

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-510

P11-96-510

И.В.Пузынин, И.В.Амирханов, С.Т.Завтрак,  
О.В.Зейналова, Ш.С.Зейналов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССА ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ  
В АКУСТИЧЕСКОМ ЛАЗЕРЕ

1996

## Введение

В настоящее время существует ряд работ, в которых предлагаются теоретические схемы акустических лазеров, см., например, /1,2,3/. Самосинхронизация в системе изначально некогерентных механических осцилляторов (монополей) и усиление акустической волны было исследовано Кобелевым Ю.А. и др. /1/, где впервые было проведено исследование нелинейных эффектов. Котусов А.Н. и Немцов Б.Е. исследовали возникновение звуковых волн в резонаторе Гельмгольца с переохлажденным паром. В работе /3/ рассматривается теоретическая схема акустического лазера, аналогичная схеме лазера на свободных электронах. В настоящей работе построен и реализован алгоритм численного исследования математической модели одномерного акустического лазера, предложенного в работе /3/.

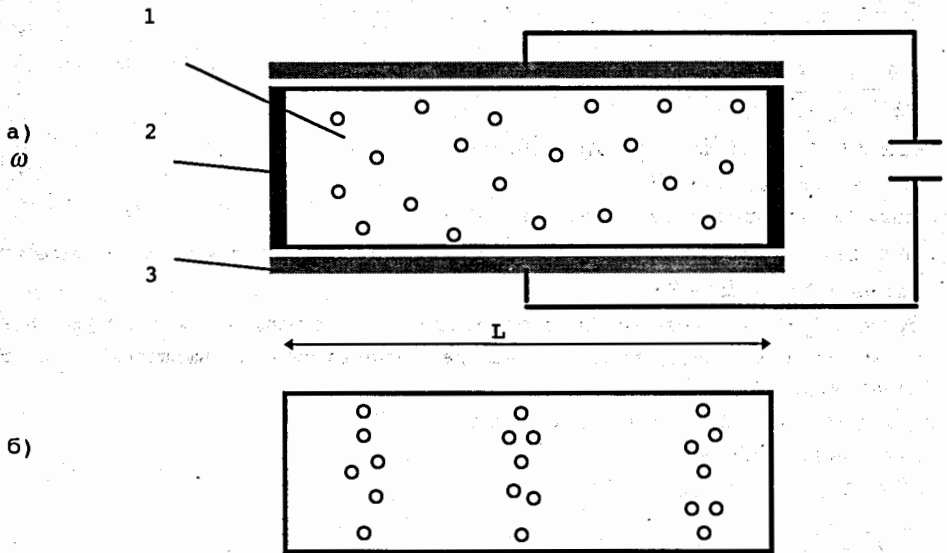


Рис. 1

Рассматриваемая модель акустического лазера (рис.1,а) состоит из:  
1) активной среды лазера, которая представляет собой диэлектрическую жидкость со взвешенными в ней частицами, характеризующуюся параметрами  $\alpha_0, \beta_0, c$ ;  
2) резонатора, которым являются две отражающие пластины, расположенные в активной среде на расстоянии  $L$  друг от друга;  
3) внешнего генератора накачки, состоящего из конденсатора с подведенным к нему гармоническим электрическим полем частоты  $\omega$ .

Под действием переменного электрического поля частицы, взвешенные в активной среде, начинают вибрировать. Созданная волна давления заставляет частицы передвигаться в области минимумов давления. Таким образом, происходит процесс локализации частиц в определенных областях активной среды лазера (рис. 1, б). Этот процесс называется банчеркой частиц. Математическая модель описанного процесса построена в работе /3/ и может быть сформулирована следующим образом.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений второго порядка с комплексными переменными /3/:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - (\alpha_0 + i\beta_0) \frac{N}{N_0} \Psi = (\alpha_0 + i\beta_0) \frac{N - N_0}{N_0} P_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\alpha_0}{\gamma_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( N \left( \frac{\partial}{\partial x} (P_0^* \Psi + P_0 \Psi^* + \Psi \Psi^*) \right) \right),$$

где  $(x, t) \in \Omega$ ,  $\Omega = [0, L] \times [0, \infty)$ ;

$L$  - длина резонатора;

$\Psi(x, t)$  - волновая функция;  $\Psi: \Omega \rightarrow C$ ;

$N(x, t)$  - число частиц в единице объема вблизи точки  $x$  в момент времени  $t$ ;  $N: \Omega \rightarrow R$ ;

$P_0 = FP_E e^{i\omega t}$  - давление в резонаторе со средой, характеризующейся параметром  $F$ , создаваемое внешним генератором с частотой  $\omega$  и амплитудой  $P_E$  /3/;

$\gamma_0, c, \alpha_0, \beta_0 \in R$  - физические константы /3/.

Начальные условия:

$$\Psi(x, t)|_{t=0} = \Psi_0(x),$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} |_{t=0} = \Psi_1(x),$$

$$N(x, t)|_{t=0} = N_0(x) = \text{const.}$$

Граничные условия на функцию  $\Psi$ :

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} |_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} |_{x=L} = 0.$$

После преобразования системы (1) к безразмерному виду посредством следующей замены переменных:

$$\Psi(x, t) = FP_E e^{i\tau} \varphi(\chi, \tau),$$

$$\frac{N(x, t)}{N_0} = \eta(\chi, \tau),$$

$$\kappa x = \chi, \quad \omega t = \tau, \quad \kappa = \frac{\omega}{c}$$

и введения действительных переменных  $\varphi_1, \varphi_2$ :

$$\varphi(\chi, \tau) = \varphi_1(\chi, \tau) + i\varphi_2(\chi, \tau),$$

и, обозначив

$$\alpha'_0 = \frac{\alpha_0}{\kappa^2}, \quad \beta'_0 = \frac{\beta_0}{\kappa^2}, \quad q = \frac{\alpha_0 \kappa F F^* P_E^2}{\gamma_0 c},$$

$$\Phi(\chi, \tau) = 2\varphi_1(\chi, \tau) + \varphi_1^2(\chi, \tau) + \varphi_2^2(\chi, \tau),$$

получаем систему трех нелинейных уравнений относительно  $\varphi_1(\chi, \tau), \varphi_2(\chi, \tau), \eta(\chi, \tau)$ :

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} + \varphi_1 = \eta \alpha'_0 \varphi_1 - \eta \beta'_0 \varphi_2 + (\eta - 1) \alpha'_0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + \varphi_2 = \eta \alpha'_0 \varphi_2 + \eta \beta'_0 \varphi_1 + (\eta - 1) \beta'_0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = q \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \right), \quad (2.3)$$

$$\chi \in [0, \kappa L].$$

Начальные условия:

$$\varphi_1(\chi, 0) = \frac{\Psi_0}{FP_E}, \quad \varphi_2(\chi, 0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1(\chi, \tau)}{\partial \tau} |_{\tau=0} = \frac{\Psi_1}{\omega FP_E}, \quad \frac{\partial \varphi_2(\chi, \tau)}{\partial \tau} |_{\tau=0} = -\frac{\Psi_0}{FP_E}.$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial \varphi_1(\chi, \tau)}{\partial \chi} |_{\chi=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1(\chi, \tau)}{\partial \chi} |_{\chi=\kappa L} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2(\chi, \tau)}{\partial \chi} |_{\chi=0} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2(\chi, \tau)}{\partial \chi} |_{\chi=\kappa L} = 0.$$

Были выбраны следующие начальные условия на функции  $\varphi_1, \varphi_2$ :

$$\varphi_1(\chi, 0) = 10^{-6} \cos(\chi) ;$$

$$\varphi_2(\chi, 0) = 0 ;$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}(\chi, 0) = 0 ;$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}(\chi, 0) = 0 .$$

Длина резонатора  $L$  положена равной  $\frac{2\pi}{\kappa}$ . Отметим, что параметр  $q$  может быть представлен в виде

$$q = \left( \frac{P_{EF}^2}{P_{st}^2} \right) \frac{|\delta_L|}{2} \frac{\beta'_0}{\alpha'_0}, \text{ где } P_{st} - \text{стартовое значение давления}$$

накачки, т.е. порог генерации (если  $\left| \frac{P_{EF}'}{P_{st}} \right| < 1$ , то генерации

нет, если  $\left| \frac{P_{EF}'}{P_{st}} \right| > 1$ , то генерация есть, параметр  $\delta_L$

характеризует отклонение круговой частоты накачки  $\omega$  от круговой резонансной частоты самого резонатора  $\omega_r = \frac{2\pi c}{L} m$ , где  $m$  - целое

положительное число  $\delta_L = 1 - \left( \frac{\omega_r}{\omega} \right)$ .

## 2. Дискретизация системы (2)

Для численного решения системы (2) использована сетка с шагом  $\bar{\tau}$  по  $\tau$  и с шагом  $h$  по  $\chi$ :

$$\chi = hk, k = 0 \dots N, \tau = \bar{\tau}j, j = 0 \dots N$$

Аппроксимируем производные по  $\chi$  конечными разностями второго порядка точности во внутренних точках отрезка  $[0, 2\pi]$  по формулам:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1(hk, \bar{\tau}j)}{\partial \chi^2} = \frac{\varphi_1(h(k-1), \bar{\tau}j) - 2\varphi_1(hk, \bar{\tau}j) + \varphi_1(h(k+1), \bar{\tau}j)}{h^2} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2(hk, \bar{\tau}j)}{\partial \chi^2} = \frac{\varphi_2(h(k-1), \bar{\tau}j) - 2\varphi_2(hk, \bar{\tau}j) + \varphi_2(h(k+1), \bar{\tau}j)}{h^2} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial \eta(hk, \bar{\tau}(j+1))}{\partial \chi} = \frac{\eta(h(k+1), \bar{\tau}(j+1)) - \eta(h(k-1), \bar{\tau}(j+1))}{2h}.$$

Аппроксимируем производные по  $\tau$  конечными разностями второго порядка точности для функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и формулой первого порядка точности для функции  $\eta$  во внутренних точках отрезка  $[0, 2\pi]$  по формулам

$$\frac{\partial^2 \varphi_1(hk, \bar{\tau}j)}{\partial \tau^2} = \frac{\varphi_1(hk, \bar{\tau}(j+1)) - 2\varphi_1(hk, \bar{\tau}j) + \varphi_1(hk, \bar{\tau}(j-1))}{\tau^2} + O(\bar{\tau}^2),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2(hk, \bar{\tau}j)}{\partial \tau^2} = \frac{\varphi_2(hk, \bar{\tau}(j+1)) - 2\varphi_2(hk, \bar{\tau}j) + \varphi_2(hk, \bar{\tau}(j-1))}{\tau^2} + O(\bar{\tau}^2),$$

$$\frac{\partial \eta(hk, \bar{\tau}(j+1))}{\partial \tau} = \frac{\eta(hk, \bar{\tau}(j+1)) - \eta(hk, \bar{\tau}j)}{\bar{\tau}} + O(\bar{\tau}),$$

$$\frac{\partial \varphi_1(hk, \bar{\tau}j)}{\partial \tau} = \frac{\varphi_1(hk, \bar{\tau}(j+1)) - \varphi_1(hk, \bar{\tau}(j-1))}{2\tau} + O(\bar{\tau}^2),$$

$$\frac{\partial \varphi_2(hk, \bar{\tau}j)}{\partial \tau} = \frac{\varphi_2(hk, \bar{\tau}(j+1)) - \varphi_2(hk, \bar{\tau}(j-1))}{2\tau} + O(\bar{\tau}^2), \quad k=1 \dots N-1, j=1 \dots$$

Аппроксимируем начальные условия на функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  приближенными формулами первого порядка точности:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}(kh, 0) = \frac{\varphi_{k,1}^1 - \varphi_{k,0}^1}{\bar{\tau}} + O(\bar{\tau});$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}(kh, 0) = \frac{\varphi_{k,1}^2 - \varphi_{k,0}^2}{\bar{\tau}} + O(\bar{\tau}).$$

Аппроксимируем производные по  $\chi$  в краевых точках по формулам второго порядка точности для функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\frac{\partial \varphi_1(0, \bar{\tau}j)}{\partial \chi} = \frac{4\varphi_1(h, \bar{\tau}j) - \varphi_1(2h, \bar{\tau}j) - 3\varphi_1(0, \bar{\tau}j)}{3h} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial \varphi_2(0, \bar{\tau}j)}{\partial \chi} = \frac{4\varphi_2(h, \bar{\tau}j) - \varphi_2(2h, \bar{\tau}j) - 3\varphi_2(0, \bar{\tau}j)}{3h} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial \varphi_1(2\pi, \bar{\tau}j)}{\partial \chi} = \frac{4\varphi_1(h(N-1), \bar{\tau}j) - \varphi_1(h(N-2), \bar{\tau}j) - 3\varphi_1(N, \bar{\tau}j)}{3h} + O(h^2),$$

$$\frac{\partial \varphi_2(2\pi, \bar{\tau}j)}{\partial \chi} = \frac{4\varphi_2(h(N-1), \bar{\tau}j) - \varphi_2(h(N-2), \bar{\tau}j) - 3\varphi_2(N, \bar{\tau}j)}{3h} + O(h^2),$$

$j=2 \dots$

Граничные условия на функцию  $\eta$  в исходной задаче не заданы, однако их можно вывести аналитически из граничных условий на функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Полученные граничные условия имеют вид

$$\eta(0, \tau) = \exp\left(q \int_0^{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2}(0, \theta) d\theta\right),$$

$$\eta(kL, \tau) = \exp\left(q \int_0^{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2}(2\pi, \theta) d\theta\right).$$

Заменяя интегралы в этих выражениях приближенными значениями, вычисленными по формулам трапеции, получаем конечноразностную аппроксимацию граничных условий второго порядка точности:

$$\eta_{0,j+1} = \exp\left\{q \left(0.5\bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{0,0} + \sum_{j'=1}^j \bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{0,j'} + 0.5\bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{0,j+1}\right)\right\},$$

$$\eta_{N,j+1} = \exp\left\{q \left(0.5\bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{N,0} + \sum_{j'=1}^j \bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{N,j'} + 0.5\bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{N,j+1}\right)\right\}.$$

Таким образом, получаем следующую систему дискретных уравнений:

$$\varphi_{k,j+1}^1 - \bar{\tau} \varphi_{k,j+1}^2 = A_{k,j}, \quad (3.1)$$

$$\bar{\tau} \varphi_{k,j+1}^1 + \varphi_{k,j+1}^2 = B_{k,j}, \quad (3.2)$$

$$\eta_{k,j+1} - q \frac{\bar{\tau}}{2h} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \Big|_{k,j+1} \eta_{k+1,j+1} + q \frac{\bar{\tau}}{2h} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \Big|_{k,j+1} \eta_{k-1,j+1} = \eta_{k,j} \left(1 + q \bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{k,j+1}\right), \quad (3.3)$$

$$j=1 \dots, k=1 \dots N-1,$$

где

$$A_{k,j} = \frac{\bar{\tau}^2}{h^2} \{\varphi_{k+1,j}^1 - 2\varphi_{k,j}^1 + \varphi_{k-1,j}^1\} + 2\varphi_{k,j}^1 - \varphi_{k,j-1}^1$$

$$- \bar{\tau} \varphi_{k,j-1}^2 + \bar{\tau}^2 \varphi_{k,j}^1 - \alpha'_0 \eta_{k,j} \bar{\tau}^2 \varphi_{k,j}^1$$

$$+ \beta'_0 \eta_{k,j} \bar{\tau}^2 \varphi_{k,j}^1 + \alpha'_0 (\eta_{k,j} - 1) \bar{\tau}^2,$$

$$B_{k,j} = \frac{\bar{\tau}^2}{h^2} \{\varphi_{k+1,j}^2 - 2\varphi_{k,j}^2 + \varphi_{k-1,j}^2\} + 2\varphi_{k,j}^2 - \varphi_{k,j-1}^2$$

$$+ \bar{\tau} \varphi_{k,j-1}^1 + \bar{\tau}^2 \varphi_{k,j}^2 - \alpha'_0 \eta_{k,j} \bar{\tau}^2 \varphi_{k,j}^2$$

$$- \beta'_0 \eta_{k,j} \bar{\tau}^2 \varphi_{k,j}^1 - \beta'_0 (\eta_{k,j} - 1) \bar{\tau}^2,$$

$$k=1 \dots N-1, j=2 \dots,$$

с начальными условиями:

$$\varphi_{k,0}^1 = 10^{-6} \cos(hk), \quad \varphi_{k,0}^2 = 0,$$

$$\varphi_{k,1}^1 = \varphi_{k,0}^1, \quad \varphi_{k,1}^2 = \varphi_{k,0}^2,$$

$$\eta_{k,0} = 1,$$

$$k=0 \dots N.$$

и граничными условиями:

$$4\varphi_{1,j}^1 - \varphi_{2,j}^1 - 3\varphi_{0,j}^1 = 0,$$

$$4\varphi_{1,j}^2 - \varphi_{2,j}^2 - 3\varphi_{0,j}^2 = 0,$$

$$4\varphi_{N-1,j}^1 - \varphi_{N-2,j}^1 - 3\varphi_{N,j}^1 = 0,$$

$$4\varphi_{N-1,j}^2 - \varphi_{N-2,j}^2 - 3\varphi_{N,j}^2 = 0,$$

$$\eta_{0,j+1} = \exp\left\{q \left(0.5\bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{0,0} + \sum_{j'=1}^j \bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{0,j'} + 0.5\bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{0,j+1}\right)\right\},$$

$$\eta_{N,j+1} = \exp\left\{q \left(0.5\bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{N,0} + \sum_{j'=1}^j \bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{N,j'} + 0.5\bar{\tau} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \chi^2} \Big|_{N,j+1}\right)\right\},$$

где

$$\Phi(\chi, \tau) = 2\varphi_1(\chi, \tau) + \varphi_1^2(\chi, \tau) + \varphi_2^2(\chi, \tau).$$

Полученная система представляет собой явную трехслойную схему относительно пары неизвестных  $\varphi_{k,j}^1, \varphi_{k,j}^2$  и неявную двухслойную схему относительно функции  $\eta_{k,j}$ . Заметим, что использование явной двухслойной схемы приводит к неустойчивости /4/. Неявная двухслойная схема абсолютно устойчива. Явная трехслойная схема для уравнения

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + f(x, t)$$

устойчива, если выполнено условие Куранта /5/:  $\frac{\bar{\tau}}{h} < 1$ . Поэтому, при

реализации алгоритма мы будем использовать сетки, удовлетворяющие условию Куранта. Значения функций  $\varphi^1, \varphi^2$  на  $j+1$  слое в точке  $k$  получаются как решение следующей линейной системы:

$$\varphi_{k,j+1}^1 - \bar{\tau} \varphi_{k,j+1}^2 = A_{k,j},$$

$$\bar{\tau} \varphi_{k,j+1}^1 + \varphi_{k,j+1}^2 = B_{k,j}.$$

Решением этой системы являются величины

$$\varphi_{k,j+1}^1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \varphi_{k,j+1}^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta = 1 + \bar{\tau}^2,$$

$$\Delta_1 = A_{k,j} + \bar{\tau} B_{k,j},$$

$$\Delta_2 = B_{k,j} - \bar{\tau} A_{k,j}.$$

Уравнение (3.3) решается методом прогонки. Таким образом, был получен следующий алгоритм численного решения системы (3):

- 1) заданные начальные условия позволяют определить значения функций  $\varphi^1, \varphi^2$  на 0 и 1 слое; по известным значениям  $\varphi^1, \varphi^2$  на 0 и 1 слое и значениям функции  $\eta$  на 0 слое вычисляются значения функции  $\eta$  на 1 слое в точках  $k=0, k=N$ ;
- 2) затем вычисляются значения функции  $\eta$  в точках  $k=1 \dots N-1$  на 1 слое;
- 3) далее, по известным значениям функций  $\varphi^1, \varphi^2$  на  $j$  и  $j-1$  слое и значениям функции  $\eta$  на  $j$  слое вычисляются значения функций  $\varphi^1, \varphi^2$  на  $j+1$  слое в точках  $k=1 \dots N-1$ ;
- 4) вычисляются значения функций  $\varphi^1, \varphi^2$  в точках  $k=0, k=N$  на  $j+1$  слое;
- 5) вычисляются значения функции  $\eta$  в точках  $k=0, k=N$  на  $j+1$  слое;
- 6) вычисляются значения функции  $\eta$  в точках  $k=1 \dots N-1$  на  $j+1$  слое.

### 3. Тестирование алгоритма

Построенный алгоритм был опробован на модельных задачах, в частности, на задачах, имеющих аналитическое решение. Было проведено сравнение аналитического и численного решений. Получено численное решение исходной задачи, проведено сравнение точности полученных численных решений на сгущающихся сетках.

#### 3.1. Модельная задача для уравнений (3.1)-(3.2)

Численное решение системы (3.3) было опробовано на модельной задаче в случае

$$\eta(\chi, \tau) \equiv 1.$$

В этом случае непрерывное уравнение относительно  $\varphi(\chi, \tau)$  имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - 2i \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \varphi - (\alpha'_0 + i\beta'_0)\varphi = 0.$$

Начальные и граничные условия:

$$\varphi(\chi, 0) = \varphi_0(\chi),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}(\chi, 0) = \varphi_1(\chi),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \chi}(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \chi}(2\pi, \tau) = 0.$$

Это уравнение имеет аналитическое решение:

В частности, при  $k=1$  и начальных условиях

$$\varphi_0(\chi) = \cos(\chi),$$

$$\varphi_1(\chi) = 0$$

решением этого уравнения является функция

$$\varphi(\chi, \tau) = \varphi_1(\chi, \tau) + i\varphi_2(\chi, \tau),$$

где

$$\varphi_1(\chi, \tau) = \{a_1 \cos b_3 \tau \exp(b_1 \tau) - a_2 \sin b_3 \tau \exp(b_1 \tau)$$

$$+ a_3 \cos b_4 \tau \exp(b_2 \tau) - a_4 \sin b_4 \tau \exp(b_2 \tau)\} \cos(\chi),$$

$$\varphi_2(\chi, \tau) = \{a_1 \sin b_3 \tau \exp(b_1 \tau) + a_2 \cos b_3 \tau \exp(b_1 \tau)$$

$$+ a_3 \sin b_4 \tau \exp(b_2 \tau) + a_4 \cos b_4 \tau \exp(b_2 \tau)\} \cos(\chi),$$

$$a_1 = \sqrt{r} + \cos\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad a_2 = -\frac{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)}{2\sqrt{r}},$$

$$a_3 = 1 - a_1, \quad a_4 = -a_2,$$

$$b_1 = -\sqrt{r} \sin\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad b_2 = -b_1,$$

$$b_3 = -1 + \sqrt{r} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad b_4 = -1 - \sqrt{r} \cos\left(\frac{\xi}{2}\right),$$

$$r = \sqrt{(1 + \alpha'_0)^2 + \beta'_0{}^2}, \quad \xi = \arctg \frac{\beta'_0}{1 + \alpha'_0}.$$

На рис. 2 приведены графики максимумов погрешности численных решений  $\varphi^1$  и  $\varphi^2$  при числе точек разбиения отрезка  $[0, 2\pi]$ , равном  $N=100$  (в этом случае шаг по  $\chi$  равен  $h = \frac{2\pi}{N}$ ), шаг по  $\tau$  взят равным

$\bar{\tau} = \frac{2\pi}{1.2N}$ . Процесс рассматривается до 1000 слоя, что соответствует моменту времени  $\tau \approx 52$  (условных единиц).



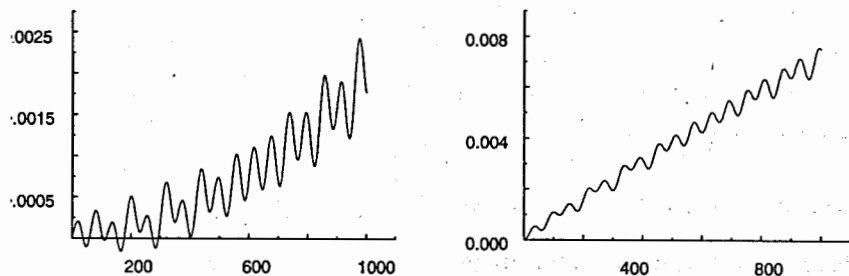


Рис. 2. Зависимость максимумов погрешности численных решений функций  $\phi^1$  и  $\phi^2$  от времени

Как видно из представленных графиков, наблюдается слабый рост максимумов погрешности с течением времени, величина погрешности полученных численных решений на 1000 слое не превышает второго знака после запятой. Графики иллюстрируют устойчивость используемой схемы для уравнений (3.1)-(3.2).

### 3.2 Модельная задача для уравнения (3.3)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial y}{\partial t} + a(x) \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial x} y = 0, \quad x = [0, 2\pi], \quad 0 \leq t < \infty. \quad (4)$$

с начальными условиями

$$y(x, 0) = 1.$$

В случае

$$a(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

рассматриваемое уравнение совпадает с уравнением (2.3). При выборе

функции  $a(x)$ , равной

$$a(x) = x(2\pi - x)$$

уравнение (4) имеет аналитическое решение:

$$y(x) = \exp(2\pi t) \frac{(2\pi)^2}{(x + (2\pi - x) \exp(2\pi t))^2}.$$

На рис.3 представлено численное решение уравнения (4), полученное с помощью построенного алгоритма, на рис.4 - относительная погрешность численного решения (результаты получены на сетке с шагами  $h = \frac{2\pi}{150}$ ,  $\bar{\tau} = \frac{2\pi}{600}$  для слоя  $j=10$ ).

Шагами  $h = \frac{2\pi}{150}$ ,  $\bar{\tau} = \frac{2\pi}{600}$  для слоя  $j=10$ .

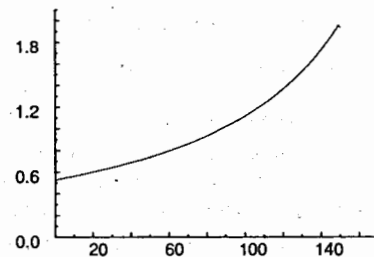


Рис.3 Численное решение уравнения (4)

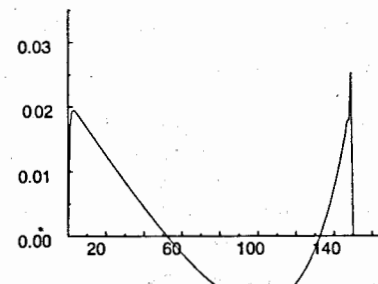


Рис.4 Относительная погрешность численного решения уравнения (4)

В качестве следующей модельной задачи рассмотрено уравнение (4) с параметром  $a(x)$ , равным  $a(x) = -2\cos(x)\sin(x) - 2\sin(x)$ , что соответствует начальным условиям задачи (2) (без подавляющего множителя  $10^{-6}$ ).

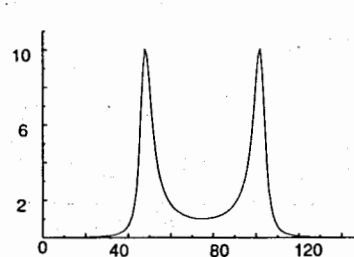


Рис.5 Численное решение уравнения (4),  $j=100$

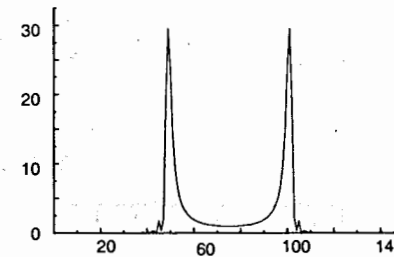


Рис.6 Численное решение уравнения (4),  $j=150$

Эта модельная задача не имеет аналитического решения, однако проведенное сравнение численных решений на сгущающихся сетках по  $h$  указывает на сохранение 4-5 знаков после запятой. На рис.5 представлено численное решение этой задачи на слое  $j=100$  (сетка  $h = \frac{2\pi}{200}$ ,  $\bar{\tau} = \frac{2\pi}{800}$ ). При больших значениях  $\tau$  на границах отрезка  $[0, 2\pi]$  появляется расходимость в виде осцилляции - рис.6,  $j=150$ , что позволяет судить о характере расходимости, появляющейся в численном решении уравнения (3.3.) при больших временах.

### 3.3. Проверка решения системы (3) на сгущающихся сетках

Проведено сравнение численных решений задачи (3) на сгущающихся

сетках с шагами по  $\chi$ , равными  $h_1 = \frac{2\pi}{100}$ ,  $h_2 = \frac{2\pi}{200}$ ,  $h_3 = \frac{2\pi}{400}$ . Расчеты

приведены для слоя  $j=1000$ , что соответствует моменту времени  $\tau = \frac{10\pi}{2.4}$ . Результаты вычислений, представленные в таблице 1, демонстрируют, что измельчение сетки по  $\chi$  сохраняет 3 знака после запятой в численных решениях. Т.к. конечноразностная аппроксимация задачи проведена со вторым порядком точности по  $h$ , то соотношение Рунге-Ромберга при измельчении сетки по  $\chi$  равно 4. На рис.7 представлено соотношение Рунге-Ромберга для функции  $\eta$ , что не противоречит теоретическому прогнозу.



Рис. 7

Таблица 1

k	$\eta_{k,j_0}$ сетка с $h_1$	$\eta_{2k,j_0}$ сетка с $h_2$	$\eta_{4k,j_0}$ сетка с $h_3$
5	0.10121	0.10106	0.10104
10	0.12223	0.12224	0.12225
15	0.17063	0.17086	0.17092
20	0.28389	0.28479	0.28503
25	0.59279	0.59687	0.59787
30	1.62960	1.63152	1.63176
35	3.34572	3.34852	3.34855
40	2.02210	2.02426	2.02480
45	1.19096	1.19109	1.19113
50	1.00100	1.00103	1.00104

#### 4. Численное решение задачи

Построенный в настоящей работе численный алгоритм реализован при следующих значениях параметров:

$$\alpha'_0 = 0.01,$$

$$\beta'_0 = 0.001,$$

$$q = 0.045,$$

$$\kappa L = 2\pi,$$

$$N=100, h=\frac{2\pi}{N}, \tau=h/1.2/4, \text{PstPe}=3.$$

Начальные условия:  $\varphi^1(\chi,0)=10^{-6} \cdot \cos(x)$ ,  $\varphi^2(\chi,0)=0$ . Получены численные значения искомых функций, которые представлены на рис.8-11.

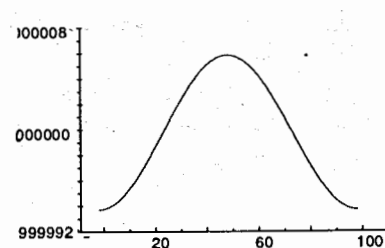


Рис. 8 Функция  $\eta(\chi)$  при  $\tau = 5000 * \hat{\tau}$

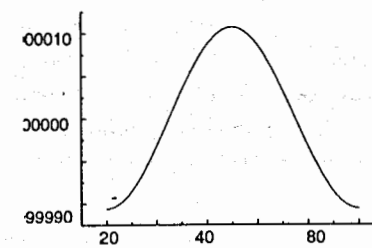


Рис. 9 Функция  $\eta(\chi)$  при  $\tau = 8000 * \hat{\tau}$

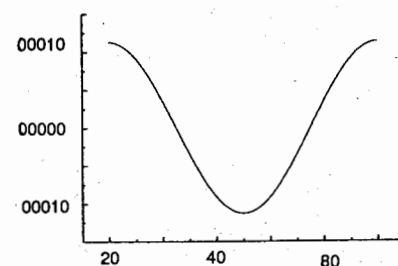


Рис. 10 Функция  $\varphi^1(\chi)$  при  $\tau = 5000 * \hat{\tau}$

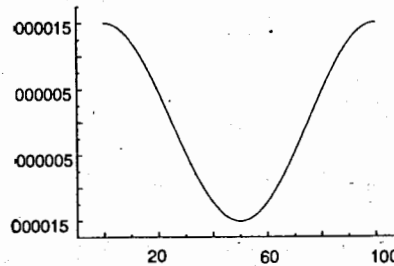


Рис. 11 Функция  $\varphi^1(\chi)$  при  $\tau = 8000 * \hat{\tau}$



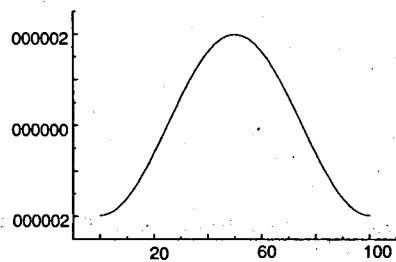
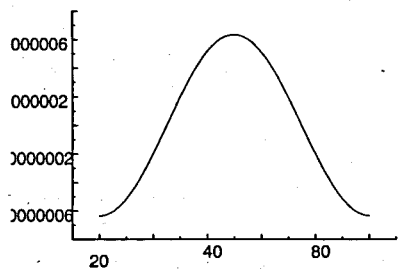


Рис. 12 Функция  $\varphi^2(x)$  при  $\tau = 5000 \cdot \bar{\tau}$

Рис. 13 Функция  $\varphi^2(x)$  при  $\tau = 8000 \cdot \hat{\tau}$

На рис.8 и 9 представлена динамика функции  $\eta(x)$  с увеличением времени (рис.8 - 5000 слой, рис.9 - 8000 слой). На рис. 10-13 - соответствующие значения функций  $\varphi^1(x)$ ,  $\varphi^2(x)$ . Как видно из графиков, с течением времени просходит увеличение плотности распределения частиц в одной точке (явление банчеровки).

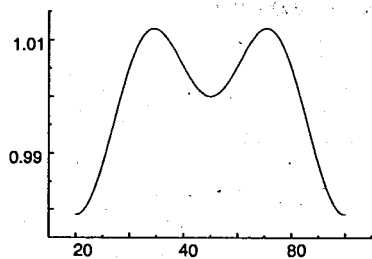


Рис.14 Функция  $\eta$  на слое  $j=10$

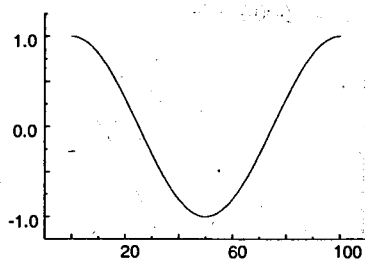


Рис.15 Функция  $\varphi^1$  на слое  $j=10$

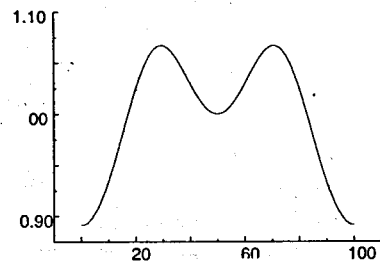


Рис.16 Функция  $\eta$  на слое  $j=50$

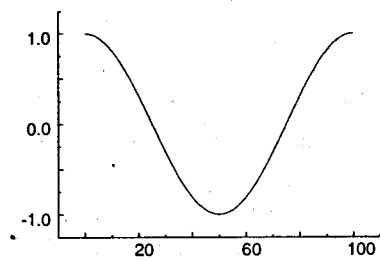


Рис.17 Функция  $\varphi^1$  на слое  $j=50$

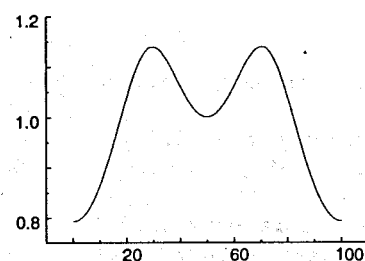


Рис.18 Функция  $\eta$  на слое  $j=100$

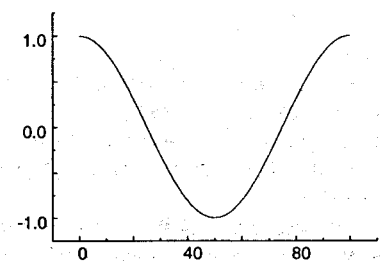


Рис.19 Функция  $\varphi^1$  на слое  $j=100$

На рис.14-19 представлены значения функций  $\eta$ ,  $\varphi^1$  на слоях  $j=10$ ,  $j=50$ ,  $j=100$  для задачи с начальными условиями

$$\varphi_1(x,0) = \cos(x),$$

$$\varphi_2(x,0) = 0.$$

Имеет место явление банчеровки, что соответствует ожидаемым физиками результатам. На рис. 20 представлена функция  $\eta$  на слое  $j=1000$ . При больших временах появляются осцилляции в областях максимумов производной  $\eta$  (рис.21) - разностная схема "разваливается".

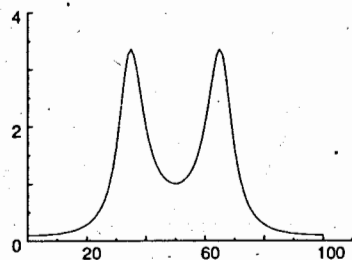


Рис.20 Функция  $\eta$  на слое  
 $j=1000$

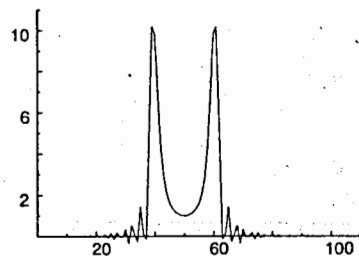


Рис.21 Функция  $\eta$  на слое  
 $j=2500$

#### Литература

- /1/ Ю.А.Кобелев, Л.А.Островский, И.А.Сустова, Известия Вузов, Радиофизика, 29,1129(1986).
- /2/ А.Н.Котусов,Б.Е.Немцов, Акустический журнал,37,123 (1991).
- /3/ Zavtrak S.T. Phys. Rev.,E,51,2480 (1995), Phys.Rev. E, 51, 3767 (1995).
- /4/ А.А. Самарский, А.В. Гулин. Численные методы,Наука,1989.
- /5/ Г.И.Марчук.Методы вычислительной математики,Наука,1980.

Рукопись поступила в издательский отдел  
31 декабря 1996 года.

Пузынин И.В. и др.

P11-96-510

Численное моделирование процесса возбуждения колебаний  
в акустическом лазере

В данной работе рассмотрена численная модель процесса генерации волн в акустическом лазере. Создана компьютерная программа для решения системы двух нелинейных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами. Показано, что частицы активной среды группируются (банчуются) в процессе работы лазера.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод авторов

Puzynin I.V. et al.

P11-96-510

Computer Simulation of Wave Generation Conditions  
in Acoustic Lasers

In this work a numerical model of wave generation process in an acoustic laser was considered. A computer program to solve a system of two nonlinear differential equations with complex coefficients was developed. The spatial bunching of the active medium particles was shown.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996