритмы.

В настоящее время существуют весьма изощренные методы вычисления значений, полиномов, основанные на предварительной обработке коэффициентов. Для многих людей, применяющих схему Горнера,явится откровением факт, что это не самый быстрый метод вычисления значений полинома.

Наибольшей эффективностью обладают специальные системы и программы для организации символьно-численного интерфейса. Примером такой системы является система СПРИНТ, в которой были реализованы не улучшаемые по сложности алгоритмы вычисления кратных полиномиально-тригонометрических выражений [46]. Эта система применялась для генерации программ вычисления астрономических эфемерид по аналитическим теориям, содержащим тысячи членов.

Интересным и весьма интенсивно развивающимся сейчас направлением является автоматическое дифференцирование [47]. Несмотря на то, что символьное дифференцирование является в системах КА обычно базовым оператором, для формул очень большой длины зачастую трудно получить выражение для производной из-за стремительного роста промежуточных результатов. Однако можно автоматически сгенерировать программу, вычисляющую его производную в символьном виде. Такой подход и называется автоматическим дифференцированием. При этом размер полученной программы может оказаться весьма небольшим. О реализации такого подхода в рамках системы MAPLE см. [48].

5 Современные системы компьютерной алгебры

5.1 Наиболее распространенные универсальные системы

Методы и системы компьютерной алгебры используются уже более 30 лет [1, 49], но особенно широкое распространение они получили в последнее десятилетие, благодаря бурному развитию и распространению персональных компьютеров и рабочих станций. Программные пакеты и СКА традиционно делятся на специализированные и общего назначения. К первым относятся те программные продукты, которые направлены на решение конкретных задач, например, вычисления диаграмм Фейнмана в физике высоких энергий. Другие объединяют в себе алгоритмы и методы для решения широкого круга задач различной математической природы. Примерами систем общематематического назначения являются REDUCE [50], MACSYMA [51], MAPLE [10], MATHEMATICA [45], AXIOM [28], MuPAD [52] и DERIVE [53]. Эти системы имеют в своем составе также библиотеки прикладных программ,состоящие из специализированных пакетов.

Рассмотрим вкратце вышеперечисленные СКА общего назначения. Каждая из этих систем предоставляет пользователю следующий набор основных возможностей, причем этот список далеко не исчерпывающий: язык программирования высокого уровня; интерактивный и пакетный режимы работы; возможность определения новых функций и встраивания новых математических объектов и типов данных; точные арифметические операции над целыми и рациональными числами, а также числами с плавающей запятой произвольной точности; алгебра многочленов и рациональных функций многих переменных, включающая вычисление наибольшего общего делителя и разложение на множители; дифференцирование и интегрирование в классе элементарных функций и для некоторых специальных функций; символьные матричные операции и линейная алгебра; степенные ряды и ряды Фурье; вычисление полиномиальных базисов Гребнера для решения нелинейных алгебраических уравнений; численно-символьный интерфейс, например, с языками C и FORTRAN; двумерная и трехмерная графика; перевод математических выражений в формат TEX и LATEX.

Все вышеуказанные системы, исключая AXIOM, MuPAD и DERIVE, имеют версии по-существу для всех типов современных компьютеров, и, в частности, работают под операционными системами Windows 3.1, 3.11, Windows 95, Windows NT 3.5 так же, как под различными версиями системы UNIX.

Подробные данные о имеющихся на сегодняшний СКА условиях их приобретения, а также об активности в области КА, включая международные конференции, крупные исследовательские проекты, сведения об институтах и группах стран Европы и Америки, развивающих методы компьютерной алгебры, находятся на WWW сервере в Амстердаме и доступны пользователям Интернет по адресу: http://www.can.nl, а также в австрийском городе Линце по адресу: http://info.risc.uni-linz.ac.at или средствами ftp по адресу: sun.risc.uni-linz.ac.at

Имея в виду отечественных пользователей СКА, и прежде всего физиков, инженеров, техников и других специалистов, занимающихся прикладными исследованиями и стоящих перед выбором, какая из систем им лучше всего подойдет, мы хотели бы обратить их внимание прежде всего на систему REDUCE. Эта система используется в странах бывшего СССР с 1978 г., является самой дешевой из коммерческих систем компьютерной алгебры, по эффективности (скорости) выполнения операций превосходит другие указанные системы, и, следовательно, позволяет решать довольно большие по объему выкладок задачи. Кроме того, система полностью открыта для пользователя и распространяется вместе с исходными текстами. По своему назначению и библиотеке прикладных пакетов, имеющихся в системе, в сравнении с другими системами, REDUCE особенно подходит для решения физических и технических задач, в частности, задач физики высоких энергий.

Стоит сказать также о судьбе одной из первых универсальных систем КА, отечественной системе АНАЛИТИК, которая ранее была аппаратно реализована на ЭВМ серии МИР, а также в виде спецпроцессора для машин серии ЕС. Эти реализации уже потеряли свою актуальность, но сам язык АНАЛИТИК получил дальнейшее развитие [54]. По своим выразительным возможностям он вполне может конкурировать с языками систем REDUCE, MAPLE или MATHEMATICA, и остается ждать его реализации на ЭВМ современных поколений.

5.2 О библиотечных пакетах универсальных систем компьютерной алгебры и о новом поколении специализированных систем

Ясно, что современные универсальные СКА не могут содержать весь необходимый математический инструментарий для решения конкретных задач, возникающих в самых разных областях физики и математики. Отчасти положение спасают библиотеки процедур, написанные для работы с той или иной универсальной системой КА. Однако когда требуется работа со специфическими объектами, такими, как специального вида ряды (например, ряды Пуассона), матрицы (например, матрицы Дирака), специальные тензорные объекты в общей теории относительности и теории поля, в случаях вычислений на группах и.т.п., не всегда удается на базе имеющихся в распоряжении систем КА построить подходящие представления для нужных объектов. С другой стороны, в рамках универсальной системы редко удается получить высокую эффективность работы со специфическими объектами. Это является основной причиной того, что специализированные системы продолжают появляться и в настоящее время, хотя в основном сейчас доминирует библиотечный подход расширения алгоритмического наполнения универсальных систем. Приведем примеры новых специализированных СКА, разработанных для применения в специальных областях математики и физики.

Система SHUR [55] предназначена для вычислений различных свойств групп Ли и их представлений, а также вычислений в теории симметрических функций. В инструментарии этой системы содержится, в частности, вычисление кронекеровых произведений групп Ли, спинорные представления симметрической группы, вычисление размерностей неприводимых представлений, операторы Казимира, диаграммы Дынкина, вычисление характеров алгебр Гекке и многое другое. О применениях этой системы к различным задачам математики и теоретической физики см. [55]. Эта система написана на языке C.

Система FELIX [56] разработана для различных вычислений с коммутативными и некоммутативными алгебраическими структурами и их гомоморфизмами. Область применения этой системы покрывает коммутативные и некоммутативные кольца полиномов, алгебры Ли, их подалгебры и гомоморфизмы.

Для вычисления параметров взаимодействия элементарных частиц в аналитической форме и в виде программ для последующих численных расчетов разработан пакет CompHEP [57]. Этот пакет ориентирован на расчет сечений рассеяния частиц при планировании экспериментов на строящихся ускорителях нового поколения. Разработчикам системы удалось довести эту систему до такого уровня сервиса, когда использовать большинство из ее возможностей может даже начинающий пользователь ЭВМ. Эта система имеет развитую графику, включая графическую выдачу в LaTeXформате, многоуровневую систему меню и выдает результаты как в виде программы для последующего численного моделирования процесса по методу Монте–Карло, так и в виде формул, записанных в формате, доступном для чтения из систем REDUCE и MATHEMATICA. Существуют версии системы для работы на различных персональных компьютерах, а также на рабочих станциях в среде UNIX.

6 Некоторые проблемы компьютерной алгебры

В результате выполнения сложных алгебраических выкладок сравнительно редко удается получить компактный ответ. Поэтому весьма актуальной для КА является проблема адекватного представления громоздких аналитических выражений. Такие представления аналитической информации существуют во многих важных частных случаях, например диаграммы Фейнмана в теории поля однозначно изображают некоторые весьма громоздкие интегралы. Однако общего подхода к решению этой проблемы пока даже не намечается.

К сожалению, языковые средства современных систем КА во многом заимствованы у традиционных систем программирования, ориентированных на численные вычисления. Специфика символьных вычислений предъявляет совершенно другие требования, например, к системе типов данных. Многие важные моменты для аналитического программирования, например описание стратегий применения правил при проведении преобразований, вообще лежат вне выразительных возможностей таких традиционных языков. Поэтому приходится с сожалением констатировать, что синтаксические структуры имеющихся сейчас в распоряжении систем компьютерной алгебры языков часто неадекватны современной математике. Следует отметить интересную попытку решения этой проблемы в системе AXIOM. По нашему мнению, в ближайшем будущем здесь возможны весьма радикальные изменения.

Одной из центральных проблем компьютерной алгебры является проблема эквивалентности тех или иных объектов. Действительно, возможность сравнения двух величин по величине или по некоторому другому признаку эквивалентности служит одной из фундаментальных категорий математики вообще. Для сравнения двух рациональных функций над каким-либо полем или кольцом с однозначным представлением констант достаточно договориться о способе упорядочения переменных, от которых зависят полиномы в числителях и знаменателях этих функций. Возможность такого сравнения свидетельствует о существовании в рассмотренном случае т.н. канонического представления. Однако если мы расширим область определения, добавив туда, например, алгебраические числа, то простой алгоритм сравнения исчезнет. Сравните для примера два числа: 1 и $\sqrt{7}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{4-\sqrt{7}}$. Несложно увидеть, что они равны, но простого общего алгоритма сравнения произвольных алгебраических чисел пока не построено. Если мы расширим область констант за счет введения функций exp и log, а также математических констант e и π, то в классе таких чисел проблема равенства алгоритмически неразрешима [58]. Проблема поиска канонического представления возникает и при определении эквивалентности тензоров [59].

Как и для задач численного счета, с ростом объемов алгебраических выкладок все возрастающее значение для систем компьютерной алгебры начинает приобретать распараллеливание вычислений. При этом ведется как поиск эффективных параллельных алгоритмов для будущих систем КА, так и ставится задача генерации эффективных программ для распараллеленных численных расчетов [60].

Очень важным направлением развития компьютерной алгебры является как поиск новых алгоритмов, так и получение оценок их алгоритмической сложности. Сейчас максимальная активность сосредоточена в основном в области разработки полиномиальных алгоритмов. Существуют интересные обобщения таких алгоритмов на более широкие области. Хорошим примером такого обобщения является теория БГ в дифференциальных идеалах [14].

Здесь можно упомянуть также об активно развиваемом ныне подходе выполнения приближенных численных расчетов с непрерывным контролем вычислительных ошибок и потерь точности. Реализуемый средствами т.н. интервальной арифметики, такой подход получил название вычислений с гарантированной точностью и, по-видимому, станет в близком будущем одним из инструментальных средств систем КА [61].

7 Заключение

Как следует из изложенного, в настоящее время практика автоматизированных символьных вычислений, благодаря доступности мощных персональных компьютеров и развитию соответствующих программных средств, "вошла в быт" ученых многих специальностей. Однако КА еще мало известна инженерам и технологам и практически ими не используется. Главная цель нашего доклада на конференции и данной публикации состоит в том, чтобы привлечь внимание инженеров и ученых, связанных с технологией и промышленностью, к новым возможностям, предоставляемым компьютерной алгеброй.

Для заинтересованных лиц заметим, что в настоящее время семинар по КА функционирует на факультете ВМиК МГУ под руководством профессора С.А.Абрамова (ученый секретарь - Е.В.Зима). Заседания проводятся обычно по 3-им средам каждого месяца с сентября по июнь, начало в 16.20 в аудитории 645 2-го Гуманитарного корпуса МГУ. Контактный e-mail: zima@lvk.cs.msu.su.

В заключение уместно привести ссылки на ряд более ранних обзоров, которые могут быть интересны в связи с тематикой КА, это [1, 49, 2, 62, 63, 26], а также книг и материалов на русском языке по системе REDUCE [4, 64, 65, 66].

8 Приложение

Приведем также имеющуюся у нас информацию о контактных адресах и телефонах распространителей и фирм, работающих с основными системами КА.

С середины ноября 1995 г. начала распространяться версия 3.6 системы REDUCE, значительно развитая и усовершенствованная по сравнению с предыдущими версиями. Имеется так называемая персональная версия системы, предназначенная для ее эксплуатации на персональных компьютерах. Цена лицензии для такой версии составляет 99 долларов США. Так называемая профессиональная версия системы стоит 495 долларов и содержит по сравнению с персональной ряд дополнительных инструментальных средств, позволяющих повысить ее эффективность.

По поводу приобретения системы Reduce в пределах бывшего СССР можно обращаться к одному из авторов данного обзора (В.Г.) по адресу: 141980 Дубна, Московской обл., ЛВТА ОИЯИ. Факс: 09621- 93437, электронный адрес: gerdt@jinr.dubna.su

Информацию по системе MATHEMATICA можно получить по WWW адресу: http://www.wri.com, а саму систему (как и систему MAPLE) - в фирмах, занимающихся продажей матобеспечения.

Приведем здесь контактные адреса и телефоны вице-президента компании "Waterloo Maple Software" доктора К.О.Геддеса:.

Dr. Keith O. Geddes, Vice-President, PhD
450 Phillip Street, Waterloo, Ontario, Canada N2L 5J2
Phone: (+1-519) 888-4567 Ext. 4668, Fax: (+1-519) 747-5284, E-mail: kogeddes@math.uwaterloo.ca

По вопросам о системе AXIOM следует обращаться в фирму NAG по адресу:

Valerie Stanley, Sales Executive (AXIOM), NAG Ltd.
Wilkinson House, Jordan Hill Road, OXFORD, United Kingdom OX2 8DR
Phone: (+44-865) 511-245, Fax: (+44-865) 310-139,
а по вопросам о системе DERIVE в фирму Soft Warehouse:

David R Stoutemyer, Chairman of the Board
3660 Waialae Avenue, Suite 304, Honolulu, Hawaii, USA 96816- 3236
Phone: (+1-808) 734-5801, Fax: (+1-808) 735-1105, Email: swh@aloha.com
или в ее филиал в Австрии:

Dr. Bernhard Kutzler, Managing Director, Soft Warehouse Europe
SOFT WAREHOUSE GmbH & Co KG, Softwarepark, A-4232 Hagenberg, Austria
Phone: (+43-7236) 3297-81, Fax: (+43-7236) 3769.

Авторам приятно поблагодарить В.А.Ильина за полезные обсуждения и предоставленные материалы. Трое из авторов (В.Г., В.Е. и Д.Ш.) весьма признательны также фонду РФФИ за поддержку (грант 96-01-01860).

Литература

[1] Гердт В.П., Тарасов О.В., Ширков Д.В. *УФН*, **130**, Вып.1, 1980, стр. 113–147.

[2] Грошева М.В. и др. Системы аналитических вычислений на ЭВМ (аналитические пакеты прикладных программ). *Информатор ИПМ АН СССР. N° 1*, 1983 г.

Грошева М.В., Ефимов Г.Б. В сб.: *Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования*. М. Наука, 1988. стр. 5–30.

[3] Еднерал В.Ф., Крюков А.П., Родионов А.Я. *Язык аналитических вычислений REDUCE. Часть I*. Изд-во МГУ, М., 1983.

Еднерал В.Ф., Крюков А.П., Родионов А.Я. *Язык аналитических вычислений REDUCE. Часть II*. Изд-во МГУ, М., 1986.

[4] Еднерал В.Ф., Крюков А.П., Родионов А.Я. *Язык аналитических вычислений REDUCE.* Изд-во МГУ, М., 1989.

[5] Norman A.C., Moore P.M.A. In: *Proc. IV Int. Colloquium on Advanced Computing Methods in Theoretical Physics.* Marseilles, 1977, pp. 99–110.

[6] Панкратьев Е.В. *Компьютерная алгебра. Факторизация многочленов.* Изд-во МГУ, М., 1988.

[7] Collins G.E. In: *Proc. of the SYMSAM-2*, N.Y., ACM Headquarters, 1971, pp. 144–152.

[8] Chistov A.L., Grigor'ev D.Yu. Ploynomial-time factoring of the multivariable plynomials over a global field. *LOMI Preprint E-5-82*, Leningrad, 1982.

[9] Lenstra A.K., Lenstra H.W., Lowasz L. *Math. Ann.*, **261**, 1982, pp. 515–534.

[10] Char B. et al. *Maple V Learning Guide*, Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ont., 1995.

[11] Zharkov A.Yu.,Blinkov Yu.A. In: *Proceedings of "SC 93", International IMACS Symposium on Symbolic Computation: New Trends and Developments*, G.Jacob et al. (eds.), Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, Lille, 1993, pp.11-16.

[12] Gerdt V.P., In: *Computer Algebra in Science and Engineering*, J.Fleischer et al. (eds.), World Scientific, Singapore, 1995, pp. 117–137.

[13] Gerdt V.P., Blinkov Yu.A. Involutive Bases of Polynomial Ideals. *Preprint - Nr.01/1996, Naturwissenschaftlich-Theoretisches Zentrum*, Universität Leipzig, 1996. To be published in *J. Symb. Comp.*.

[14] Михалев А.В., Панкратьев Е.В. *Компьютерная алгебра. Вычисления в дифференциальной и разностной алгебре.* Изд-во МГУ, М., 1989.

[15] Griess R.L. *Invent. Math.*, **69**, 1982, pp. 1–102.

[16] Brown W.S. ALTRAN User's Manual. Bell Laboratories, Murray Hill, 4th ed., 1977.

[17] Levin M.J, Wright J. *Phys.Rev.Lett.* **26**, 1971, pp. 1351–1653.

[18] Kinoshita T., Lindquist W.B. *Phys.Rev.* **D42**, 1990, pp. 636–655.

[19] Brumberg V.A., Tarasevich S.V., Vasiliev N.N. *Celest. Mech.*, **45**, 1989, pp. 149–162.

[20] Brumberg V.A. *Analytical Techniques of Celestial Mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995.

[21] Vasiliev N.N. In: *Proceedings of International Workshop "New Computer Technologies in Control Systems"*, Pereslavl-Zalessky, 1995, pp. 71–72.

[22] Васильев Н.Н., Вахидов А.А., Сокольский А.Г. Вычисление гамильтониана, представляющего движение искусственного спутника земли с большим эксцентриситетом. Препринт Института Теоретической Астрономии РАН, 38, Санкт – Петербург, 1994.

[23] Sokolsky A.G., Vakhidov A.A., Vasiliev N.N. To be published in *Celest. Mech. and Dyn. Astr.*

[24] Brumberg E.V. Fukushima T. *Celest.Mech. amd Dyn.Astr.*, **57** 1993.

[25] Sokolsky A.G., Vakhidov A.A., Vasiliev N.N. *SIGSAM Bulletin, Special Issue*, June 1995, pp. 16–18.

[26] *Computer algebra in industry. Problem solving in practice*, A.M. Cohen (ed.), John Wiley & Sons, Chichester, 1993.

[27] Grabmeier J. In: *Computer Algebra in Science and Engineering*, J. Fleischer et al. (eds.), World Scientific, Singapore, 1995, pp. 317–330.

[28] Jenks R.D.,Sutor R.S. *Axiom, the Scientific Computation System*, NAG, Springer- Verlag, 1992.

[29] Lauwers F. In [69], pp. 251–266.

[30] Décre M., Buchlin J.-M., Colot G.-L., Sengier J. In [69], pp. 239–250.

[31] Schwartz J.T., Sharir M. *Adv. in Appl. Math.*, **4**, 1983, pp. 298–351.

[32] Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. *Компьютерная алгебра.* М., Мир, 1991.

[33] Stifter S. In: *Computer Algebra in Science and Engineering*, Fleischer J. et al. (eds.), World Scientific, Singapore, 1995, pp. 299–302.

[34] Pogorelov D. On Coding of Symbolic Expressions by Generation of Motion Equations of Multibody Systems. *The Abstracts of EUROMECH343 (Computerized Symbolic Manipulation in Mechanics, Hamburg, Germany, 1995).* p. 21.

[35] Zarifian A., Kolpahchyan P. In: *The Proceedings of International Workshop "New Computer Technologies in Control Systems"*, Pereslavl-Zalessky, 1995, pp. 76– 77.

[36] Singer M.F. *J.Symb.Comp.* **10**, 1990, pp. 59–94.

[37] Gerdt V.P., In: *Computer Algebra in Science and Engineering*, J.Fleischer et al. (eds.), World Scientific, Singapore, 1995, pp. 117–137.

[38] Prele M.G., Singer M.F. *Trans. AMS* **279/1**, 1983, pp. 196–205.

[39] Man Y-K., *J.Symb.Comp.* **16**, 1993, pp. 423–444.

[40] *Программирование* **5**, 1992; **1**, 1994.

[41] Hereman W., In: *CRS Handbook of the Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol.3: New Trends in Theoretical Developments end Computational Methods*, N. Inragimov (ed.), Chapter 13, CRS Press, Boca Raton, Florida, 1995.

[42] Еднерал В.Ф., Хрусталев О.А. *Программирование*, **5**, 1992, стр. 73–80.

[43] Hermite Ch. *C. R. Acad. Sci.*, **46**, 1858, pp. 508–515.

[44] Kronecker L. *C.R.Acad.Sci.*, **46**, 1858, pp. 1150–1152.

[45] Wolfram S. *Mathematica: a System for Doing Mathematics by Computer.* Addison-Wesley Publ.Co., 1988.

[46] Vasiliev N.N., *Lect. Notes in Comp. Sc.* M. 378, 1989, pp. 118–119.

[47] Rall L.B. Automatic differentiation - Techniques and Applications. *Lect. Not. in Comp. Sci.*, **120**, Springer, 1981.

[48] Monagan M.B., Neuenschwander W.M. GRADIENT: Algorithmic Differentiation in MAPLE, In [?], pp. 68–76.

[49] *Computer Algebra. Symbolic and Algebraic Computation*, Eds. Buhberger B., Collins G.E., Loos R., 2-nd ed., Springer-Verlag, Vienna, 1983 (Перевод на русский язык см. в ссылке [68]).

[50] MacCallum M.A.H., Wright F.J. *Algebraic Computing with Reduce.* Oxford University Press, Oxford, 1991.

[51] Pavelle R., Wang P.S. *J.Symb.Comp.* **1**, 1985, pp. 69–100.

[52] Fuchssteiner B. et al., *MuPAD Tutorial*, Birkhäuser, Basel, 1994.

[53] Stoutemyer D.R. Portable computer algebra: Past, present, and future. *Invited Lecture at the 1991 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation ISSAC'91 (Bonn, Germany, July 1991).*

[54] Morosov A.A., Klimenko V.P., Fishman J.S. In: *Proceedings of International Workshop "Computer Algebra Applications"*, Kiev–St.Petersburg, 1993, pp. 34–36.

[55] King R.C., Wybourne B.G. *J. Math. Phys.* **33**, 1992, pp. 4–14.

[56] Apel J., Klaus U. FELIX—an assistant for algebraists. In [67], pp. 382–389.

[57] Boos E., Dubinin M., Edneral V. Ilyin V., Kryukov A., Pukhov A., Shichanin S. In: *Proceedings of the Second International Workshop on Software Engineering, Artificial Intelligence and Expert Systems in High Energy and Nuclear Physics, (France, January 1992)*, Paris, 1992, pp. 665–670.

[58] Richardson D. *J.Symbolic Logic*, **33**, 1968, pp. 511–520.

[59] Ilyin V.A., Kryukov A.P. In [67], pp. 224–228.

[60] Зима Е.В. *Программирование*, **5**, 1992, стр. 63–69.

[61] *Proceedings of the International Conference on Interval and Computer Algebraic Methods in Science and Ingeneering.* St.Peterburg, 1994.

[62] Абрамов С.А., Зима Е.В., Ростовцев В.А. *Программирование*, **5**, 1992, стр. 4–25.

[63] Васильев Н.Н., Еднерал В.Ф. *Программирование*, *N*° 1, Москва, 1994, стр. 70–82.

[64] Климов Д.М., Руденко В.М. *Методы компьютерной алгебры в задачах механики.* М., Наука, 1989.

[65] Жарков А.Ю. *Язык аналитических вычислений REDUCE. Часть I.* Изд-во Саратовского университета, Саратов, 1990.

[66] Грозин А.Г., Система REDUCE в физике элементарных частиц. *Новосибирск, Препринты Института ядерной физики СО АН СССР*: 90– 42, 1990; 90–62, 1990; 90–71, 1990; 91–46, 1991; 91–56, 1991.

[67] *Proceedings of the 1991 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ISSAC'91 (Bonn, Germany, July 1991)*, ISBN 0-89791-437-6, S.M.Watt (ed.), N.Y., ACM Press, 1991.

[68] Бухбергер Б., В кн. *Компьютерная Алгебра. Символьные и Алгебраические Вычисления.* М., Мир, 1985, стр. 331–372.

[69] *Computer algebra in industry 2. Problem solving in practice*, A.M. Cohen et. al. (ed.), John Wiley & Sons, Chichester, 1995.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 марта 1996 года.

Васильев Н.Н. и др. P11-96-98
Компьютерная алгебра в научных и инженерных приложениях

В работе обсуждается широкий круг вопросов, связанных с историей развития и применения систем и алгоритмов компьютерной алгебры в науке и инженерно-технической практике.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод авторов

Vasiliev N.N. et al. P11-96-98
Computer Algebra in Application to Science and Engineering

In the paper we discuss a wide range of questions concerning history of development and application of computer algebra algorithms and systems to scientific and engineering problems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996